Ch.-J. de La Vallée Poussin
Collected Works, vol. III, pag. 211-214

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.
(Extrait des Bulletins, n° 12 [décembre], 1911.)

CLASSE DES SCIENCES.

CONCOURS ANNUEL DE 1911.

Section des sciences mathématiques et physiques.

QUATRIÈME QUESTION.

On demande de nouvelles recherches sur les développements des fonctions (réelles ou analytiques) *en séries de polynomes.* — Prix : 800 francs.

Rapport de M. de la Vallée Poussin, premier commissaire.

« Mémoire adressé en réponse à la quatrième question précitée.

Devise :

La vie est brève...
Un peu de rêve,
Un peu d'espoir,
Et puis bonsoir.

Ce mémoire a pour titre : *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné,* et c'est des fonctions réelles qu'il s'agit presque exclusivement.

Le but principal de ce travail, dit l'auteur dans son introduction, est de résoudre la question suivante posée par M. de la Vallée Poussin (*) : Est-il possible ou non de représenter l'ordonnée d'une ligne polygonale, ou (ce qui revient au même) $|x|$ dans l'intervalle $(-1, +1)$, par un polynome de degré n avec une approximation d'ordre supérieur à $1 : n$. La possibilité d'atteindre cette approximation était d'ailleurs démontrée dans le mémoire cité.

La même question élargie a été reprise à l'Université de Göttingen comme question de concours (**), et la Faculté de cette Université vient de couronner un important mémoire de M. Dunham Jackson, présenté en réponse à cette question et publié comme dissertation inaugurale (***). Ce travail a paru trop tard pour venir à la connaissance de l'auteur du mémoire que j'ai à examiner avant la remise de son manuscrit. Aussi, étant donné l'identité des sujets, les deux auteurs devaient nécessairement se rencontrer sur quelques points. Ils se ren-

---

(*) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (sciences), 1908, p. 403.

(**) Voici l'énoncé de cette question :

Bekanntlich hat Weierstrass vor 25 Jahren zuerst bewiesen, dass jede in einem Intervall stetige Funktion mit beliebiger Genauigkeit durch eine ganze rationale Funktion approximiert werden kann. Ueber die Abhängigkeit des hierzu erforderlichen kleinstmöglichen Grades dieses Polynoms von der vorgeschriebenen Genauigkeitsgrenze sind die ersten Untersuchungen in neuerer Zeit gemacht worden, von de la Vallée Poussin (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1908) und Lebesgue (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, Bd 26, und *Annales de la Faculté de Toulouse*, sér. 3, Bd 1). Ob die hierbei erzielten Abschätzungen des Grades als Funktion der Genauigkeitsgrenze noch übertroffen werden können, ist ein offener Fragenkomplex.

Die Fakultät wünscht, dass in dieser Richtung ein wesentlicher Fortschritt gemacht werde; ein solcher würde z. B. in der Beantwortung der folgenden von de la Vallee Poussin gestellten Frage liegen : konvergirt im Falle eines festen gegebenen Linienzuges das Produkt von Genauigkeitsgrenze und zugehörigen Minimalgrade mit ersterer gegen Null?

(***) *Ueber die Genauigkeit der Annäherung stetigen Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebener Grades und trigonometrische Summe gegebener Ordnung*. Göttingen, 1911.

contrent effectivement dans la recherche des relations qui existent entre l'ordre de la meilleure approximation et les propriétés différentielles de la fonction, question fondamentale qui occupe toute la première partie du mémoire qui nous est présenté. Mais cette rencontre n'est pas à regretter, parce que les deux auteurs se placent à des points de vue inverses, l'un, qui nous intéresse, partant de la meilleure approximation pour arriver aux propriétés différentielles, l'autre, M. Jackson, partant des propriétés différentielles pour en conclure l'ordre de la meilleure approximation. Or chacun d'eux va plus loin que l'autre à son point de vue.

Par contre, si nous revenons au problème que j'ai posé quant à l'approximation de $|x|$, M. Jackson apporte peut-être quelques nouvelles contributions à sa solution, mais, pas plus que ses devanciers, il n'arrive à trancher la question. C'est ce que fait l'auteur du mémoire envoyé à l'Académie royale de Belgique. Il fournit même, pour obtenir une borne inférieure satisfaisante de l'approximation de $|x|$ dans l'intervalle $(-1, +1)$, deux méthodes essentiellement différentes. Toutes deux supposent toutefois une certaine extension de la définition du polynome d'approximation, introduite par l'auteur (26) et que voici :

L'auteur appelle *polynome généralisé* relatif à une suite d'exposants positifs donnés $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ une expression de la forme

$$A_0 x^{\alpha_0} + A_1 x^{\alpha_1} + \dots + A_n x^{\alpha_n}.$$

Le polynome d'approximation de $f(x)$ relativement à cette suite d'exposants est alors celui, R_n, des polynomes de la forme précédente pour lequel le maximum de $|f - R_n|$ atteint son minimum. L'auteur étend aux polynomes généralisés presque toutes les propriétés connues jusqu'ici des polynomes d'approximation ordinaires.

Grâce à cela, l'auteur parvient à son but principal et démontre que l'ordre de la meilleure approximation de $|x|$ et, par suite, de l'ordonnée d'une ligne polygonale par un polynome de degré n, est celui de $1 : n$ exactement.

C'est à la solution de cette question qu'est consacrée la majorité de la seconde partie du mémoire, et celle-ci, à mon avis, mériterait déjà le prix à elle seule.

Je ne fais cependant pas moins de cas de la première partie dont j'ai parlé tout à l'heure et j'ai encore beaucoup d'estime pour la troisième et dernière, consacrée aux développements en série de *polynomes trigonométriques*, c'est-à-dire de la forme

$$T_n = \cos n \operatorname{arc} \cos x.$$

Mais ces parties seraient trop longues à analyser, il faudrait reprendre tout au long les énoncés des nombreux théorèmes enchaînés par l'auteur et entre lesquels il est difficile de choisir sans mutiler sa pensée. Voici seulement ma conclusion :

Par le nombre et la valeur des résultats nouveaux qu'il contient, le mémoire présenté à l'Académie est le plus important qui ait été fait jusqu'ici *sur le développement des fonctions réelles en séries de polynomes*. J'ai l'honneur de proposer à la Classe de lui décerner le prix et je fais des vœux pour que son impression puisse se faire le plus tôt possible. »

M. Demoulin, second commissaire, s'est rallié à ces conclusions; elles sont adoptées par la Classe.

L'ouverture du pli cacheté fait connaître comme auteur : M. Serge Bernstein, à Charkow (Russie).

Bruxelles — Imprimerie Hayez, rue de Louvain, 112.