ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

CLASSE DES SCIENCES

MÉMOIRES

COLLECTION IN-4°

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME IV.

FASCICULE I

BERNSTEIN (Serge). — **Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné** (104 pages).

L'UNION FAIT LA FORCE.

BRUXELLES

HAYEZ, IMPRIMEUR DES ACADÉMIES ROYALES

Octobre 1912

SUR L'ORDRE

DE LA

MEILLEURE APPROXIMATION DES FONCTIONS CONTINUES

PAR

DES POLYNOMES DE DEGRÉ DONNÉ

PAR

Serge BERNSTEIN

Mémoire couronné par la Classe des sciences, dans sa séance du 15 décembre 1911.

INTRODUCTION

Le but principal de ce travail est de résoudre la question suivante posée par M. Charles de la Vallée Poussin (*) : Est-il possible ou non de représenter l'ordonnée d'une ligne polygonale avec une approximation d'ordre supérieur à $\frac{1}{n}$ par un polynome de degré n. La possibilité d'atteindre effectivement cette approximation avait été démontrée par M. de la Vallée Poussin dans le *Mémoire* cité.

Le premier pas vers la solution du problème vient d'être fait également par M. de la Vallée Poussin dans un mémoire (**) paru pendant la rédaction du présent travail. Dans ce dernier mémoire, l'honorable professeur de Louvain expose une méthode générale pour la recherche des polynomes d'approximation et arrive, en particulier, à ce résultat que la meilleure approximation d'une ligne polygonale par un polynome de degré n a pour limite inférieure $\frac{1}{n(\log n)^3}$.

Le présent mémoire apporte la réponse complète à la question posée :

La meilleure approximation de $|x|$ *dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *par un polynome de degré* $2n > 0$ *est comprise entre* $\frac{\sqrt{2}-1}{4(2n-1)}$ *et* $\frac{2}{\pi(2n+1)}$.

(*) *Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes*, Bulletin de l'Académie des Sciences de Belgique, 1908, p. 403.

(**) *Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée d'un angle*, Ibid., décembre 1910, p. 808.

En cherchant à résoudre le problème de M. de la Vallée Poussin, je fus amené tout naturellement à me poser d'autres questions analogues et à entreprendre une étude générale des relations qui existent entre la meilleure approximation d'une fonction et ses propriétés différentielles. L'ensemble de cette étude se trouve exposé dans le présent mémoire (*) (plusieurs de mes résultats sont résumés sans démonstrations dans une note : *Sur l'approximation des fonctions continues par des polynomes.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CLII, 27 février 1911).

(*) Je m'empresse de signaler un mémoire de M. Jackson paru après l'envoi de ce travail à l'Académie de Belgique, et traitant de questions analogues. *Ueber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen.* Göttingen (PREISSCHRIFT UND INAUGURAL DISSERTATION, 1911). On y trouvera également réunies de nombreuses indications bibliographiques.

SUR L'ORDRE

DE LA

MEILLEURE APPROXIMATION DES FONCTIONS CONTINUES

PAR

DES POLYNOMES DE DEGRÉ DONNÉ

PREMIÈRE PARTIE

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SÉRIES DE POLYNOMES

CHAPITRE PREMIER.

Démonstration de quelques propositions préliminaires.

1. Polynomes trigonométriques. — Dans un mémoire (*) devenu classique, Tchebischeff a construit des polynomes jouissant de la propriété que de tous les polynomes de la forme

$$\frac{A}{2^{n-1}} x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n,$$

(*) *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions*, Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, sixième série. Sciences mathématiques et physiques, t. VII, 1859, pp. 199-291.

où A est un nombre donné, ils s'écartent de zéro le moins possible dans l'intervalle $(-h, +h)$. Dans le cas de $h = 1$, auquel on ramène facilement le cas général, les polynomes trouvés par Tchebischeff sont égaux à $AT_n(x)$, où

$$T_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2} = \cos n \operatorname{arcos} x,$$

que nous appellerons, pour abréger, polynomes trigonométriques de degré n.

Les polynomes trigonométriques jouissent encore d'autres propriétés analogues que nous allons établir.

2. Théorème. — *Si dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *le polynome de degré* n, $P_n(x) = p_0x^n + \cdots + p_n$ *est tel que* $|P'_n(x). \sqrt{1-x^2}|$ *atteint la valeur* M, *le module* $|P_n(x)|$ *ne peut rester dans cet intervalle constamment inférieur à* $\frac{M}{n}$; *cette dernière valeur ne sera pas dépassée dans le cas seulement où* $P_n(x)$ *est un polynome trigonométrique.*

Tchebischeff admettait sans démonstration l'existence des polynomes qui s'écartent le moins possible d'une fonction donnée dans un intervalle déterminé et qu'on appelle aujourd'hui polynomes d'approximation. Mais l'analyse moderne exige cette démonstration, car on sait que les questions de minima n'admettent pas toujours de solution. Il est donc indispensable de faire quelques remarques pour établir l'existence de polynomes qui, parmi tous les polynomes considérés, s'écartent le moins possible de zéro.

Soit, d'une façon générale,

$$(1) \qquad M(p_0, p_1, \cdots p_{n-1}) = \text{Maximum de } |P'_n(x) . \varphi(x)|,$$

où $\varphi(x)$ est une certaine fonction continue donnée (que nous supposerons holomorphe en tous les points de l'intervalle, où elle n'est pas nulle). Il est clair que dans ces conditions M aura des dérivées partielles $\frac{\partial M}{\partial p_i}$ qui ne seront pas toutes nulles à la fois, car en attribuant à tous les coefficients p_i des accroissements $(n-i)\,p_i dt$, on a

$$dM = M dt \gtrless 0.$$

Donc, si l'on ne considère que les polynomes $P_n(x)$ de degré n, pour lesquels $M(p_0, p_1, \dots p_{n-1})$ reçoit une même valeur déterminée, on voit que leurs $(n+1)$ coefficients sont toujours des fonctions continues de n d'entre eux. On peut par conséquent reproduire textuellement le raisonnement de M. Barel (*) pour établir l'existence d'un polynome $P_n(x)$ pour lequel le maximum de $|P_n(x)|$ est aussi petit que possible, le fait que les coefficients de $P_n(x)$ sont limités résultant ici de l'égalité (1).

Soit donc $P(x)$ un des polynomes qui de tous les polynomes considérés $P_n(x)$ s'écarte le moins possible de zéro. Soient $x_1, x_2, \dots x_k$ les points où le module maximum L de $P(x)$ est atteint, et soit ξ un point où $|P'(x) \cdot \varphi(x)|$ atteint son maximum M. Je dis que les nombres ξ et x_i doivent être tels qu'il soit impossible de trouver un polynome $F_n(x)$ de degré n qui satisfasse simultanément aux équations

$$(2) \qquad P(x_1) = F_n(x_1); \quad P(x_2) = F_n(x_2); \cdots P(x_k) = F_n(x_k); \quad F'_n(\xi) = 0.$$

En effet, si cela était possible, on envisagerait le polynome $P - \lambda F_n$, où λ est un nombre positif défini de la façon suivante : entourons $x_1, \dots x_k$ de petits intervalles, où $P(x)$ et $F_n(x)$ ne changent pas de signe; si nous enlevons ces intervalles du segment $(-1, +1)$, on aura constamment sur le reste du segment $|P(x)| < L' < L$; soit $\delta = L - L'$; prenons alors λ assez petit pour avoir $\lambda |F_n(x)| < \delta$. Le polynome $P - \lambda F_n$ resterait dans ces conditions toujours inférieur à L, puisque dans les intervalles enlevés, on a $|P - \lambda F_n| < |P| \leqq L$ et dans les intervalles restés $|P - \lambda F_n| < L' + \delta \leqq L$, et d'autre part $[P'(\xi) - \lambda F'_n(\xi)] \cdot \delta(\xi) = M$, de sorte que le module maximum M_1 de $[P' - \lambda F'_n] \cdot \varphi$ serait au moins égal à M. Par conséquent, la fonction $\frac{M}{M_1}(P - \lambda F_n)$ appartiendrait à la classe des polynomes considérés P_n et son module resterait constamment inférieur à L, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Les équations (2) doivent donc être incompatibles.

Il en résulte d'abord que $k > n - 1$. En effet, admettons le contraire.

(*) *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 83.

On peut toujours construire un polynome $Q(x)$ de degré $(k-1)$ qui satisfasse aux k premières des équations (2). En posant ensuite

$$R(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k),$$

on voit que le polynome de degré $(k+1)$

$$F_{k+1}(x)=Q(x)+(Ax+B)R(x)$$

satisfait également aux k premières des équations (2), mais on pourra aussi choisir A et B, de sorte qu'on ait également

$$F'_{k+1}(\xi)=Q'(\xi)+AR(\xi)+(A\xi+B)R'(\xi)=0,$$

car on ne peut pas avoir en même temps $R'(\xi)=R(\xi)=0$.

Par conséquent, si l'on avait $k\leqq n-1$, le polynome $F_{k+1}(x)$ de degré non supérieur à n satisferait à toutes les équations (2).

Voyons si k peut être égal à n. S'il en est ainsi, nous pouvons construire le polynome

$$F_n(x)=Q(x)+BR(x)$$

de degré $n=k$, satisfaisant aux k premières des équations (2) et à la dernière également, si B satisfait à l'équation

$$Q'(\xi)+BR'(\xi)=0.$$

Il est donc nécessaire, pour que les équations (2) ne puissent être satisfaites, qu'on ait

$$R'(\xi)=0. \tag{3}$$

Or, k étant égal à n, on a manifestement

$$R(x)=C\frac{x^2-1}{x-\beta}P'(x),$$

où C et β sont des constantes (car P' s'annule pour les valeurs $x_1,\dots x_n$ autres que ± 1, donc $P'(x^2-1)$ est divisible par R et admet une racine de plus β qui d'ailleurs peut être $+1$ ou -1); et l'équation (3) se réduit à

$$(3^{\text{bis}}) \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x-\beta}\,P'(x)\right)_{x=\xi}=0.$$

D'autre part, ξ satisfait à l'équation

$$(4) \qquad (x^2-1)\frac{d}{dx}\big(\varphi(x)\,.\,P'(x)\big)=0.$$

Nous allons particulariser à présent la fonction $\varphi(x)$. Les choses se présentent le plus simplement lorsque $\varphi(x)=x^2-1$. En posant $(x^2-1).P'(x) = P_1(x)$, on voit que ξ devrait satisfaire à la fois à l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P_1(x)}{x-\beta}\right)=\frac{P_1'(x)\,.\,(x-\beta)-P_1(x)}{(x-\beta)^2}=0$$

et à l'équation $P_1'(x)=0$, ce qui entraînerait $P_1(\xi)=0$, tandis qu'on sait que $|P_1(\xi)|=M$. Ainsi dans ce cas on a aussi $k>n$.

La même conclusion subsiste si $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$. En effet, en posant $\sqrt{1-x^2}.\,P'(x)=P_1(x)$, on réduit l'équation (4) à

$$P_1'(x)=0,$$

(car $\xi^2<1$), et l'équation (3^{bis}) devient

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-\beta}\,P_1(x)\right)=P_1(x)\,.\,\frac{d\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-\beta}}{dx}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-\beta}\,P_1'(x)=0.$$

Donc

$$\frac{-\xi(\xi-\beta)-(1-\xi^2)}{(\xi-\beta)^2\sqrt{1-\xi^2}}=0, \qquad \text{d'où } \xi=\frac{1}{\beta}.$$

Il en résulte que $|\beta| > 1$. Cela étant, nous allons utiliser l'équation différentielle (*) à laquelle satisfait $P(x)$. Cette équation a la forme

$$\text{(5)} \qquad L^2 - P^2 = \frac{P'^2(1-x^2)(ax^2+bx+c)}{(x-\beta)^2},$$

a, b, c étant des constantes, car $L^2 - P^2$ est un polynome de degré $2n$ qui admet comme racines doubles celles des valeurs $x_1, x_2, \ldots x_n$ qui sont différentes de ± 1 (puisque celles-ci annulent P') et comme racines simples celles qui sont égales à ± 1, et par conséquent ce polynome est divisible par $\frac{P'^2(1-x^2)}{(x-\beta)^2}$.

De plus l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a ses deux racines réelles, de même signe que β et supérieures en valeur absolue à ce dernier. En effet, soit, pour fixer les idées, β positif; on a donc $\beta > 1$. Lorsque x, après avoir dépassé 1, s'approche de β (où P' s'annule), P^2 croît depuis L^2 jusqu'à un certain nombre L_1^2, ensuite P^2 décroît, et puisque P' ne change plus de signe, après s'être annulé il recommence à croître jusqu'à l'infini. P^2 passe donc encore deux fois, pour $x = \gamma$ et $x = \delta$, par la valeur L^2, et on a $\gamma > \beta$ et $\delta > \beta$, γ et δ étant nécessairement les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Si l'on remarque, d'autre part, que le terme du plus haut degré de P' a son cœfficient n fois plus grand que celui du terme du plus haut degré de P, on peut mettre l'équation (5) sous la forme

$$\text{(5}^{\text{bis}}\text{)} \qquad P^2 - L^2 = \frac{(x^2-1)(x-\gamma)(x-\delta)}{n^2(x-\beta)^2} P'^2,$$

et puisque $\gamma > \beta > 1$, $\delta > \beta > 1$, on aura tant que $|x| \leqq 1$

$$L^2 > \frac{(1-x^2)P'^2}{n^2},$$

ou

$$L > \frac{M}{n}.$$

(*) Tchebischeff, *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes.* Mémoires présentés à l'Académie Impériale de Saint-Pétersbourg, t. VII, 1854.

Mais si k était égal à $n + 1$ (on ne peut avoir $k > n + 1$), P satisferait à l'équation différentielle

$$P^2 - L^2 = \frac{(x^2-1)P'^2}{n^2} \tag{6}$$

et serait un polynome trigonométrique; par conséquent on aurait

$$L = \frac{M}{n}.$$

C'est donc le polynome trigonométrique qui de tous les polynomes considérés s'écarte le moins possible de zéro, et le théorème se trouve ainsi démontré.

3. Corollaire. — *Si un polynome* $P_n(x)$ *de degré est* n *tel que dans l'intervalle* $(-h, +h)$, $|P'_n \sqrt{h^2-x^2}|$ *atteint la valeur* M, $P_n(x)$ *ne peut pas rester en valeur absolue inférieur à* $\frac{M}{n}$ *dans l'intervalle considéré.*

Pour le voir, il suffit de faire le changement de variables $x = hx_1$.

4. Corollaire. — *Si un polynome* $P_n(x)$ *de degré* n *reste inférieur à* L *en valeur absolue dans l'intervalle* $(-h, +h)$, $|P'_n \sqrt{h^2-x^2}|$ *reste inférieur à* nL *dans le même intervalle.*

5. Théorème (*). — *Si* $|P'_n|$ *atteint la valeur* M *dans l'intervalle* $(-1, +1)$, $|P_n|$ *ne peut rester inférieur à* $\frac{M}{n^2}$ *dans le même intervalle; cette valeur ne sera pas dépassée seulement dans le cas où* P_n *est un polynome trigonométrique.*

Nous pouvons reprendre la méthode précédente en faisant $\varphi(x) = 1$. Par conséquent, si P est celui des polynomes considérés qui s'écarte le moins possible de zéro, le nombre k des points $x_1, x_2, \ldots x_k$, où l'écart

(*) Ce théorème a été démontré par M. A. Markoff dans un article présenté à l'Académie Impériale de Saint-Pétersbourg, le 24 octobre 1889 : *Sur une question de Mendeleieff* (en russe).

maximum L est atteint, ne peut être inférieur à n. Examinons l'hypothèse de $k = n$. Les équations (3^{bis}) et (4) auxquelles devra satisfaire ξ se réduiront ici à

$$(1-x^2)\frac{dP'}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dP'}{dx}\cdot\frac{1-x^2}{x-\beta} + P'\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{x-\beta}\right) = 0.$$

Donc, ou bien

$$\xi^2 - 2\beta\xi + 1 = 0, \tag{7}$$

ou bien $\xi = \beta = \pm 1$; le second cas n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du premier, il est commode pourtant de le distinguer. Supposons d'abord que l'équation (7) étant satisfaite, on a $|\xi| < 1$; il en résultera que $|\beta| > 1$, et P satisfera de nouveau à l'équation (5^{bis}), qu'on pourra mettre sous la forme

$$\theta^2(L^2 - P^2) = P'^2 \cdot \frac{1-x^2}{n^2} \tag{5^{ter}}$$

avec $0 < \theta < 1$.

Posons ensuite $P = L\cos z$, $x = \cos t$; l'équation (5^{ter}) se réduit alors à

$$\theta^2 L^2 \sin^2 z = \frac{L^2\sin^2 z}{n^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

d'où

$$\left|\frac{dz}{dt}\right| = n\theta.$$

Et en prenant comme conditions initiales $z = 0$ pour $t = 0$, on a $|z| < nt$, ou bien $z = n\theta_1 t$ avec $|\theta_1| < 1$. L'équation devient donc

$$\theta^2 L^2 \sin^2 n\theta_1 t = \frac{P'^2 \sin^2 t}{n^2},$$

d'où

$$L^2 > \frac{M^2\sin^2 t}{n^2\sin^2 n\theta_1 t} > \frac{M^2}{n^4} \quad \text{et} \quad L > \frac{M}{n^2}\cdot$$

Soit maintenant $\xi = \beta = \pm 1$; adoptons, par exemple, le signe +

devant 1. On vérifie sans peine que l'équation différentielle de P est actuellement

$$L^2 - P^2 = \frac{P'^2(1+x)(\delta - x)}{n^2}, \qquad \text{où} \qquad \delta \geqq 1.$$

Et par conséquent

$$P = L \cos n \arccos \frac{2x+1-\delta}{1+\delta},$$

$$P' = \frac{nL}{\sqrt{(1+x)(\delta-x)}} \cdot \sin n \arccos \frac{2x+1-\delta}{1+\delta};$$

donc

$$L \geqq \frac{M}{n^2} \cdot \frac{1+\delta}{2}.$$

On voit finalement que L sera le plus petit possible, si $\delta = 1$, c'est-à-dire lorsque P est polynome trigonométrique; dans ce cas $L = \frac{M}{n^2}$, et le théorème est donc démontré.

Corollaire. — *Si un polynome* $P_n(x)$ *de degré* n *ne dépasse pas* L, *en valeur absolue, dans l'intervalle* (a, b), *on a dans le même intervalle*

$$|P'_n(x)| \leqq \frac{2n^2L}{b-a}, \quad |P''_n(x)| \leqq \left(\frac{2}{b-a}\right)^2 n^2(n-1)^2 L, \text{ etc.}$$

6. Théorème. — *De tous les polynomes de degré* n *qui en un point donné extérieur au segment* $(-1, +1)$ *prennent la valeur* M, *le polynome trigonométrique est celui qui s'écarte le moins de zéro sur ce segment.*

En effet, il résulte d'une remarque analogue à celle du commencement du paragraphe 2 que parmi les polynomes considérés il doit en exister un qui s'écarte le moins de zéro sur le segment $(-1, +1)$. De plus, ce polynome $P(x)$ doit évidemment être tel qu'il soit impossible de trouver un polynome $F_n(x)$ de degré n satisfaisant aux équations

$$(2^{\text{bis}}) \qquad F_n(x_1) = P(x_1), \ldots, F_n(x_k) = P(x_k), \qquad F_n(\xi) = 0,$$

où $x_1, x_2, \ldots x_k$ sont les points du segment $(-1, +1)$, où $P(x)$ atteint son écart maximum L, et ξ est le point donné (extérieur au segment), où

$P(\xi) = M$. Mais tous ces points étant distincts, les équations (2^{bis}) seront compatibles, si $k < n + 1$. Donc, $k \geqq n + 1$, et par conséquent $P(x)$ est un polynome trigonométrique.

7. Corollaire. — *Le plus grand module que peut avoir en un point ξ extérieur au segment $(-1, +1)$ un polynome de degré* n, *qui sur ce segment ne dépasse pas* L *en valeur absolue, est égal à*

$$(8) \qquad M = L \left| \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^n + (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^n}{2} \right|.$$

8. Corollaire. — *Le plus grand module que peut avoir en un point ξ extérieur au segment* $(-$ h, $+$ h$)$ *un polynome de degré* n *qui sur ce segment ne dépasse pas* L *en valeur absolue, est égal à*

$$(8^{bis}) \qquad M = L \left| \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - h^2})^n + (\xi - \sqrt{\xi^2 - h^2})^n}{2h^n} \right|.$$

9. Remarque. — Il est commode de transformer la formule (8) de la façon suivante : posons

$$\xi = \cos(a - bi) = \frac{1}{2}[(e^b + e^{-b})\cos a + i(e^b - e^{-b})\sin a],$$

a et b étant des nombres réels. Si b reçoit une valeur positive fixe, ξ est un point quelconque de l'ellipse ayant pour foyers les points $(-1, +1)$ et pour axes $e^b + e^{-b}$ et $e^b - e^{-b}$. D'autre part,

$$M = L\,|\cos n(a - bi)| = \frac{L}{2}\,|(e^{nb} + e^{-nb})\cos na + i(e^{nb} - e^{-nb})\sin na|$$
$$= \frac{L}{2}\sqrt{e^{2nb} + e^{-2nb} + 2\cos 2na}.$$

Donc, en un point quelconque de l'ellipse considérée, on a

$$\frac{L}{2}(e^{nb} - e^{-nb}) \leqq M \leqq \frac{L}{2}(e^{nb} + e^{-nb}) < Le^{nb}.$$

Ainsi, finalement

$$M < LR^n, \tag{9}$$

où $R = e^b$ *est la somme des demi-axes de l'ellipse passant par le point* ξ *et ayant pour foyers les points* $(-1, +1)$. Cette somme, qui est toujours supérieure à l'unité, en diffère aussi peu que l'on veut, si le point ξ est assez voisin du segment $(-1, +1)$.

On vérifiera de même que l'inégalité (9) subsiste, si le segment $(-1, +1)$ est remplacé par un segment quelconque de longueur $2h$; seulement R désignera alors le rapport de la somme des demi-axes de l'ellipse, passant par le point ξ et ayant pour foyers les extrémités du segment, à h.

Démontrons encore la proposition suivante :

10. Théorème. — *Si* $P_n(x)$ *est un polynome de degré* n *tel qu'il existe deux points* (x_0, y_0) *du segment* $(-1, +1)$ *pour lesquels*

$$E(x_0 y_0) = \frac{P_n(x_0) - P_n(y_0)}{(x_0 - y_0)^\alpha}(1 - x_0^2)^{\frac{\alpha}{2}}(1 - y_0^2)^{\frac{\alpha}{2}} = M,$$

α *étant inférieur à un, on ne peut pas avoir sur tout le segment*

$$|P_n(x)| < \frac{M}{n^\alpha 2^{1-\alpha}}.$$

En effet, on peut, comme précédemment, affirmer l'existence d'un polynome $P(x)$ qui de tous les polynomes considérés s'écarte le moins de zéro dans l'intervalle $(-1, +1)$. Ce polynome jouira de la propriété que les équations

$$F_n(x_1) = P(x_1), \ldots F_n(x_k) = P(x_k), \qquad F_n(x_0) - F_n(y_0) = 0$$

doivent être incompatibles, si $F_n(x)$ est un polynome de degré n. Cela exige que $k \geqq n$. D'ailleurs, si $k = n$, il faudra (en conservant les notations du § 2) que l'équation

$$Q(x_0) - Q(y_0) + B\big(R(x_0) - R(y_0)\big) = 0$$

ne puisse être satisfaite; il faudra donc que

$$R(x_0) - R(y_0) = 0,$$

et finalement

$$(10) \qquad \frac{P'(x_0) \cdot (x_0^2 - 1)}{x_0 - \beta} - \frac{P'(y_0) \cdot (y_0^2 - 1)}{y_0 - \beta} = 0.$$

Mais puisque, d'autre part, (x_0, y_0) réalisent le maximum de $E(x, y)$, on doit avoir aussi

$$(1 - x_0^2)\left[P'(x_0)(x_0 - y_0) - \alpha\left(P(x_0) - P(y_0)\right)\right] - \alpha x_0(x_0 - y_0)\left(P(x_0) - P(y_0)\right) = 0,$$
$$(1 - y_0^2)\left[P'(y_0)(y_0 - x_0) - \alpha\left(P(y_0) - P(x_0)\right)\right] - \alpha y_0(y_0 - x_0)\left(P(y_0) - P(x_0)\right) = 0,$$

ou

$$P'(x_0) \cdot (1 - x_0^2) = \alpha \cdot \frac{P(x_0) - P(y_0)}{x_0 - y_0} \cdot (1 - x_0 y_0)$$

et

$$P'(y_0) \cdot (1 - y_0^2) = \alpha \cdot \frac{P(x_0) - P(y_0)}{x_0 - y_0} \cdot (1 - x_0 y_0).$$

L'équation (10) se réduit par conséquent à l'équation

$$(1 - x_0 y_0) \cdot \frac{P(x_0) - P(y_0)}{x_0 - y_0} \cdot \left[\frac{1}{x_0 - \beta} - \frac{1}{y_0 - \beta}\right] = 0.$$

qui manifestement ne peut être satisfaite.

Il en résulte que $k = n + 1$, et le polynome P est encore un polynome trigonométrique.

Il nous reste donc à calculer le maximum de $E(x, y)$ pour le polynome trigonométrique $P = L \cos n \arccos x$.

Posons $x = \cos\theta$, $y = \cos\varphi$ $(0 < \theta < \pi,\ 0 < \varphi < \pi)$. Alors

$$E(x,y) = L \frac{\cos n\theta - \cos n\varphi}{(\cos\theta - \cos\varphi)^\alpha} \cdot (\sin\theta \cdot \sin\varphi)^\alpha,$$

ce qu'on peut écrire

$$E = L\left(\frac{\cos n\theta - \cos n\varphi}{\cos\theta - \cos\varphi}\right)^{\alpha}\cdot(\cos n\theta - \cos n\varphi)^{1-\alpha}.(\sin\theta\sin\varphi)^{\alpha}$$

$$\leqq \left(\frac{\sin\frac{n}{2}(\theta-\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)}\right)^{\alpha}\cdot(\cos n\theta - \cos n\varphi)^{1-\alpha}.L < 2^{1-\alpha}.n^{\alpha}.L.$$

Donc $M < L.\,2^{1-\alpha}.\,n$, L étant le module maximum de $P(x)$. D'où

$$L > \frac{M}{2^{1-\alpha}.n^{\alpha}} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarquons que si, au lieu de l'intervalle $(-1, +1)$, on considère l'intervalle $(-h, +h)$, on aura également

$$\frac{P_n(x) - P_n(y)}{(x-y)^{\alpha}}\cdot(h^2 - x^2)^{\frac{\alpha}{2}}(h^2 - y^2)^{\frac{\alpha}{2}} \leqq L.\,2^{1-\alpha}.(nh)^{\alpha},$$

L désignant toujours le module maximum de $P_n(x)$ sur le segment considéré.

11. Théorème. — *Si le polynome de degré* n, $P_n(x)$, *est tel que la fonction* $[P_n(x).\sqrt{1-x^2}]'.\sqrt{1-x^2}$ *atteint la valeur* M *sur le segment* $(-1, +1)$, $P_n(x).\sqrt{1-x^2}$ *ne peut pas rester constamment inférieur en valeur absolue à* $\frac{M}{n+1}$ *sur le segment considéré.*

On voit, comme précédemment, que le polynome $P(x)$ réalisant l'écart minimum doit exister et que le nombre k des points $x_1, x_2, \dots x_k$, où le maximum L de $|P(x).\sqrt{1-x^2}|$ est atteint, est au moins égal à n, car il doit être impossible de trouver un polynome F_n de degré n satisfaisant aux équations

$$F_n(x_1) = P(x_1), \dots F_n(x_k) = P(x_k), \qquad [F_n(\xi).\sqrt{1-\xi^2}]' = 0,$$

ξ étant un point où $T(x) = [P(x).\sqrt{1-x^2}]'.\sqrt{1-x^2}$ atteint son maximum. Si $k = n$, ces équations ne seront incompatibles que dans le cas où l'équation

$$(Q(\xi)\sqrt{1-\xi^2})' + B(R(\xi)\sqrt{1-\xi^2})' = 0$$

sera impossible, ce qui exige que ξ satisfasse à l'équation

$$[R(\xi).\sqrt{1-\xi^2}]' = 0. \tag{11}$$

Mais

$$R(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n) = C\left[P(x)\sqrt{1-x^2}\right]' \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-\beta} = C \cdot \frac{T(x)}{x-\beta}$$

et, d'autre part, ξ satisfait à l'équation

$$T'(x) = 0.$$

L'équation (11) se réduit donc à

$$\left[\frac{T(\xi).\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-\beta}\right]' = 0,$$

ou

$$T(\xi) \cdot \left[\frac{1-\xi^2}{(\xi-\beta)^2} + \frac{\xi}{\xi-\beta}\right] = 0,$$

ou

$$1 - \beta\xi = 0.$$

Par conséquent,

$$|\beta| > 1.$$

Or du moment que $S(x) = P(x).\sqrt{1-x^2}$ atteint n fois son module maximum L, le polynome de degré $2n+2$, $S^2 - L^2$ sera divisible par $\frac{S'^2.(1-x)^2}{(x-\beta)^2}$, et par conséquent S satisfera à l'équation différentielle

$$S^2 - L^2 = \frac{S'^2.(x^2-1)(x-\gamma)(x-\delta)}{(n+1)^2(x-\beta)^2},$$

et l'on vérifiera, comme au § 2, que $|\gamma| > |\beta|$, $|\delta| > |\beta|$. β, γ, δ sont tous de même signe. On conclut de là que

$$L > \frac{|S'.\sqrt{1-x^2}|}{n+1} \geqq \frac{M}{n+1}.$$

Si, d'autre part, on envisage le cas de $k = n + 1$, on trouve

$$S^2 - L^2 = \frac{S'^2 \cdot (x^2 - 1)}{(n+1)^2},$$

et par conséquent dans ce cas

$$S = L \sin (n+1) \arccos x,$$

d'où

$$L = \frac{M}{n+1}$$

Le théorème est donc démontré, et l'on voit en même temps que le polynome $P(x)$, qui réalise le minimum, est actuellement égal à

$$\frac{L \sin (n+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

12. Application des résultats précédents aux suites trigonométriques limitées. — Les théorèmes (2) et (11) se mettent sous une forme particulièrement simple, si on pose $x = \cos t$. En effet, un polynome quelconque $p_0 \cos^n t + \cdots + p_n$ de degré n est identique à une suite de cosinus de $(n+1)$ termes $A_0 + A_1 \cos t + \cdots + A_n \cos nt$, et réciproquement; de même, le produit $\sin t . [p_0 \cos^n t + \cdots + p_n]$ est identique à une suite de sinus de $(n+1)$ termes $B_1 \sin t + \cdots + B_{n+1} \sin (n+1) t$, et réciproquement. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, équivalente aux théorèmes mentionnés :

Si une suite trigonométrique limitée $A_0 + A_1 \cos t + \cdots + A_n \cos nt$, *ou* $B_1 \sin t + \cdots + B_n \sin nt$ *est inférieure en valeur absolue à* L, *sa dérivée reste inférieure en valeur absolue à* nL.

En remarquant que la différentiation conduit à une suite de même nature, on conclut immédiatement que :

Si une suite trigonométrique limitée $A_0 + A_1 \cos t + \cdots + A_n \cos nt$ *ou* $B_1 \sin t + \cdots + B_n \sin nt$ *reste inférieure en valeur absolue à un nombre* L, *sa dérivée d'ordre* p *reste inférieure en valeur absolue à* $n^p . L$.

Considérons maintenant une suite trigonométrique quelconque

$$S = A_0 + A_1 \cos t + B_1 \sin t + \cdots + A_n \cos nt + B_n \sin nt.$$

Soit L_1 le maximum du module de la suite des cosinus (avec la constante) et L_2 le maximum de la suite des sinus. Il est clair que le module maximum L de S sera au moins égal au plus grand de ces deux nombres, car le maximum L_1, par exemple, de la suite des cosinus est atteint pour les valeurs de $t = \pm t_1$, la suite des sinus étant alors égale à $\pm k$; donc l'une des deux valeurs correspondantes de S, $L_1 + k$ et $L_1 - k$ n'est pas inférieure à L_1. Mais, d'après ce qui précède,

$$|A_1 \sin t + \cdots + nA_n \sin nt| \leqq nL_1, \qquad |B_1 \cos t + \cdots + nB_n \cos nt| \leqq nL_2.$$

Donc

$$|-A_1 \sin t + B_1 \cos t + \cdots - nA_n \sin nt + nB_n \cos nt| \leqq n(L_1 + L_2) < 2nL$$

(le signe d'égalité ne pouvant avoir lieu partout en même temps).

Ainsi, S *étant une suite trigonométrique quelconque, si son module reste inférieur à* L, *le module de sa derivée reste inférieur à* 2nL.

13. Dérivées successives. — Il résulte du paragraphe précédent que, P_n étant un polynome de degré n dont le module ne dépasse pas L, lorsque $-1 \leqq x \leqq 1$, on a

$$\left| \frac{d^p P_n(x)}{(d \arcos x)^p} \right| \leqq n^p L.$$

Ainsi

$$|P'_n . \sqrt{1-x^2}| \leqq nL,$$
$$|P''_n(1-x^2) - xP'_n| \leqq n^2 L,$$
$$\sqrt{1-x^2}\,[P'''_n(1-x^2) - 2xP''_n - P'_n] \leqq n^3 L, \text{ etc.}$$

Mais nous n'aurons pas à faire usage de ces inégalités. Il nous suffira, pour les applications qui vont suivre, d'en établir d'autres moins précises mais plus simples.

On a d'abord

$$|P'_n(x)| \leqq \frac{nL}{\sqrt{1-x^2}},$$

et puisque P'_n est un polynome de degré $(n-1)$, on a en vertu du corollaire (4)

$$|P''_n(x)| < \frac{n-1}{\sqrt{x_1^2 - x^2}} \cdot \frac{nL}{\sqrt{1-x_1^2}},$$

et en posant

$$1 - x_1^2 = x_1^2 - x^2 = \frac{1-x^2}{2},$$

on a

$$|P''_n(x)| < \frac{2n(n-1)L}{1-x^2}.$$

De même

$$|P'''_n(x)| < \frac{n-2}{\sqrt{x_2^2 - x^2}} \cdot \frac{(n-1).n.L}{\sqrt{(x_1^2-x_2^2)(1-x_1^2)}},$$

et en posant

$$1 - x_1^2 = x_1^2 - x_2^2 = x_2^2 - x^2 = \frac{1-x^2}{3},$$

on a

$$|P'''_n(x)| < \frac{3^{\frac{3}{2}}.n(n-1)(n-2).L}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

et, d'une façon générale,

$$|P_n^{(p)}(x)| < \frac{n(n-1)\dots(n-p+1).L}{\sqrt{(1-x_1^2)(x_1^2-x_2^2)\dots(x_{p-1}^2-x^2)}},$$

ou en posant

$$1 - x_1^2 = x_1^2 - x_2^2 = \dots = x_{p-1}^2 - x^2 = \frac{1-x^2}{p},$$

on a

$$(12) \qquad |P_n^{(p)}(x)| < \frac{p^{\frac{p}{2}}.n(n-1)\dots(n-p+1).L}{(1-x^2)^{\frac{p}{2}}}.$$

En appliquant le théorème (10), on a également

$$(12^{\text{bis}}) \qquad \left|\frac{P_n^{(p)}(z) - P_n^{(p)}(z_1)}{(z-z_1)^\alpha}\right| < \frac{(p+2)^{\frac{p}{2}+1}.n(n-1)\dots(n-p+1).(n-p)^\alpha.L}{(1-x^2)^{\frac{p}{2}+\alpha}},$$

si

$$|z| \leqq |x|, \qquad |z_1| \leqq |x|.$$

CHAPITRE II.

Première méthode pour la détermination d'une limite inférieure de la meilleure approximation.

14. Théorème. — *Soit*

$$f(x) = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n + \cdots \tag{13}$$

une série dans laquelle u_n *est un polynome quelconque de degré* n *(pouvant être nul identiquement). Si cette série converge sur le segment* $(-1, +1)$ *et de plus*

$$|\rho_n| = |u_n + u_{n+1} + \cdots| < \frac{A}{n^p},$$

A *étant une constante,* $f(x)$ *admet une dérivée d'ordre* k, *où* k *est le nombre entier immédiatement inférieur à* p, *finie et satisfaisant à une condition de Lipschitz de degré* ε, *quel que soit* $\varepsilon < p - k$, *sur tout segment intérieur à* $(-1, +1)$.

En effet, posons

$$v_m = u_{2^m} + u_{2^m+1} + \cdots + u_{2^{m+1}-1}.$$

On aura manifestement

$$|v_m| < \frac{A}{2^{mp}} + \frac{A}{2^{(m+1)p}} < \frac{2^{p+1}A}{2^{(m+1)p}}.$$

Le groupement de termes indiqué transformera donc la série (13) en une série absolument convergente

$$f(x) = u_0 + v_0 + v_1 + \cdots + v_m + \cdots,$$

et de plus, quel que soit $p_1 < p$, la série

$$2^{p_1} v_0 + 2^{2p_1} v_1 + \cdots + 2^{(m+1)p_1} v_m + \cdots$$

sera également absolument convergente, puisque le reste

$$\Upsilon_m = |2^{(m+1)p_1} v_m| + \cdots$$

est en valeur absolue inférieur à

$$2^{p+1}A\left[2^{(m+1)(p_1-p)}+2^{(m+2)(p_1-p)}+\cdots\right]=\frac{2^{p+1}\,.\,A}{(2^{p-p_1}-1)\,.\,2^{m(p-p_1)}}.$$

Mais en appliquant l'inégalité (12), on a

$$(1-x^2)^{\frac{k}{2}}\,|\,f^{(k)}(x)\,|<(1-x^2)^{\frac{k}{2}}\left[\,|\,\upsilon_0^{(k)}\,|+|\,\upsilon_1^{(k)}\,|+\cdots+|\,\upsilon_m^{(k)}\,|+\cdots\right]$$
$$<k^{\frac{k}{2}}\left[2^k\ \text{Max.}\,|\,\upsilon_0\,|+\cdots+2^{(m+1)k}\ \text{Max.}\,|\,\upsilon_m\,|+\cdots\right]<\frac{2^{p+1}\,.\,A}{2^{p-k}-1}\cdot k^{\frac{k}{2}}.$$

De même, en appliquant l'inégalité (12^{bis}), on aura

$$(1-x^2)^{\frac{k}{2}+\varepsilon}\left|\frac{f^{(k)}(z)-f^{(k)}(z_1)}{(z-z_1)}\right|<(1-x^2)^{\frac{k}{2}+\varepsilon}\left[\left|\frac{\upsilon_0^{(k)}(z)-\upsilon_0^{(k)}(z_1)}{(z-z_1)^{\varepsilon}}\right|+\cdots+\left|\frac{\upsilon_m^{(k)}(z)-\upsilon_m^{(k)}(z_1)}{(z-z_1)^{\varepsilon}}\right|+\cdots\right]$$
$$<(k+2)^{\frac{k}{2}+1}\left[2^{k+\varepsilon}\,\text{Max.}\,|\,\upsilon_0\,|+\cdots+2^{(m+1)(k+\varepsilon)}\,\text{Max.}\,|\,\upsilon_m\,|+\cdots\right]<\frac{2^{p+1}A}{2^{p-k-d}-1}\cdot(k+2)^{\frac{k}{2}+1}$$

avec

$$|\,z\,|\leqq x,\qquad |\,z_1\,|\leqq x.\qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que les dérivées dont nous démontrons l'existence s'obtiennent simplement par différentiation terme à terme de la série donnée, puisque le reste γ_m tendra tout aussi bien vers zéro, si dans son premier terme on remplace υ_m par $u_{2^m+k}+u_{2^m+k+1}+\cdots+u_{2^{m+1}-1}$ qui est également inférieur en valeur absolue à $\frac{2^{p+1}A}{2^{(m+1)p}}$.

15. Théorème. — *Si (en conservant les notations précédentes) on a* $|\,\rho_n\,|=|\,u_n+\cdots\,|<\frac{A_n}{n^p}$, *où* A_n *tend vers* 0 *avec* $\frac{1}{n}$, *si de plus la série* $S=A_1+A_2+A_4+\cdots+A_{2^m}+\cdots$ *converge, la fonction* $f(x)$ *admettra une dérivée finie et continue d'ordre* k *satisfaisant à une condition de Lipschitz de degré* ε *sur un segment quelconque intérieur à* $(-1,+1)$, *si* $p=k+\varepsilon$, k *étant un entier et* $0\leqq\varepsilon<1$.

Examinons, pour fixer les idées, le cas de p entier ($\varepsilon=0$), le second cas se traitant d'une façon identique. Écrivons, comme plus haut,

$$f(x)=u_0+\upsilon_0+\upsilon_1+\cdots+\upsilon_m+\cdots,$$

actuellement on a

$$|\,\upsilon_m\,|<\frac{A_{2^m}}{2^{mp}}+\frac{A_{2^{m+1}}}{2^{(m+1)p}};$$

donc

$$(1-x^2)^{\frac{p}{2}}\,|f^{(p)}(x)| < p^{\frac{p}{2}}[(2^p.A_1+A_2)+(2^p.A_2+A_4)+\cdots+(2^pA_{2^m}+A_{2^{m+1}})+\cdots]$$
$$< p^{\frac{p}{2}}.(2^p+1).S. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On vérifiera également, en appliquant le théorème (5), que les dérivées d'ordre inférieur ou égal à $\frac{p}{2}$ restent finies même aux extrémités du segment $(-1, +1)$.

16. Remarque. — Si la série (13) était telle que, en l'arrêtant à un terme quelconque, on obtienne un polynome d'approximation de $f(x)$, on aurait évidemment Max. $|\rho_n| \leqq$ Max. $|\rho_{n-1}|$. Mais même lorsque la série est quelconque, on pourra réaliser cette inégalité en groupant convenablement les termes de la série.

Or, il est facile de voir que *si les nombres* A_n *sont tels que*

$$\frac{A_{n+1}}{(n+1)^p} \leqq \frac{A_n}{n^p},$$

p *étant un nombre fixe, les séries*

$$S = A_1 + A_2 + A_4 + \cdots + A_{2^m} + \cdots$$

et

$$\Sigma = A_1 + \frac{A_2}{2} + \frac{A_3}{3} + \cdots + \frac{A_n}{n} + \cdots$$

sont en même temps convergentes et en même temps divergentes.

En effet, soit $p \geqq 1$ (si l'inégalité indiquée plus haut a lieu pour un certain nombre p_0, elle a lieu *a fortiori* pour toute valeur de $p > p_0$).

On a, d'une part,

$$I_n = \frac{A_n}{n} + \frac{A_{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{A_{2n-1}}{2n-1} = \frac{A_n}{n^p}\cdot n^{p-1} + \frac{A_{n+1}}{(n+1)^p}\cdot(n+1)^{p-1} + \cdots$$
$$+\frac{A_{2n-1}}{(2n-1)^p}.(2n-1)^{p-1} = n^{p-1}\left[\frac{A_n}{n^p} + \frac{A_{n+1}}{(n+1)^p}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{p-1} + \cdots + \frac{A_{2n-1}}{(2n-1)^p}\cdot\left(\frac{2n-1}{n}\right)^{p-1}\right]$$
$$< n^{p-1}.n\left(\frac{A_n}{n^p}\right)\cdot\left(\frac{2n-1}{n}\right)^{p-1} < A_n.2^{p-1};$$

et, d'autre part,

$$\mathrm{I}_n = n^{p-1}\left[\frac{\mathrm{A}_n}{n^p} + \frac{\mathrm{A}_{n+1}}{(n+1)^p}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{p-1} + \cdots + \frac{\mathrm{A}_{2n-1}}{(2n-1)^p}\cdot\left(\frac{2n-1}{n}\right)^{p-1}\right] >$$

$$> n^p \cdot \frac{\mathrm{A}_{2n-1}}{(2n-1)^p} \geqq n^p \cdot \frac{\mathrm{A}_{2n}}{(2n)^p} = \frac{\mathrm{A}_{2n}}{2^p}.$$

Donc

$$\frac{\mathrm{A}_{2n}}{2^p} < \frac{\mathrm{A}_n}{n} + \frac{\mathrm{A}_{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{\mathrm{A}_{2n-1}}{2n-1} < \mathrm{A}_n \,.\, 2^{p-1}.$$

D'où

$$\frac{\mathrm{S}}{2^p} - \mathrm{A}_1 < \Sigma < 2^{p-1}\mathrm{S}.$$

On peut par conséquent remplacer dans l'énoncé du théorème (15) *la série* S *par la série* Σ, *pourvu que* Max. $|\rho_n| \leqq |$ Max. $|\rho_{n-1}|$.

D'autre part, en appliquant à cette série les conditions suffisantes de convergence de Bertrand, on obtient les inégalités

$$\mathrm{A}_n < \frac{1}{(\log n)^{1+\varepsilon}}, \quad \mathrm{A}_n < \frac{1}{\log n \,.\, (\log\log n)^{1+\varepsilon}}, \text{ etc.,}$$

comme conditions suffisantes pour que les conclusions du théorème (15) *soit exactes.*

17. Théorème. — *Soit*

$$f(x) = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots,$$

où u_n *sont des polynomes de degré* n. *Si sur le segment* $(-1, +1)$ *on a*

$$|\rho_n| = |u_n + \cdots| < \frac{\mathrm{A}_n}{n^p},$$

et qu'il existe un nombre positif α, *tel que*

$$\frac{\mathrm{A}_{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leqq \frac{\mathrm{A}_n}{n^\alpha},$$

on aura, pour $p_1 \leqq p - 2\alpha$,

$$f^{(p_1)}(x) = w_{p_1} + w_{p_1+1} + \cdots + w_n + \cdots,$$

où $w_n = \frac{d^{p_1} u_n}{dx^{p_1}}$ *sont des polynomes de degré* $n - p_1$ (*), *et*

$$|\rho_n^{(p_1)}| = |w_n + w_{n+1} + \cdots| < \frac{p_1^{\frac{p_1}{2}} \cdot 2^{p+1} A_n}{(2^\alpha - 1) n^{p-p_1} \cdot (1-x^2)^{\frac{p_1}{2}}}.$$

En effet, on a, comme précédemment,

$$f^{(p_1)}(x) = \upsilon_0^{(p_1)} + \upsilon_1^{(p_1)} + \cdots + \upsilon_m^{(p_1)} + \cdots,$$

et

$$(1-x^2)^{\frac{p_1}{2}}[|\upsilon_m^{(p_1)}| + |\upsilon_{m+1}^{(p_1)}| + \cdots] < p_1^{\frac{p_1}{2}} \cdot 2^{p+1}\left[A_{2^m} \cdot 2^{(m+1)(p_1-p)} + A_{2^{m+1}} \cdot 2^{(m+2)(p_1-p)} + \cdots\right]$$

$$\leqq p_1^{\frac{p_1}{2}} \cdot 2^{p+1} A_{2^m} \cdot 2^{(m+1)(p_1-p)} \cdot [1 + 2^{p_1-p+\alpha} + 2^{2(p_1-p+\alpha)} + \cdots]$$

$$\leqq \frac{p_1^{\frac{p_1}{2}} \cdot 2^{p+\alpha+1} \cdot A_{2^m}}{(2^\alpha - 1) \cdot 2^{(m+1)(p-p_1)}} < \frac{p_1^{\frac{p_1}{2}} \cdot 2^{p+1} A_n}{(2^\alpha - 1) \cdot n^{p-p_1}}.$$

Donc, en différentiant p_1 fois la série donnée, on trouve

$$f^{(p_1)}(x) = w_{p_1} + w_{p_1+1} + \cdots + w_n + \cdots,$$

où w_n est un polynome de degré $n - p_1$, et l'on voit que

$$|\rho_n^{(p_1)}| = |w_n + w_{n+1} + \cdots|$$

satisfait bien à l'inégalité annoncée, lorsque $n = 2^m$.

Mais rien n'empêche de poser

$$\upsilon_0 = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1}, \qquad \upsilon_1 = u_{2n} + u_{2n+1} + \cdots + u_{4n-1}$$

(*) On a évidemment une inégalité analogue pour le rapport

$$\left|\frac{f^k(x) - f^k(y)}{(x-y)^\varepsilon}\right|, \quad \text{où} \quad k \pm \varepsilon = p_1 \leqq p - 2^\alpha.$$

et ainsi de suite, en prenant n arbitrairement; et dans ces conditions on aura pareillement

$$|\rho_n^{(p_1)}| = |w_n + w_{n+1} + \cdots| = |v_0^{(p_1)} + v_1^{(p_1)} + \cdots| < \frac{p_1^{\frac{p_1}{2}} \cdot 2^{p+1} A_n}{(2^{\alpha}-1) \cdot n^{p-p_1} \cdot (1-x^2)^{\frac{p_1}{2}}}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — On vérifiera également, comme conséquence du théorème (5), que pour $p_1 \leqq \frac{p}{2} - 2\alpha$ on a

$$|w_n + w_{n+1} + \cdots| < \frac{A_n}{n^{p-2p_1}} \cdot \frac{2^{2p+1}}{2^{\alpha}-1}.$$

Exemples : 1° Ainsi, si $A_n = A$ est constant, *la meilleure approximation de* $f'(x)$ *par un polynome de degré* $(n-2)$ *dans l'intervalle* $(-h, +h)$ *satisfera à l'inégalité*

$$|\rho_n'| < \frac{A \cdot 2^{p+1}}{n^{p-1} \cdot (2^{\frac{p-1}{2}} - 1) \cdot \sqrt{1-h^2}},$$

quel que soit n, *si on sait que la meilleure approximation* ρ_n *de* $f(x)$ *par un polynome de degré* $(n-1)$ *est dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *inférieure à* $\frac{A}{n^p}$, *quel que soit* n.

2° Soit encore $A = \log n$. Si on a $|\rho_n| < \frac{\log n}{n^p}$ dans l'intervalle $(-1, +1)$, on aura aussi dans l'intervalle $(-h, +h)$

$$|\rho_n'| < \frac{2^{p+1} \log n}{n^{p-1} (2^{\frac{p-1}{2}} - 1) \cdot \sqrt{1-h^2}}.$$

18. Application aux suites trigonométriques. — Il est évident qu'on aura des propositions analogues aux précédentes, si on suppose que u_n, au lieu d'être un polynome, est de la forme

$$u_n = A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + \cdots + A_n \cos nx + B_n \sin nx.$$

Il suffira, pour indiquer les petites modifications à introduire dans les énoncés précédents, d'énoncer la proposition suivante correspondante au théorème (15).

Si $|u_n + u_{n+1} + \cdots| < \frac{A_n}{n^p}$, p *étant un nombre entier, et que la série* $S = A_1 + A_2 + A_4 + \cdots + A_{2m} + \cdots$ *converge,* $f^{(p)}(x)$ *sera finie et continue : on aura en général* $|f^{(p)}(x)| < 2^p(2^p+1)S$ *et* $|f^{(p)}(x)| \leqq (2^p+1)S$ *dans tous les cas où tous les* u_n *ne contiennent que des cosinus ou seulement des sinus.*

19. Première remarque générale. — Il est naturel de se demander si la convergence de la série S, dans les énoncés (15) et (18), est une condition essentielle pour qu'on puisse affirmer que la dérivée d'ordre p est finie et continue; ne suffirait-il pas, par exemple, que les nombres A_n tendent vers 0? On peut, en effet, remarquer que la série trigonométrique $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \cos nx$, où a_n tend vers zéro en décroissant constamment, admet une dérivée continue; or, le reste de $f(x)$ est égal à $\frac{b_n}{n}$, où b_n tend vers 0 en décroissant d'une façon quelconque, et par conséquent la meilleure approximation de $f(x)$ (comme nous le verrons dans la troisième partie) ne sera pas inférieure à $\frac{kb_n}{n \log n}$, k étant une constante. Il existe donc des fonctions $f(x)$ ayant des dérivées continues et pour lesquelles ce fait ne saurait jamais être mis en évidence par le théorème (18). Mais ceci n'est pas un défaut du théorème, c'est une conséquence de ce qu'*il existe des cas limites (et il est remarquable qu'ils sont exceptionnels) où il est impossible de conclure de l'ordre général de la meilleure approximation l'existence ou la non-existence de la dérivée.*

En effet, nous allons voir que $A_1, A_2, \cdots A_n, \cdots$ *étant une suite de nombres positifs quelconques tels que* $\frac{A_n}{n^p} \geqq \frac{A_{n+1}}{(n+1)^p}$, *et que la série* $S = A_1 + A_2 + A_4 + \cdots + A_{2m} + \cdots$ *diverge et par conséquent la série* Σ *est aussi divergente, il est possible de construire une fonction*

$$f(x) = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots,$$

pour laquelle

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots| < \frac{A_n}{n^p},$$

et qui ne possède pas de dérivée d'ordre p *finie et continue à l'intérieur du segment.*

Supposons, pour fixer les idées, $p = 1$. Il est clair d'abord que s'il existe un nombre n_0 tel que pour $n > n_0$ on a $A_n > 1$, la meilleure approximation $E_{n-1}\left|\frac{x}{n_0}\right|$ de $\left|\frac{x}{n_0}\right|$ par des polynomes de degré $n-1$ sera sur le segment $(-1, +1)$ inférieure à $\frac{1}{n_0(n-1)}$ (d'après le § 37) et, par conséquent, la fonction $\left|\frac{x}{n_0}\right|$ peut servir d'exemple d'une fonction ayant une dérivée discontinue dans le cas où la divergence de la série S résulte du fait que ses termes à partir d'un certain rang sont tous supérieurs à 1. Admettons, au contraire, qu'il existe une infinité de nombres A_{4m+1} inférieurs ou égaux à 1. Dans ces conditions, nous allons former la fonction

$$f(x) = \frac{1}{5}\sum_{m=1}^{m=\infty}\left[\frac{A_{4m+1}}{(4m-3)} - \frac{A_{4m+5}}{(4m+1)}\right]\cos(4m+1)x = \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n(x),$$

où $u_n(x) = 0$, lorsque $(n-1)$ n'est pas divisible par 4.

Par conséquent, le reste de cette série trigonométrique à coefficients non négatifs satisfait, quel que soit n_1, à l'inégalité

$$|\, u_{n_1}(x) + u_{n_1+1}(x) + \cdots \,| \leqq \frac{A_{4m+1}}{(4m-1)} \leqq \frac{A_{n_1}}{n_1},$$

où $4m - 3 < n_1 \leqq 4m + 1$.

Or il est facile de voir que si, comme nous supposons, la série

$$\Sigma = A_1 + \frac{A_2}{2} + \cdots + \frac{A_n}{n} + \cdots$$

diverge, le point $x = \frac{\pi}{2}$ ne peut être un point de continuité pour $f'(x)$.

En effet, en différentiant terme à terme, nous obtenons

$$f'(x) = \frac{1}{5}\sum_{m=1}^{m=\infty}\left[A_{4m+5} - A_{4m+1}\left(1 + \frac{4}{4m-3}\right)\right]\sin(4m+1)x;$$

et si au point $x = \frac{\pi}{2}$ la fonction $f'(x)$ était continue, on trouverait sa valeur en appliquant le procédé de M. Fejer. Or, toutes les sommes partielles

$$\frac{1}{5}\sum_{m=1}^{m}\left[A_{4m+5} - A_{4m+1}\left(1 + \frac{4}{4m-3}\right)\right]$$

étant composées de termes de même signe vont en croissant en valeur absolue avec m; et, en attribuant à m des valeurs telles que $A_{4m+5} \geqq 1$, on voit que ces sommes

$$\frac{1}{5}\sum_{m=1}^{m}\left[A_{4m+5} - A_{4m+1}\left(1 + \frac{4}{4m-3}\right)\right] = \frac{1}{5}\left(A_{4m+5} - A_5\right) - \frac{4}{5}\sum_{m=1}^{m}\frac{A_{4m+1}}{4m-3}$$

croissent indéfiniment en restant toujours négatives.

On en conclut que pour $x = \frac{\pi}{2}$ le procédé de sommation de M. Fejer donnerait, s'il était applicable, $f'(x) = -\infty$; $f'(x)$ est donc discontinue pour $x = \frac{\pi}{2}$.

En posant $z = \cos x$, on transforme la série $f(x)$ en une série de polynomes qui également n'aura pas de dérivée continue du premier ordre pour $z = 0$. Ainsi du fait qu'une fonction comme $|x|$, par exemple, n'admet pas de dérivée partout continue *à l'intérieur* d'un intervalle, on doit conclure que, quels que soient les polynomes $P_n(x)$ de degré n, les inégalités

$$|\,|x| - P_{n-1}(x)\,| < \frac{A_n}{n}$$

ne sont possibles qu'à condition que les séries

$$S = A_1 + A_2 + \cdots + A_{2^m} + \cdots \qquad \text{et} \qquad \sum = A_1 + \frac{A_2}{2} + \cdots + \frac{A_n}{n} + \cdots$$

divergent; on devra donc avoir pour une infinité de valeurs de n

$$A_n > \frac{1}{(\log n)^{1+\varepsilon}}, \qquad A_n > \frac{1}{\log n \,.\, (\log\log n)^{1+\varepsilon}}, \text{ etc.}$$

Au contraire, du seul fait que la dérivée de $|x|$ est discontinue, on ne peut conclure qu'il y a une infinité de valeurs de n telles que

$$A_n > \frac{1}{\log n}, \qquad A_n > \frac{1}{\log n \,.\, \log\log n}, \text{ etc.,}$$

car il existe effectivement, d'après ce qui précède, des fonctions sans dérivées continues pour lesquelles on a, quel que soit n,

$$A_n < \frac{1}{\log n} \qquad \text{ou} \qquad A_n < \frac{1}{\log n \log\log n}, \text{ etc.}$$

20. SECONDE REMARQUE GÉNÉRALE. — Dans les propositions précédentes on fait intervenir l'approximation de $f(x)$ par des polynomes de degré n' *quelconque* pour en conclure l'existence des dérivées. Il est facile de se rendre compte que cela est également essentiel; nous pourrons, en effet, construire des fonctions qui, pour une infinité de valeurs de n, satisfont à l'inégalité

$$(15) \qquad | f(x) - P_{n-1}(x) | < \frac{1}{n^p},$$

quel que soit p, et pourtant n'admettent pas de dérivées. Soit, par exemple, la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{\cos 2^{m!} x}{2^{m!}}.$$

On voit que si $n = 2^{m!} \geq 2^{p!}$, on a

$$\left| f(x) - \frac{1}{2}\sum_1^m \frac{\cos 2^{m!} x}{2^{m!}} \right| \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{(m+1)!}} + \frac{1}{2^{(m+2)!}} + \cdots\right] < \frac{1}{2^{(m+1)!}} < \frac{1}{2^{m!p}} = \frac{1}{n^p}.$$

Pourtant, comme on le vérifie immédiatement, cette fonction ne possède de dérivée pour aucune valeur de x.

Il est naturel cependant de se demander quelles sont les conséquences qu'on peut tirer du fait qu'il y a une infinité de valeurs de n pour lesquelles l'inégalité (15) est remplie. Sans entreprendre cette étude, je me bornerai de donner une proposition qui peut lui servir de base.

21. THÉORÈME. — *Si, quel que soit* N, *il existe au moins un nombre* $n > N$, *tel que*

$$(15^{\text{bis}}) \qquad | f(x) - P_n(x) | < \frac{1}{n^p},$$

dans l'intervalle $(-1, +1)$ *il existera, quel que soit* h_1, *des nombres* $h < h_1$, *tels que dans tout intervalle* (AB) *intérieur à* $(-1, +1)$ *on aura*

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h^{p_1}}\right| < k_1, \qquad \left|\dfrac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^{p_2}}\right| < k_2, \\ \qquad \left|\dfrac{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)}{h^{p_3}}\right| < k_3, \text{ etc.,} \end{array}\right.$$

où $k_1, k_2, k_3 \dots$ *sont des constantes (dépendant de l'intervalle* AB*), et*

$$p_1 = \frac{p}{1+p}, \quad p_2 = \frac{2p}{2+p}, \quad p_3 = \frac{3p}{3+p}, \text{ etc.}$$

Soit $|f| < M$ dans l'intervalle $(-1, +1)$. On peut faire correspondre à toute fonction $f(x)$ une fonction bien déterminée $\delta(\varepsilon)$, où $\delta(\varepsilon)$ désigne le maximum de l'oscillation de la fonction $f(x)$, lorsque x se trouve dans un intervalle inférieur ou égal à ε situé entièrement dans (AB). La fonction $\delta(\varepsilon)$ est toujours non négative et non décroissante; si $f(x)$ est continue, $\delta(\varepsilon)$ est également continue et tend vers 0 avec ε. La condition de Lipschitz de degré p_1 signifie que $\delta(\varepsilon) < k_1 \varepsilon^{p_1}$, k_1 étant un nombre fixe, la première des propriétés que nous voulons établir exprime seulement que cette inégalité a lieu pour une infinité de valeurs de ε aussi petites que l'on veut (sans être nécessairement exacte en général).

Ceci posé, soit $\alpha(n)$ le maximum de $|f(x) - P_n(x)|$ que nous pouvons supposer inférieur à M; alors $|P_n| < 2M$, et puisque $P_n(x)$ est un polynome de degré n,

$$|P'_n| < kMn,$$

où k est une constante qui ne dépend que de l'intervalle (AB). Par conséquent, l'oscillation de $P_n(x)$ dans un intervalle inférieur ou égal à ε est inférieure à $kMn\varepsilon$. Si donc on considère deux valeurs x_1 et x_2 de x, telles que

$$|x_1 - x_2| \leqq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |f(x_1) - f(x_2)| = \delta(\varepsilon),$$

on aura également

$$|P_n(x_1) - P_n(x_2)| < kMn\varepsilon;$$

d'où

$$|f(x_1) - f(x_2) - P_n(x_1) + P_n(x_2)| > \delta(\varepsilon) - kMn\varepsilon.$$

Or

$$|f(x_1) - P_n(x_1)| \leqq \alpha(n), \qquad |f(x_2) - P_n(x_2)| \leqq \alpha(n).$$

Donc

$$2\alpha(n) > \delta(\varepsilon) - kMn\varepsilon$$

et finalement

$$\delta(\varepsilon) < 2\alpha(n) + kMn\varepsilon. \tag{16}$$

Attribuons à présent à n une valeur pour laquelle l'inégalité (15^{bis}) est satisfaite, c'est-à-dire $\alpha(n) < \frac{1}{n^p}$, et posons en même temps $\varepsilon = \frac{1}{n^{1+p}}$. L'inégalité (16) donne alors

$$\delta\left(\frac{1}{n^{1+p}}\right) < \frac{2}{n^p} + \frac{kM}{n^p} = \frac{kM+2}{n^p} = \frac{k_1}{n^p},$$

ou

$$\delta(\varepsilon) < k_1 \varepsilon^{p_1},$$

avec $p_1 = \frac{p}{1+p}$, ce qui démontre la première des inégalités voulues.

Posons ensuite

$$\delta_1(\varepsilon) = \text{Max.}\ | f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) |$$

dans l'intervalle (AB) et pour $| h | \leqq \varepsilon$.

On aura également

$$| P_n(x+2h) - 2P_n(x+h) + P_n(x) | < kMn^2\varepsilon^2,$$

k étant une constante. D'où

$$| f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) - P_n(x+2h) + 2P_n(x+h) - P_n(x) | > \delta_1(\varepsilon) - kMn^2\varepsilon^2$$

pour des valeurs convenables de x et h. Donc

$$4\alpha(n) > \delta_1(\varepsilon) - kMn^2\varepsilon^2$$

ou finalement

$$(16^{\text{bis}}) \qquad \delta_1(\varepsilon) < 4\alpha(n) + kMn^2\varepsilon^2.$$

Attribuons de nouveau à n une valeur pour laquelle $\alpha(n) < \frac{1}{n^p}$ et posons cette fois $\varepsilon = \frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}}$. L'inégalité ($16^{\text{bis}}$) donne alors

$$\delta_1(\varepsilon) < \frac{4}{n^p} + \frac{kMn^2}{n^{2+p}} = \frac{kM+4}{n^p} = \frac{k^2}{n^p}$$

et, enfin,

$$\delta_1(\varepsilon) < k_2 \varepsilon^{p_2},$$

où $p_2 = \frac{2p}{2+p}$, ce qui démontre la seconde des inégalités de l'énoncé. On voit bien que le même raisonnement conduit aux inégalités successives.

22. Applications. — Appliquons le théorème qui précède à la fonction $|x|$. On voit immédiatement que pour cette fonction

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon, \quad \delta_1(\varepsilon) = 2\varepsilon, \quad \delta_2(\varepsilon) = 2\varepsilon, \text{ etc.}$$

Il n'existe donc pas de valeurs de ε pour lesquelles l'ordre infinitésimal de $\delta_i(\varepsilon)$ soit supérieur à un. Il en résulte donc qu'*à partir d'une valeur de* n *des inégalités*

$$\big|\, |x| - P_n(x) \,\big| < \frac{1}{n^p}$$

sont impossibles, si p > 1; car, quel que soit $p > 1$, il serait possible de trouver un nombre entier i tel que $\frac{ip}{i+p} > 1$, ce qui ne saurait avoir lieu en vertu de ce qui précède.

Appliquons encore l'inégalité (16) pour donner une démonstration très simple du théorème suivant dû à M. Lebesgue (*) : Si l'on considère la famille (C) des fonctions continues dont le module reste inférieur à M dans l'intervalle $(-1, +1)$, la limite supérieure (ou le maximum) de leur meilleure approximation par des polynomes de degré n aussi grand qu'on veut est égale à M.

En effet, quelque petit que soit ε, il y en aura parmi les fonctions (C) de telles, pour lesquelles $\delta(\varepsilon) = 2M$ dans (AB) intérieur à $(-1, +1)$; or, n étant donné, on pourra faire $kMn\varepsilon = 2\eta$ aussi petit que l'on veut. L'inégalité (16) montre alors que

$$\alpha(n) > M - \eta.$$

C. Q. F. D.

Le théorème de M. Lebesgue ne répond pas cependant à la question suivante : N'est-il pas possible de construire une suite S non croissante de nombres $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n, \ldots$ tendant vers 0, telle que pour chaque fonction *déterminée* de la famille (C) on puisse trouver un nombre R assez grand, de la sorte que l'approximation $|f(x) - P_n(x)|$ reste inférieure à $R\alpha_n$? Du

(*) *Sur les intégrales singulières*, Annales de Toulouse, t. I, 1909, p. 110.

théorème de M. Lebesgue il résulte seulement que la limite supérieure de R pour toutes les fonctions de la famille est infinie. Mais il est clair que ce théorème subsisterait si on remplaçait la famille (C) par la famille (C_1) de tous les polynomes de module inférieur à M, et pourtant il est également évident que pour un polynome donné on pourra prendre R égal au plus grand des nombres $\frac{M}{\alpha_{n_1}}$ correspondant aux valeurs n_1 inférieures au degré n du polynome donné. Il est donc essentiel de compléter le théorème précédent par cette remarque que, *quelle que soit la suite* S, *il existe des fonctions de la famille* (C) *pour lesquelles il est impossible de trouver un nombre* R *si grand qu'il soit, tel qu'on ait, pour toute valeur de* n, $|f(x) - P_n(x)| < R\alpha_n$.

Cela résulte également de l'inégalité (16), car du fait que $|f - P_n| < R\alpha_n$, on conclut que l'oscillation $\delta(\varepsilon)$ de cette fonction satisfait à l'inégalité

$$\delta(\varepsilon) < R\alpha_n + Mkn\varepsilon,$$

ou, en posant $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$ et en admettant que $R\alpha_n > \frac{Mk}{n}$, à l'inégalité, $\delta(\varepsilon) < 2R\alpha_n$. Mais il est évident que toutes les fonctions de la famille (C) ne peuvent satisfaire à une telle inégalité.

Avant d'abandonner cet ordre d'idées, remarquons, en particulier, que *les fonctions qui satisfont à l'inégalité* $|f(x) - P_n(x)| < R\alpha_n$, *quel que soit* n, *la suite* S *jouissant de la propriété que* $\lim\limits_{n=\infty} \cdot \alpha_n \cdot \log n = 0$, *satisfont nécessairement à la condition de Dini-Lipschitz, à savoir,* $\lim\limits_{\varepsilon=0} \delta \cdot \log \varepsilon = 0$. Ceci est la réciproque d'un théorème de M. Lebesgue (*) que nous démontrerons plus loin.

23. Théorème. — *Si pour toute valeur de* n *il existe des polynomes* P_n *de degré* n, *tels que*

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon_n$$

sur le segment $(-1, +1)$ *où* $\varepsilon_n n^p$ *tend vers* 0, *lorsque* n *croît indéfiniment,*

(*) *Loc. cit.*, p. 114.

quel que soit le nombre positif p, *la fonction* $f(x)$ *admet des dérivées bornées de tous les ordres sur tout le segment (extrémités comprises).*

Ceci est une conséquence immédiate du théorème et de la remarque (15).

24. Théorème. — *Si pour toute valeur de* n *on a*

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{A}{R^n}$$

sur le segment $(-1, +1)$, *la fonction* $f(x)$ *est analytique et holomorphe à l'intérieur de l'ellipse* E, *ayant pour foyers les points* $(-1, +1)$, *et dont la somme des demi-axes est égale à* R.

En effet, en écrivant

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_m(x) + \cdots$$

où

$$u_1(x) = P_1(x); \qquad u_2(x) = P_2(x) - P_1(x); \qquad u_m(x) = P_m(x) - P_{m-1}(x),$$

on a sur tout le segment

$$|u_n| < \frac{2A}{R^{n-1}}.$$

Donc en un point d'une ellipse E, homofocale à l'ellipse E et ayant $R_1 < R$ pour somme des demi-axes, on aura, à cause de l'inégalité (9),

$$|u_n| < \frac{2AR_1^n}{R^{n-1}} = 2AR_1\left(\frac{R_1}{R}\right)^{n-1}.$$

La série $f(x)$ converge par conséquent uniformément sur l'ellipse E, et à son intérieur. Le théorème est ainsi démontré.

DEUXIÈME PARTIE

RECHERCHE DES POLYNOMES D'APPROXIMATION.

CHAPITRE III.

Méthode générale.

25. Préliminaires. — L'idée de la méthode que nous allons suivre pour la recherche et l'étude des polynomes d'approximation d'une fonction donnée consiste à utiliser convenablement les polynomes d'approximation connus déjà d'autres fonctions qui diffèrent suffisamment peu de la fonction considérée. Quelquefois, comme on le verra plus loin, il sera possible de conserver la fonction et de faire varier la nature des polynomes d'approximation.

Rappelons d'abord les principaux des résultats connus :

Parmi tous les polynomes de degré n *il en existe un et un seul* P_n *qui dans un intervalle donné* (AB) *rend minimum le maximum de* $|f(x) - P_n(x)|$, *la fonction* $f(x)$ *étant une fonction continue donnée quelconque; c'est le seul polynome pour lequel le maximum de* $|f(x) - P_n(x)|$ *est atteint avec des signes alternés* $(n+2)$ *fois au moins dans l'intervalle considéré.* (Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 88.) Ce polynome $P_n(x)$ est le polynome ordinaire d'approximation de degré n de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (AB). Il résulte de la proposition énoncée que si le nombre de points où le maximum de $|f(x) - P_n(x)|$ est atteint avec changement de signes, était supérieur à $(n+2)$, s'il était égal à $(n+2+k)$, on aurait nécessairement

$$P_n = P_{n+1} = \cdots = P_{n+k},$$

P_{n+i} étant le polynome d'approximation de $f(x)$ de degré $(n+i)$, de sorte que pour le polynome d'approximation P_{n+k}, l'écart maximum $|f(x) - P_{n+k}(x)|$ se trouve atteint exactement en $(n+k+2)$ points. Cette remarque justifie dans une certaine mesure que dans la suite nous nous occupons uniquement des polynomes d'approximation $P_n(x)$ pour lesquels l'écart maximum est atteint avec des signes contraires en $(n+2)$ points seulement.

26. Généralisation. — Généralisons ce qui précède de la façon suivante. Considérons une suite quelconque de puissances $x^{\alpha_0}, x^{\alpha_1}, \ldots x^{\alpha_n}$, dont les exposants $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ sont des nombres positifs $(\alpha_0 \geqq 0)$ quelconques. Nous désignerons par $R_n(x)$ l'expression

$$R_n(x) = A_0 x^{\alpha_0} + \cdots + A_n x^{\alpha_n}$$

qui entre toutes les expressions de la même forme (et qu'on peut appeler polynomes généralisés) rend minimum le maximum de $|f(x) - R_n(x)|$ dans un intervalle (AB), où $B > A \geqq 0$ (de sorte que x^α sera toujours bien déterminé réel et positif ou nul). $R_n(x)$ sera appelé polynome d'approximation de $f(x)$ dans l'intervalle (AB), relatif à la suite $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$. L'existence du polynome $R_n(x)$ résulte d'un raisonnement identique à celui de M. Borel (*loc. cit.*) pour le cas de $\alpha_i = i$, qu'il est superflu de reproduire. Mais pour généraliser les autres propriétés du polynome d'approximation il faut établir d'abord le lemme suivant :

27. Lemme. — *Le nombre des racines positives de l'équation*

$$Q(x) = a_0 x^{\alpha_0} + a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_n x^{\alpha_n} = 0 \tag{18}$$

ne peut dépasser le nombre des variations de signe de ses coefficients.

Dans le cas où les α_i sont des nombres entiers, notre énoncé se réduit à une forme particulière du théorème de Descartes. De même, le cas où les nombres α_i sont rationnels peut toujours, par un changement de variable $x^{\frac{1}{p}} = y$, se ramener au précédent. Supposons à présent que les α_i sont quelconques, mais que toutes les racines positives de l'équation (18) sont distinctes. Dans ces conditions, si on fait varier infiniment peu les exposants (en leur donnant des accroissements réels), on trouvera au voisinage de chaque racine positive de $Q(x) = 0$ une et une seule racine de l'équation variée, et cette racine devra être nécessairement réelle, car les racines imaginaires d'une équation à coefficients réels sont toujours conjuguées deux à deux; donc le nombre de racines positives de l'équation donnée sera le même que celui de l'équation variée, dans laquelle on peut bien supposer les exposants rationnels; par conséquent ce nombre ne dépassera pas celui des variations de signe des coefficients. Enfin, s'il y a des racines positives multiples, on considère l'équation

$$Q_1(x) = [x^{1-\alpha_0} Q(x)]' = 0$$

qui a au moins autant de racines positives que $Q(x) = 0$, en comptant toutes les racines avec leur ordre de multiplicité; seulement cet ordre pour chaque racine multiple sera abaissé d'une unité. Formant

$$Q_2(x) = [x Q_1(x)]' = 0,$$

et ainsi de suite, on s'aperçoit que les coefficients de $Q(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, ... ont le même nombre de variations, mais leurs racines, dont le nombre ne va pas en diminuant, finissent par devenir distinctes; le nombre des racines positives (comptées avec leur ordre de multiplicité) de $Q(x) = 0$ ne peut donc pas, dans ce dernier cas également, dépasser le nombre des variations de signe de ses coefficients.

Corollaire. — *Le nombre des racines positives de l'équation* (18) *ne peut dépasser* n.

28. Théorème. — *Le polynome d'approximation* $R_n(x)$ *de* $f(x)$ *dans l'intervalle* AB ($B > A \geqq 0$) *relatif à la suite* $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$ *est unique, pourvu* *qu'on n'ait pas simultanément* (*) $A = 0$ *et* $\alpha_0 . f(0) \gtrless 0$; *le nombre des points de l'intervalle où le maximum* L *de* $|f(x) - R_n(x)|$ *est atteint avec des signes alternés est au moins égal à* $(n + 2)$.

En effet, $R_n(x)$ ne saurait être un polynome d'approximation, s'il était possible de construire un polynome $S(x) = b_0 x^{\alpha_0} + \cdots + b_n x^{\alpha_n}$, satisfaisant aux conditions $S(x_i) . [f(x_i) - R_n(x_i)] < 0$ en tous les points d'écart maximum; car, si cela était possible, on verrait qu'en choisissant convenablement le coefficient λ (voyez le § 2), le polynome $R_n(x) - \lambda S(x)$ s'écarte moins de $f(x)$ que le polynome d'approximation $R_n(x)$. Or ceci serait certainement possible, si l'on avait $k < n + 2$, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ étant des points quelconques d'écart maximum, où la différence $f(x) - R_n(x)$ reçoit *successivement* des signes contraires.

En effet, il suffirait de prendre $k - 1$ points $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{k-1}$, tels que $x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 \ldots < \xi_{k-1} < x_k$, et de poser $S(\xi_i) = 0$, les autres racines de S, si elles existent, étant en dehors de l'intervalle AB, puisque alors $S(x_i) . S(x_{i+1}) < 0$.

On voit, en particulier, que $S(x) = b_0 x^{\alpha_0} + \cdots + b_{k-1} x^{\alpha_{k-1}}$, qui, en vertu du corollaire qui précède, n'a pas plus de $k - 1$ racines positives, pourrait satisfaire à ces conditions, pourvu que l'on n'ait pas en même temps $x_1 = 0$ et $\alpha_0 > 0$. On a donc $n + 2 \leq k$. Ce point étant établi, il est facile de voir que le polynome d'approximation $R_n(x)$ est unique. En effet, supposons qu'il en existe un autre $P_n(x)$. La différence $Q(x) = P_n(x) - R_n(x)$ satisfera alors aux $(n + 1)$ inégalités

$$Q(x_1) . Q(x_2) \leq 0, \quad Q(x_2) . Q(x_3) \leq 0, \ldots, Q(x_{n+1}) . Q(x_{n+2}) \leq 0,$$

ce qui exigerait que $Q(x) = 0$ ait au moins $(n + 1)$ racines positives, ou bien n racines positives, mais alors $x_1 = Q(x_1) = \alpha_0 = 0$, et le nombre de termes de $Q(x)$ ne dépasse pas n. Dans les deux cas $Q(x)$ serait identiquement nul (d'après 27). C. Q. F. D.

On généralise aussi par le même raisonnement un théorème important dû à M. de la Vallée Poussin (**).

(*) Dans la suite, cette condition sera toujours remplie.

(**) *Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée de l'angle*, Bulletin de l'Académie royale des Sciences de Belgique, décembre 1910.

29. Théorème généralisé de M. de la Vallée Poussin. — *L'écart maximum* L *de* $|f(x) - R_n(x)|$ *ne peut pas être plus petit que la plus petite des valeurs absolues de la différence* $f(x) - Q_n(x)$ *en* $(n+2)$ *points consécutifs quelconques, où cette dernière reçoit des signes contraires,* $Q_n(x)$ *étant une expression de même forme que* $R_n(x)$. Soient $x_1, x_2, \dots x_{n+2}$ les points considérés. Admettons qu'on ait $|f(x_i) - Q_n(x_i)| > L$; donc *a fortiori*

$$|f(x_i) - Q_n(x_i)| > |f(x_i) - R_n(x_i)|,$$

et par conséquent, en posant $Q(x) = Q_n(x) - R_n(x)$, on devrait avoir

$$Q(x_1) \cdot Q(x_2) < 0, \qquad Q(x_{n+1}) \cdot Q(x_{n+2}) < 0,$$

ce qui est impossible, puisque cela exigerait que $Q(x) = 0$ possède $(n+1)$ racines positives. Le théorème est ainsi démontré.

30. Remarque. — D'après le théorème (28), nous pouvons conclure, comme au § 25, qu'il suffit d'étudier les polynomes d'approximation $R_n(x)$ pour lesquels l'écart maximum est atteint en $(n+2)$ points avec changements de signes. L'une des trois circonstances pourra se présenter pour ces $(n+2)$ écarts maxima de signes contraires : I. L'écart maximum est atteint aux deux bords de l'intervalle; II. L'écart maximum est atteint à un bord seulement; III. L'écart maximum n'est atteint en aucun des bords. Pour fixer les idées, nous distinguerons dans la suite ces trois classes de polynomes d'approximation. Ceci posé, passons à la démonstration des deux théorèmes fondamentaux.

31. Théorème. — *Si le polynome d'approximation* $R_n(x, \lambda)$ *dans l'intervalle* (AB) (*) *de la fonction analytique* $\lambda f(x) + (1-\lambda)\varphi(x)$, *relatif à la suite* $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$, *appartient, quel que soit* $\lambda (0 \leqq \lambda \leqq 1)$, *à la même classe, l'écart maximum* L, *ainsi que tous les coefficients du polynome*

(*) L'intervalle (AB) est quelconque, si $\alpha_i = i$; dans les autres cas, on suppose $B > A \geqq 0$.

$R_n(x, \lambda)$ *sont des fonctions analytiques (holomorphes) de* $\lambda(0 \leqq \lambda \leqq 1)$, *pourvu qu'on n'ait aux points intérieurs, où l'écart maximum est atteint,*

$$F''_{x^2} \gtrless 0,$$

ayant posé

$$F(x,\lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\varphi(x) - R_n(x,\lambda).$$

Il nous suffira d'examiner le cas où les polynomes $R_n(x,\lambda)$ appartiennent constamment à la première classe, c'est-à-dire le cas où les deux extrémités de l'intervalle sont des points d'écart maximum; les deux autres cas se traitent d'une façon identique.

Ceci posé, on aura pour déterminer les polynomes d'approximation les $2n+2$ équations

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{ll} F'_{x_i} = \lambda f'(x_i) + (1-\lambda)\varphi'(x_i) - R'_n(x_i,\lambda) = 0 & (i = 1, 2, \ldots n). \\ F = [\lambda f(x_i) + (1-\lambda)\varphi(x_i) - R_n(x_i,\lambda)] = \pm L & (i = 0, 1, 2, \ldots n, n+1), \end{array} \right.$$

à $2n+2$ inconnues : les points intérieurs d'écart maximum $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, les coefficients de R_n et l'écart maximum L.

Si l'on prend une valeur déterminée λ_0 de λ, on a là un système d'équations analytiques qui admet, d'après ce qui précède, un système unique (*) de solutions réelles qui correspond au polynome d'approximation, pour $\lambda = \lambda_0$. Mais lorsqu'on fera varier λ, toutes les inconnues deviendront des fonctions holomorphes bien déterminées de λ, pourvu que leur déterminant fonctionnel soit différent de zéro. Notre théorème sera par

(*) Les valeurs des coefficients de R_n et de l'écart L sont uniques dans tous les cas; mais les valeurs des points d'écart maximum x_i ne sont pas uniques dans le cas qu'il faut considérer comme exceptionnel, où il existe des points voisins où l'écart maximum est atteint sans changement de signe. La démonstration est également valable dans ce cas là. Je voulais seulement attirer l'attention sur le fait que, si dans ce cas exceptionnel on ajoutait aux équations (20) les équations auxquelles satisfont *tous* les points d'écart, le nombre des équations serait supérieur à celui des inconnues, et, par conséquent, si la fonction à approcher était un polynome (de degré supérieur à n), la recherche du polynome d'approximation se ramènerait à la résolution d'une équation de premier degré à une seule inconnue. Ce cas est donc théoriquement bien plus simple que le cas ordinaire.

conséquent démontré si nous prouvons que le déterminant fonctionnel des inconnues est différent de zéro. Or, ce déterminant Δ est manifestement

$$\Delta = (2L)^{n+2} \begin{vmatrix} +1\ 0 & \ldots\ldots 0\ x_0^{\alpha_0}\ x_0^{\alpha_1} \ldots\ldots x_0^{\alpha_n} \\ -1\ 0 & \ldots\ldots\ x_1^{\alpha_0}\ x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots x_1^{\alpha_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (-1)^{n+1} 0 & \ldots\ldots 0\ x_{n+1}^{\alpha_0} \ldots\ldots x_{n+1}^{\alpha_n} \\ 0\ F''_{x_1^2} & \ldots\ldots 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & \ldots\ldots\ F''_{x_n^2}\ .\ .\ .\ .\ . \end{vmatrix} =$$

$$= (2L)^{n+2} \cdot F''_{x_1^2} \cdot F''_{x_2^2} \ldots F''_{x_n^2} \cdot \left[\Delta_{x_0} + \Delta_{x_1} + \ldots + \Delta_{x_{n-1}}\right],$$

où

$$\Delta_{x_i} = \begin{vmatrix} x_0^{\alpha_0}\ x_0^{\alpha_1} \ldots\ldots\ldots x_0^{\alpha_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{i-1}^{\alpha_0} \ldots\ldots\ldots x_{i-1}^{\alpha_n} \\ x_{i+1}^{\alpha_0} \ldots\ldots\ldots x_{i+1}^{\alpha_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n+1}^{\alpha_0} \ldots\ldots\ldots x_{n+1}^{\alpha_n} \end{vmatrix}.$$

Mais les nombres $x_0, x_1, \ldots x_{n+1}$ formant une suite positive et croissante, on a $\Delta_{x_i} > 0$, car en admettant que cela est vrai pour un déterminant d'ordre n, on voit immédiatement (à cause du lemme 27) que la même inégalité a nécessairement lieu pour $n+1$. (On suppose comme toujours que $x_0 > 0$, si $\alpha > 0$.) Les quantités $F''_{x_i^2}$ étant différentes de zéro, par hypothèse, le déterminant fonctionnel Δ est donc également différent de zéro. C. Q. F. D.

On démontre aussi par un raisonnement semblable le théorème suivant :

31bis. THÉORÈME. — *Si* $Q_n(x)$ *est le polynome d'approximation de la fonction analytique* $F(x)$ *relatif à la suite des exposants* $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$, *et* *si* $R_n(x, \lambda)$ *est le polynome d'approximation de* $F(x) + (\lambda - 1) Q_n(x)$ *relatif à la suite* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ *dans le même intervalle* (AB), *l'écart maximum* L *et les coefficients de* $R_n(x, \lambda)$ *sont des fonctions analytiques de* λ, *pourvu que* $R_n(x, \lambda)$ *soit de même classe pour toute valeur de* $\lambda (0 \leqq \lambda \leqq 1)$ *et qu'on ait en tous les points intérieurs d'écart maximum* $F''_{x^2} \gtrless 0$, *ayant posé*

$$F(x, \lambda) = f(x) + (\lambda - 1) Q_n(x) - R_n(x, \lambda).$$

32. Méthode a suivre. — Voici comment on appliquera ces propositions. Pour fixer les idées, considérons la première. D'abord, d'après une remarque due à M. Borel (*loc. cit.*, p. 82), on ramène la recherche des polynomes d'approximation d'une fonction continue quelconque à celle des polynomes d'approximation d'une suite de polynomes de degrés croissants. Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité théorique du problème, ne considérer que les fonctions analytiques.

Ceci posé, soit $f(x)$ la fonction dont on cherche le polynome d'approximation. On choisira *convenablement* (de ce choix dépendra la rapidité de la convergence de la méthode) une fonction $\varphi(x)$ dont on connait le polynome d'approximation correspondant et qui soit tel qu'on puisse affirmer que la fonction

$$F(x_1 \lambda) = \lambda f(x) + (1 - \lambda) \varphi(x) - R_n(x, \lambda)$$

satisfait aux conditions du théorème. Par hypothèse, $R_n(x, 0)$ sera connu; le polynome cherché sera $R_n(x, 1)$. Pour le calculer, on déterminera les dérivées successives de $R_n(x, \lambda)$ par rapport à λ pour $\lambda = 0$; on développera ensuite $R_n(x, \lambda)$ en série de Taylor qu'on pourra dans tous les cas sommer par la méthode de M. Mittag-Leffler pour $\lambda = 1$, mais, en pratique, on cherchera à s'arranger de la sorte qu'un petit nombre de termes de la série de Taylor donne déjà une approximation suffisante du polynome cherché $R_n(x, 1)$. Les dérivées successives se calculent de la façon suivante : soit $L(\lambda)$ l'écart maximum qui est une fonction holomorphe de λ. $L(0)$ sera donné et on aura d'ailleurs, en écrivant $R(x, \lambda)$ au lieu de $R_n(x, \lambda)$,

$$\pm L(o) = \varphi(x_i) - R(x_i, o), \tag{21}$$

x_i étant les points initiaux également connus d'écart maximum. Ensuite on aura

$$(22)\qquad \pm\frac{dL(\lambda)}{d\lambda}=\frac{\partial F(x_i,\lambda)}{\partial\lambda}+\frac{\partial F(x_i,\lambda)}{\partial x}\frac{dx_i}{d\lambda}=\frac{\partial F(x_i,\lambda)}{\partial\lambda},$$

car si x_i est intérieur, $\frac{\delta F(x_i)}{\delta x_i}=0$, et si x_i est une extrémité, $\frac{dx_i}{d\lambda}=0$; en particulier, pour $\lambda=0$, cela donne $(n+2)$ équations linéaires

$$(22^{\text{bis}})\qquad \pm\frac{dL(o)}{d\lambda}=\frac{\partial F(x_i,o)}{\partial\lambda}=f(x_i)-\varphi(x_i)-R'_\lambda(x_i,o),$$

aux $(n+2)$ inconnues : $\frac{dL(0)}{d\lambda}$ et les $(n+1)$ coefficients du polynome dérivé $R'_\lambda(x,0)$. Les signes des premiers membres à prendre dans les équations (22^{bis}) sont naturellement les mêmes que ceux des équations (21) pour les mêmes valeurs x_i.

Pour calculer les dérivées secondes, remarquons que si x_i est un des bords de l'intervalle, on a en ce point

$$(23)\qquad \pm\frac{d^2L}{d\lambda^2}=\frac{\partial^2F}{\partial\lambda^2}=-R''_{\lambda^2};$$

si c'est un point intérieur, on aura

$$\pm\frac{d^2L}{d\lambda^2}=\frac{\partial^2F(x_i)}{\partial\lambda^2}+2\frac{\partial^2F(x_i)}{\partial\lambda\partial x}\left(\frac{dx_i}{d\lambda}\right)+\frac{\partial^2F(x_i)}{\partial x^2}\left(\frac{dx_i}{d\lambda}\right)^2,$$

et, en vertu des égalités

$$\frac{\partial^2F(x_i)}{\partial x\partial\lambda}d\lambda+\frac{\partial^2F(x_i)}{\partial x_i}dx_i=0,$$

il vient

$$(24)\qquad \pm\frac{d^2L}{d\lambda^2}=\frac{\partial^2F}{\partial\lambda^2}-\frac{\left(\frac{\partial^2F}{\partial x\partial\lambda}\right)^2}{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}}$$

en tous les points intérieurs.

Les équations (23) et (24) forment de nouveau un système de $(n+2)$ équations linéaires à $(n+2)$ inconnues : $\frac{d^2L(0)}{d\lambda^2}$ et les $(n+1)$ coefficients des polynomes $R''_{\lambda^2}(x, 0) = -\frac{\delta^2 F}{\delta\lambda^2}(x, 0)$. La remarque relative aux signes subsiste évidemment.

Nous ne pousserons pas plus loin le calcul des coefficients de la série de Taylor, en nous plaçant toujours dans des conditions où la connaissance des deux premiers termes suffit pour les buts que nous poursuivons. Remarquons seulement que le calcul successif des coefficients consiste toujours dans la résolution de $(n+2)$ équations linéaires qui ne diffèrent que par leurs seconds membres à $(n+2)$ inconnues. Le point essentiel est évidemment de savoir tirer des conséquences précises de la connaissance d'un nombre limité de coefficients de la série de Taylor. Dans ce but, démontrons l'inégalité

$$\frac{d^2L}{d\lambda^2} \geqq 0. \tag{25}$$

En effet, dans les formules (24), le signe + est à prendre lorsque $F > 0$ (en même temps $\frac{\delta^2 F}{\delta x^2} < 0$); au contraire, c'est le signe — qu'il faut prendre si $F < 0$ (en même temps $\frac{\delta^2 F}{\delta\lambda^2} > 0$). Par conséquent, si l'inégalité (25) n'était pas vérifiée, on aurait $\frac{\delta^2 F}{\delta\lambda^2}. F < 0$ en tous les points d'écart maximum, puisque le premier membre de l'égalité (23) reçoit également le signe de F. Mais alors $\frac{\delta^2 F}{\delta\lambda^2} = A_0 x^{\alpha_0} + \cdots + A_n x^{\alpha_n}$ devenant de signes contraires en $(n+2)$ points consécutifs, devrait s'annuler en $(n+1)$ points intérieurs de l'intervalle, ce qui est inadmissible (§ 27).

L'inégalité (25) appliquée à la formule de Taylor donne immédiatement

$$L(1) \geqq L(o) + \frac{dL(o)}{d\lambda}. \tag{26}$$

Je remarquerai que cette dernière inégalité peut être aussi déduite du théorème généralisé de M. de la Vallée Poussin (§ 29). En effet, en ajoutant les égalités (21) et (22^{bis}), on obtient

$$\pm\left[L(o) + \frac{dL(o)}{d\lambda}\right] = f(x_i) - R(x_i, o) - R'_\lambda(x_i, o).$$

En adoptant la terminologie de M. de la Vallée Poussin (*loc. cit.*), on peut d'ailleurs dire que le polynome $R(x, 0) + R'_\lambda(x, 0)$ qu'on obtient en s'arrêtant au second terme de la série de Taylor est le polynome d'approximation de $f(x)$ relatif à l'ensemble des $(n + 2)$ points $x_0 . x_1, \dots x_{n+1}$. Toutes les conclusions subsistent évidemment, si c'est au moyen du théorème (31^{bis}) qu'on introduit le paramètre λ.

CHAPITRE IV.

Étude de la meilleure approximation de $|x|$ et de certaines autres fonctions.

33. Problème. — *Déterminer parmi les polynomes ordinaires de degré* n *au plus et tels que le coefficient de* x^p $(0 < p \leqq n)$ *soit égal à* 1 *celui qui s'écarte de zéro le moins possible dans l'intervalle* 01.

On est amené à former le polynome d'approximation de x^p relatif à la suite des exposants : $0, 1, \dots p - 1, p + 1, \dots n$. Le problème sera donc résolu si l'on construit celui des polynomes ordinaires ayant 1 pour coefficient de x^v qui atteint $(n + 1)$ fois avec alternance de signe son module maximum (§ 28). Le polynome cherché sera donc

$$\frac{T_{2n}(\sqrt{x})}{A_{2p}^{(2n)}} = \frac{\cos 2n \arccos \sqrt{x}}{A_{2p}^{(2n)}},$$

où $A_{2p}^{(2n)}$ est le coefficient de x^{2p} du polynome trigonométrique $T_{2n}(x) = \cos 2n \arccos x$.

Rappelons que (*)

$$T_n(x) = \cos n \arccos x =$$
$$= 2^{n-1} . \left[x^n - \frac{n}{4} x^{n-2} + \frac{n}{2^4} \cdot \frac{n-3}{2!} x^{n-4} + \dots + (-1)^l . \frac{n}{2^{2l}} \cdot \frac{(n-l-1)\cdots(n-2l+1)}{l!} x^{n-2l} + \dots \right]$$

(*) Voir, par exemple, Seliwanoff, *Lehrbuch der Differenzenrechnung*, p. 76.

et, par conséquent,

$$T_{2n}(x) = \cos 2n \arccos x$$

$$= 2^{2n-1}\left[x^{2n} - \frac{n}{2}x^{2n-2} + \frac{n}{2^3}\cdot\frac{2n-3}{2!}x^{2n-4} + \cdots + (-1)^l \cdot \frac{n}{2^{2l-1}}\cdot\frac{(2n-l-1)\cdots(2n-2l+1)}{l!}\cdot x^{2n-2l} + \cdots\right].$$

Donc

$$A_{2p}^{(2n)} = (-1)^{n-p}\frac{n \cdot 2^{2p} \cdot (n+p-1)\dots(2p+1)}{(n-p)!} \qquad (\text{si } p < n-1)$$

et

$$A_{2n-2}^{(2n)} = -2^{2n-2} \cdot n, \qquad A_{2n}^{(2n)} = 2^{2n-1}.$$

L'écart maximum de $\frac{T_{2n}(\sqrt{x})}{A_{2p}^{(2n)}}$ atteint $(n+1)$ fois sur le segment 01 est dans tous les cas égal à $\left|\frac{1}{A_{2p}^{(2n)}}\right|$.

Ainsi un polynome de la forme

$$P(x) = x + a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

ne peut rester sur le segment (01) constamment inférieur en valeur absolue à $\frac{1}{2n^2}$.

Un polynome de la forme

$$P(x) = x^2 + a_0 + a_1 x + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

ne peut rester inférieur sur le même segment à $\frac{3}{2n^2(n^2-1)}$, etc.

34. Problème (*). — *Déterminer parmi les polynomes ordinaires de degré* n *au plus et tels que le coefficient de* x^p *est égal à* 1 *celui qui s'écarte le moins possible de zéro dans l'intervalle* $(-1, +1)$.

(*) J'ai appris plus tard que ce problème avait été résolu en 1892 par une méthode différente dans un travail : *Sur les fonctions qui s'écartent le moins de zéro*, de W. Markoff (frère du mathématicien russe bien connu, A. Markoff), étudiant de l'Université de Saint-Pétersbourg, qu'une mort prématurée a enlevé à la science. Ce mémoire contient, en outre, une généralisation intéressante du théorème (5), de A. Markoff, qui fournit des bornes supérieures des dérivées successives d'un polynome effectivement atteintes sur un segment, où le module du polynome ne dépasse pas un nombre fixe, tandis que les bornes que nous a données l'application successive du théorème (5) ne sont pas atteintes.

Soit d'abord p pair. Il est clair que, si $x^p - Q(x) = P(x)$ répond à la question, il en sera de même de $x^p - Q(-x) = P(-x)$ et *a fortiori* de $x^p - \frac{Q(x)+Q(-x)}{2}$. Nous pouvons donc supposer $Q(x)$ pair de degré n ou $(n-1)$ suivant que n est pair ou non. En remplaçant x^2 par z, on se trouve ramené au problème précédent et par conséquent

$$P(x) = \frac{\cos n \arccos x}{A_p^{(n)}} \text{ (si } n \text{ est pair)}$$

et

$$P(x) = \frac{\cos (n-1) \arccos x}{A_p^{(n-1)}} \text{ (si } n \text{ est impair).}$$

Soit ensuite p impair. Si $x^p - Q(x) = P(x)$ répond à la question, il en est de même de $x^p + Q(-x) = -P(-x)$ et *a fortiori* de $x^p - \frac{Q(x)-Q(-x)}{2}$. On peut supposer, par conséquent, $Q(x)$ impair. On sera donc amené à construire le polynome d'approximation de x^p sur le segment (01) relatif à la suite des exposants $1, 3, \ldots p-2, p+2, \ldots n$ (ou $n-1$, si n est pair); le nombre de ces exposants est $\frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n-2}{2}$. Le problème sera résolu si $x^p - Q(x) = P(x)$ aura $\frac{n+1}{2}$ (ou $\frac{n}{2}$, pour n pair) écarts maxima dans l'intervalle 01. Or ceci aura lieu pour le polynome

$$P(x) = \frac{\cos n \arccos x}{A_p^{(n)}} \text{ (pour } n \text{ impair)}$$

et

$$P(x) = \frac{\cos (n-1) \arccos x}{A_p^{(n-1)}} \text{ (pour } n \text{ pair).}$$

Ainsi, *dans l'intervalle* $(-1, +1)$, *un polynome*

$$P(x) = x + a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_n x^n$$

ne peut rester en valeur absolue inférieur à $\frac{1}{n}$, *si* n *est impair, et ne peut rester inférieur à* $\frac{1}{n-1}$ *si* n *est pair.* Ce fait servira de point de départ pour notre étude de la meilleure approximation de $|x|$.

35. Remarque préliminaire sur les polynomes d'approximation de $|x|$. — On voit immédiatement, par raison de symétrie, que le polynome d'approximation de $|x|$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ ne contient que des puissances paires de x. Par conséquent, ce polynome $P(x)$ sera également le polynome d'approximation de x sur le segment (01) relatif à la suite des exposants : $0, 2, \ldots 2n$. Mais au lieu du polynome $P(x)$ nous allons chercher le polynome d'approximation $R(x)$ (sur le même segment 01) relatif à la suite : $2, 4 \ldots 2n$; en d'autres termes, nous ne considérons que les polynomes qui s'annulent à l'origine. Il est facile de voir que si L_1 est la meilleure approximation qu'on peut obtenir avec la première suite, et L celle qu'on peut obtenir par la seconde suite, on a nécessairement

$$L > L_1 > \frac{1}{2} L. \tag{27}$$

En effet, sans examiner de près $P(x)$, dont nous n'aurons pas besoin, on vérifie facilement l'impossibilité de l'identité $P(x) \equiv R(x)$; donc $L > L_1$. D'autre part, $P(x) - P(0)$ appartient aux polynomes de la seconde catégorie, sans pouvoir en être le polynome d'approximation; donc $L_1 + |P(0)| > L$, d'où $L_1 > \frac{1}{2} L$.

Il convient d'ajouter que si $P(x)$ est le polynome d'approximation de $|x|$ sur le segment $(-1, +1)$, $hP\left(\frac{x}{h}\right)$ sera le polynome d'approximation sur le segment $(-1, +1)$; il en résulte que la meilleure approximation est proportionnelle à la longueur du segment $2h$.

36. Théorème. — *La meilleure approximation de* x *sur le segment* 01 *par un polynome de la suite* $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots x^{\alpha_n}$ $(\alpha_{i+1} > \alpha_i)$ ***est supérieure*** *à la meilleure approximation par un polynome de la suite* $x^{\beta_1}, x^{\beta_2}, \ldots x^{\beta_n}$ $(\beta_{i+1} > \beta_i)$ *si on a* $\alpha_i \geqq \beta_i > 1$, *l'égalité étant exclue seulement pour* $i = 1$.

Supposons d'abord $\beta_1 < \alpha_1 \leqq \beta_2 \leqq \alpha_2 \ldots \leqq \beta_n \leqq \alpha_n$.

Soit $Q(x) = B_1 x^{\alpha_1} + \cdots + B_n x^{\alpha_n}$ le polynome d'approximation de x relatif à la suite des α. On aura nécessairement $B_1 > 0$, $B_2 > 0$, $B_3 > 0$, etc., car $x - Q(x)$ doit avoir n racines positives.

Formons ensuite

$$F(x,\lambda) = x + (\lambda - 1)\,Q(x) - R(x,\lambda), \tag{28}$$

$R(x,\lambda)$ étant le polynome d'approximation relatif à la suite des β, de $x + (\lambda - 1)\,Q(x)$; de sorte que $R(x, o) \equiv 0$ et $R(x, 1)$ est le polynome d'approximation de x relatif à la suite des β. Il est facile de voir que nous nous trouvons dans des conditions où le théorème (32) est applicable. En effet, le polynome $R(x,\lambda)$ appartient à la seconde classe (§ 30), quel que soit $\lambda (0 \leqq \lambda \leqq 1)$, car les coefficients de

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + (\lambda - 1)\,Q'_x - R'_x$$

présentant au plus n variations de signe, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ ne peut avoir plus de n racines positives, tandis que le nombre des écarts maxima n'est pas inférieur à $(n+1)$; pour la même raison, aucune des racines de $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ ne saurait annuler $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$.

Cela étant, le premier terme de

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -R'_\lambda + Q(x),$$

qui a au moins n racines positives, devra être négatif pour donner n variations de signe aux coefficients de $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$. Dans ces conditions, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ aura exactement n racines positives et sera *négatif* pour x très petit et, en particulier, au point d'écart maximum le plus rapproché de l'origine. Or en ce point où $F(x,\lambda) > 0$ (car il a le signe de x qui est son terme de degré le moins élevé), on a $\frac{dL}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \lambda}$.

Donc

$$\frac{dL}{d\lambda} < 0.$$

L'écart va donc en diminuant lorsque λ varie de 0 à 1. L'écart correspondant à la suite des α est donc supérieur à celui de la suite des β.

On passe facilement de là au cas général, en comparant successivement les suites :

$$\begin{array}{c} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \\ \alpha'_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \\ \dfrac{(n-2)\alpha'_1 + \beta_1}{n-1}, \beta_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\alpha'_1 + (n-2)\beta_1}{n-1}, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, \alpha_n, \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \end{array}$$

où $\beta_1, < \alpha'_1 < \alpha_1$ et $\alpha'_1 \leqq \beta_2$.

37. Corollaire. — *La meilleure approximation de* $|x|$ *sur le segment* $(-1, +1)$ *au moyen d'un polynome de degré* $2n$ *s'annulant à l'origine est inférieure à* $\frac{1}{2n+1}$.

En effet, cette approximation est la même que celle de x sur le segment (01) par un polynome de la forme $A_1x^2 + A_2x^4 + \cdots + A_nx^{2n}$. Or, à cause du théorème qu'on vient de démontrer, celle-ci est inférieure à l'approximation qu'on peut obtenir au moyen d'un polynome $B_1x^3 + B_2x^5 + \cdots + B_nx^{2n+1}$ qui est égal (§ 34) à $\frac{1}{2n+1}$.

38. Corollaire. — *La meilleure approximation de* x *sur* 01 *au moyen d'un polynome de la forme* $A_1x^4 + \cdots A_{n-1}x^{2n} + A_nx^{2n+2}$ *est supérieure à* $\frac{1}{2n+1}$.

39. Application de la méthode générale a la recherche du polynome d'approximation de $|x|$. — Reprenons la formule (28) en supposant $\beta_i = 2i$ et $\alpha_i = 2i + 1$ $(i = 1, 2, \ldots n)$.

$R(x, 1)$ sera le polynome cherché, $L(1)$ l'approximation cherchée. D'après le § 34,

$$x - Q(x) = \frac{\cos(2n+1)\arccos x}{(-1)^n \cdot (2n+1)},$$

$L(0) = \frac{1}{2n+1}$ et $R(x, 0) = 0$. Les points initiaux d'écart maximum sont $x_i = \cos\frac{i\pi}{2n+1}$ $(i = 0, 1, \ldots n)$.

On a donc les équations

$$
(29)\quad \left\{\begin{array}{l}
1 - Q(1) = (-1)^n L(o), \\
\cos\frac{\pi}{2n+1} - Q\left(\cos\frac{\pi}{2n+1}\right) = -(-1)^n L(o), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right.
$$

qui correspondent aux équations (21) et

$$
(30)\quad \left\{\begin{array}{l}
Q(1) - R'_\lambda(1) = (-1)^n \cdot \frac{dL(o)}{d\lambda}, \\
Q\left(\cos\frac{\pi}{2n+1}\right) - R'_\lambda\left(\cos\frac{\pi}{2n+1}\right) = -(-1)^n \cdot \frac{dL(o)}{d\lambda}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right.
$$

qui correspondent aux équations (22^{bis}). D'où

$$
(31)\quad \left\{\begin{array}{l}
1 - R_\lambda(1) = (-1)^n \left[L(o) + \frac{dL(o)}{d\lambda}\right], \\
\cos\frac{\pi}{2n+1} - R'_\lambda\left(\cos\frac{\pi}{2n+1}\right) = (-1)^{n+1}\left[L(o) + \frac{dL(o)}{d\lambda}\right], \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\cos\frac{n\pi}{2n+1} - R'_\lambda\left(\cos\frac{n\pi}{2n+1}\right) = \left[L(o) + \frac{dL(o)}{d\lambda}\right].
\end{array}\right.
$$

Posons pour abréger $\rho = L(o) + \frac{dL(o)}{d\lambda}$ et rappelons que $L(1) > \rho$.

Le polynome $R'_\lambda = A_1x^2 + \cdots + A_nx^{2n}$ et ρ sont entièrement déterminés par les équations (31); pour les calculer, remarquons que R'_λ, qui ne contient que des puissances paires, satisfera aussi aux équations

$$
\begin{array}{l}
-\cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1} - R'_\lambda\left(\cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1}\right) = \rho, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-\cos\frac{(2n+1)\pi}{2n+1} - R'_\lambda\left(\cos\frac{(2n+1)\pi}{2n+1}\right) = (-1)^n\rho.
\end{array}
$$

Donc R'_λ est un polynome de degré $2n+1$ au plus qui, aux points $x_i = \cos\frac{i\pi}{2n+1}$ $(i = 0, 1, \ldots n)$, prend les valeurs $x_i - \rho(-1)^{n+i}$, et aux points $x_i = \cos\frac{i\pi}{2n+1}$ $(i = n+1, \ldots 2n+1)$ prend les valeurs $-x_i + \rho(-1)^{n+i}$. En appliquant la formule classique d'interpolation, nous aurons par conséquent

$$R'_\lambda = S(x) \cdot \left[\sum_{i=0}^{i=n} \frac{x_i - \rho(-1)^{n+i}}{(x-x_i)S'(x_i)} - \sum_{i=n+1}^{i=2n+1} \frac{x_i - \rho(-1)^{n+i}}{(x-x_i)S'(x_i)}\right], \tag{32}$$

où $S(x)$ est un polynome de degré $2n+2$ s'annulant aux points $x_i (i = 0, 1, \ldots 2n+1)$. On peut donc poser

$$S(x) = \sin(2n+1)\arccos x \,.\, \sqrt{1-x^2}.$$

D'autre part R'_λ s'annule à l'origine. On a, par conséquent, pour déterminer ρ

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{x_i - \rho(-1)^{n+i}}{x_i S'(x_i)} - \sum_{i=n+1}^{i=2n+1} \frac{x_i - \rho(-1)^{n+i}}{x_i S'(x_i)} = 0,$$

ou

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{S'(x_i)} - \sum_{i=n+1}^{2n+1} \frac{1}{S'(x_i)} = (-1)^n \rho \left[\sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{x_i S'(x_i)} - \sum_{i=n+1}^{i=2n+1} \frac{(-1)}{x_i S'(x_i)}\right]. \tag{33}$$

Or

$$S'(x) = -\left[(2n+1)\cos(2n+1)\arccos x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sin(2n+1)\arccos x\right],$$

d'où

$$S'(x_i) = -(2n+1) \,.\, (-1)^i \qquad (\text{pour } i = 1, 2, \ldots 2n)$$

et

$$S'(x_i) = -2(2n+1) \,.\, (-1)^i \qquad (\text{pour } i = 0, 2n+1).$$

L'équation (33) devient donc

$$1 = \rho \cdot \left[\frac{1}{2x_0} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{x_i} - \frac{1}{2x_{2n+1}} - \sum_{i=n+1}^{i=2n} \frac{1}{x_i}\right] = \rho \left[1 + 2\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\cos\frac{i\pi}{2n+1}}\right].$$

Ainsi

(34) $$\rho = \frac{1}{1 + 2\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\cos \frac{i\pi}{2n+1}}}.$$

Il est aisé de trouver une valeur approchée de ρ.

On a manifestement

$$\int_0^n \frac{dz}{\cos \frac{\pi z}{2n+1}} < \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\cos \frac{i\pi}{2n+1}} < \frac{1}{\cos \frac{n\pi}{2n+1}} + \int_0^n \frac{dz}{\cos \frac{\pi z}{2n+1}}$$

et

$$\int_0^n \frac{dz}{\cos \frac{\pi z}{2n+1}} = \frac{2n+1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4n+2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sin u} = -\frac{2n+1}{\pi} \log tg \frac{\pi}{8n+4} < \frac{2n+1}{\pi} \log \frac{8n+4}{\pi}.$$

Donc finalement

(35) $$L(1) > \rho = \frac{\pi(1+\varepsilon)}{(4n+2)\log \frac{8n+4}{\pi}},$$

où ε tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

40. Détermination de l'ordre infinitésimal de $L(1) = L$. — Pour obtenir une limite inférieure de $L(1)$ plus rapprochée, nous allons abandonner la marche analytique de raisonnement et construire *a priori* un polynome approché $P(x)$ de $|x|$ qui présente certaines analogies avec le polynome $R'_\lambda(x)$.

Soit $P(x)$ le polynome de degré $2n$ qui s'annule à l'origine et devient égal à $|x|$ aux points

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{4n} \quad (k = 0, 1, \ldots 2n-1),$$

où

$$T(x) = \cos 2n \arccos x = 0.$$

On aura évidemment

$$T'(x) = \frac{2n \sin 2n \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Donc

$$T'(x_k) = \frac{(-1)^k . 2n}{\sin \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}.$$

Par conséquent

$$(36) \quad P(x) = \frac{xT(x)}{2n}\left[\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(-1)^k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}} - \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{(-1)^k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}\right],$$

mais, d'autre part,

$$x = \frac{xT(x)}{2n}\left[\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(-1)^k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}} + \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{(-1)^k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}\right].$$

D'où

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} x - P(x) &= \frac{xT(x)}{n} \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{(-1)^k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}} = \\ &= -\frac{xT(x)}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(-1)^k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}, \end{aligned} \right.$$

qu'il nous suffira de considérer pour les valeurs positives de x, car $P(x)$ étant pair, la différence $|x| - P(x)$ sera égale pour $x = \pm a \; (a > o)$ à $a - P(a)$.

Or, en supposant n *pair* pour fixer les idées, on a

$$\mathrm{H}(x) = -\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(-1)^k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}} =$$

$$= -\sum_{k=1,3,\ldots n-1} \frac{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\left[x+\cos k+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]-\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}{\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]} =$$

$$= \sum_{k=1,3,\ldots n-1} \frac{2x\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{k\pi}{2n}+\sin\frac{\pi}{2n}}{\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}.$$

Remarquons d'abord que, x étant supposé *fixe* (positif), on a, quel que soit x,

$$\lim_{n=\infty} . x . \mathrm{H}(x) = \frac{1}{2}. \tag{38}$$

En effet,

$$\lim . x . \mathrm{H}(x) = \lim . x \sum_{k=1,3,\ldots n-1} \frac{\frac{\pi}{2n}\left(x\cos\frac{k\pi}{2n}+1\right)}{\left(x+\cos\frac{k\pi}{2n}\right)^2} = \frac{x}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos\alpha+1}{(x+\cos\alpha)^2}\,d\alpha = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, la valeur asymptotique de $|x|$ est, à cause de (37),

$$|x| = \mathrm{P}(x) + \frac{\cos 2n \arccos x}{2n} + \frac{\varepsilon_n(x)}{2n}, \tag{39}$$

où $\varepsilon_n(o) = -1$, et $\lim\limits_{n=\infty} . \varepsilon_n(x) = 0$, si $|x| > 0$.

On peut donc dire, en particulier, que $\frac{1}{2n}$ est la valeur asymptotique du maximum de l'erreur commise en prenant le polynome $\mathrm{P}(x)$ de degré $2n$ comme polynome approché de $|x|$ sur le segment $(-1, +1)$. On pourrait calculer facilement une limite supérieure plus au moins précise de cette erreur pour des valeurs finies de n. Mais ce calcul ne présente qu'un intérêt médiocre, car nous trouvons un polynome (qui ne s'annule pas à l'origine) encore plus approché de $|x|$ dans la troisième partie de ce travail.

Au contraire, nous allons chercher une limite inférieure des $(n+1)$ maxima de signe contraire de la différence $x - P(x)$ pour les valeurs positives de x, car nous savons, d'après le théorème généralisé de M. de la Vallée Poussin (§ 29), que la meilleure approximation, $L(1) = L$, de x par un polynome de la forme $A_1x^2 + \cdots + A_{n-1}x^{2n-2} + A_nx^{2n}$ sur le segment (01) devra être supérieure à cette limite inférieure.

Or, on a évidemment (*)

$$
\begin{aligned}
xH(x) &> x \sin\frac{\pi}{2n} \sum_{k=1,3,\dots n-1} \frac{1}{\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]} = \\
&= x \sin\frac{\pi}{2n} \sum_{k=1,3,\dots n-1} \frac{1}{\left[x+\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]} > \\
&> x \sin\frac{\pi}{2n} \sum_{k=1,3,\dots n-1} \frac{1}{\left[x+\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right]\left[x+\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right]} > \\
&> \frac{\pi x}{2n+1} \sum_{k=1,3,\dots n-1} \frac{1}{\left[x+\frac{2k-1}{4n}\pi\right]\left[x+\frac{2k+1}{4n}\pi\right]} > \\
&> \frac{\pi x}{2(2n+1)} \sum_{1,2,\dots n} \frac{1}{\left(x+\frac{2k-1}{4n}\pi\right)\left(x+\frac{2k+1}{4n}\pi\right)} = \\
&= \frac{nx}{2n+1}\left[\frac{1}{x+\frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{x+\frac{2n+1}{4n}\pi}\right].
\end{aligned}
$$

Pour les petites valeurs de x il convient de s'arrêter à la seconde inégalité qui donne immédiatement

$$
xH(x) > \frac{x\sin\frac{\pi}{2n}}{\left(x+\sin\frac{\pi}{4n}\right)\left(x+\sin\frac{3\pi}{4n}\right)}.
$$

(*) En supposant toujours, pour fixer les idées, n pair et par conséquent $n \geqq 2$.

Par conséquent

$$|x - P(x)| > \frac{x\,|T(x)|}{2n+1}\cdot\left[\frac{1}{x+\frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{x+\frac{2n+1}{4n}\pi}\right],$$

ou encore

$$|x - P(x)| > \frac{x\,|T(x)|\,.\,\sin\frac{\pi}{2n}}{n\left(x+\sin\frac{\pi}{4n}\right)\left(x+\sin\frac{3\pi}{4n}\right)}.$$

En particulier, aux n points $z_i = \cos\frac{i\pi}{2n}$ $(i = 0, 1, \ldots n-1)$, où l'on a

$$[z_i - P(z_i)]\,.\,(-1)^i > 0,$$

on aura donc

$$|z_i - P(z_i)| > \frac{z_i}{2n+1}\left[\frac{1}{z_i+\frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{z_i+\frac{2n+1}{4n}\pi}\right]$$

$$= \frac{\pi z_i}{2(2n+1)}\cdot\frac{1}{\left(z_i+\frac{\pi}{4n}\right)\left(z_i+\frac{2n+1}{4n}\pi\right)} > \frac{1}{3(2n+1)}.$$

On devra prendre encore un $(n+1)^{\text{er}}$ point z_n dans l'intervalle

$$\left[0, \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right],$$

de sorte qu'on ait aussi

$$[z_n - P(z_n)]\,.\,(-1)^n > 0,$$

en cherchant à rendre aussi grand que possible $|z_n - P(z_n)|$. Posons, par exemple,

$$z_n = \sin\frac{\pi}{8n}.$$

Alors

$$|z_n - P(z_n)| > \frac{\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{\pi}{8n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{n\left(\sin\frac{\pi}{4n}+\sin\frac{\pi}{8n}\right)\left(\sin\frac{3\pi}{4n}+\sin\frac{\pi}{8n}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,.\sin\frac{\pi}{2n}}{2n\left(1+2\cos\frac{\pi}{8n}\right)\left(\sin\frac{3\pi}{4n}+\sin\frac{\pi}{8n}\right)} > \frac{4\sqrt{2}}{21(2n+1)}.$$

Donc, nous sommes arrivés aux résultats suivants :

La meilleure approximation L *de* $|x|$ *dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *au moyen d'un polynome de degré* $2n \geqq 4$ *qui s'annule à l'origine satisfait* (*) *aux inégalités*

$$(40) \qquad \frac{1}{2n+1} > L > \frac{4\sqrt{2}}{21(2n+1)}.$$

Nous construisons plus loin des polynomes de degré $2n$ qui (sans s'annuler à l'origine) dans le même intervalle donnent une approximation $\frac{2}{\pi(2n+1)}$.

Donc, en tenant compte de l'inégalité (27), on trouve que :

La meilleure approximation L_1 *de* $|x|$ *dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *au moyen d'un polynome quelconque de degré* $2n \geqq 4$ *satisfait* (**) *aux inégalités*

$$(41) \qquad \frac{2}{\pi(2n+1)} > L_1 > \frac{2\sqrt{2}}{21(2n+1)}.$$

(*) Pour $2n = 2$, les inégalités (40) se vérifient directement, puisqu'on a alors $L = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

(**) Pour $2n = 0$ et $2n = 2$, les inégalités (41) sont également vérifiées, car dans le premier cas on a $L_1 = \frac{1}{2}$ et dans le second $L_1 = \frac{1}{8}$. Dans un mémoire : *Sur la meilleure approximation de* $|x|$ *par des polynomes de degré donné*, qui paraîtra prochainement dans les *Acta Mathematica*, on trouvera une étude détaillée du cas de n très grand.

41. — Second procédé pour la détermination de l'ordre de L. — On peut aussi obtenir très simplement des inégalités analogues aux inégalités (40) en utilisant les propositions (37) et (38).

En effet, admettons l'existence d'une inégalité de la forme

$$|x + Ax^2 + bx^4 + cx^6 + \cdots + kx^{2n}| < \alpha, \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq x \leqq 1;$$

en posant $x = \frac{y}{1+\mu}$, où $\mu > 0$, on aura manifestement

$$\left|\frac{y}{1+\mu} + \frac{Ay^2}{(1+\mu)^2} + b_1 y^4 + \cdots + k_1 y^{2n}\right| < \alpha, \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq y \leqq 1 + \mu;$$

ainsi, *a fortiori*,

$$\left|\frac{x}{1+\mu} + \frac{Ax^2}{(1+\mu)^2} + b_1 x^4 + \cdots + k_1 x^{2n}\right| < \alpha, \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq x \leqq 1,$$

ou

$$|x(1+\mu) + Ax^2 + b_2 x^4 + \cdots + k_2 x^{2n}| < (1+\mu)^2 \alpha, \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq x \leqq 1;$$

en retranchant donc la première inégalité de cette dernière, on a

$$|\mu x + b_3 x^4 + \cdots + k_3 x^{2n}| < \left[(1+\mu)^2 + 1\right] \alpha,$$

et, enfin,

$$|x + A_2 x^4 + A_3 x^6 + \cdots + A_n x^{2n}| < \frac{(1+\mu)^2 + 1}{\mu} \alpha,$$

ou, en particulier, en faisant $\mu = \sqrt{2}$,

$$|x + A_2 x^4 + A_3 x^6 + \cdots + A_n x^{2n}| < 2\left(1 + \sqrt{2}\right) \alpha.$$

Donc, à cause de la proposition (38), on a

$$2\left(1 + \sqrt{2}\right) \alpha > \frac{1}{2n - 1},$$

d'où

$$\alpha > \frac{\sqrt{2} - 1}{2(2n - 1)}.$$

Par conséquent (pour $n > 0$),

$$\frac{1}{2n+1} > L \geqq \frac{\sqrt{2}-1}{2(2n-1)} \tag{42}$$

et

$$\frac{2}{\pi(2n+1)} > L_1 > \frac{\sqrt{2}-1}{4(2n-1)}. \tag{43}$$

On voit que les inégalités (42) et (43) sont même un peu meilleures que les inégalités (40) et (41), pour $n < 4$; au contraire, pour $n \geqq 4$, ce sont les inégalités (40) et (41) qui sont plus précises.

42. Applications générales du théorème (31). — Soient f et φ deux fonctions analytiques dans l'intervalle (AB) et telles que pour une certaine valeur de n, quel que soit λ, on a

$$\lambda f^{(n+1)}(x) + (1-\lambda)\varphi^{n+1}(x) \neq 0. \tag{44}$$

Dans ces conditions, on a le droit d'appliquer le théorème (31) relatif au polynome d'approximation ordinaire de degré n. En effet, la dérivée $\frac{\partial F}{\partial x}$ de

$$F(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\varphi(x) - R_n(x, \lambda)$$

ne peut s'annuler plus de n fois à cause de (44); par conséquent, F ne pourra avoir plus de $(n+2)$ maxima, dont deux seront nécessairement aux bords.

Supposons, en particulier, dans l'intervalle considéré

$$0 < f^{(n+1)} < \varphi^{(n+1)}. \tag{45}$$

On aura alors manifestement

$$\lambda f^{(n+1)} + (1-\lambda)\varphi^{(n+1)} = f^{(n+1)} + (1-\lambda)(\varphi^{(n+1)} - f^{(n+1)}) > 0.$$

A cause de (45),

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = f - \varphi - R_n$$

ne pourra s'annuler plus de $(n+1)$ fois, il s'annulera donc $(n+1)$ fois exactement, puisqu'il se réduit successivement à $\pm\frac{dL}{d\lambda}$ aux $(n+2)$ points d'écart maximum; de plus sa dérivée d'ordre $(n+1)$ étant négative, il doit devenir négatif après s'être annulé pour la dernière fois et sera, par conséquent, négatif au bord droit. Au contraire, la dérivée d'ordre $(n+1)$ de F étant positive, F qui s'annule $(n+1)$ fois deviendra positif au bord droit; on aura donc en ce point $L = F$ et $\frac{dL}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial\lambda} < 0$.

L'écart L sera, par conséquent, une fonction décroissante de λ, d'où cette proposition.

Si dans l'intervalle (AB) *on a constamment*

$$0 < f^{(n+1)}(x) < \varphi^{(n+1)}(x), \tag{45}$$

la meilleure approximation de f *par un polynome de degré* n *est plus petite que celle de* φ *dans cet intervalle.*

Nous pouvons en déduire quelques conséquences plus au moins évidentes, mais pour abréger l'écriture nous introduirons d'abord le symbole $L_n\big(f(x)\big)$ qui signifiera la meilleure approximation de $f(x)$ par un polynome de degré n dans l'intervalle considéré. Ainsi premièrement

Si

$$0 < \psi^{(n+1)}(x) < f^{(n+1)}(x) < \varphi^{(n+1)}(x),$$

on a également

$$L_n\big(\psi(x)\big) < L_n\big(f(x)\big) < L_n\big(\varphi(x)\big)$$

dans l'intervalle considéré.

Corollaire. — *Si dans l'intervalle* (AB)

$$|\,f^{(n+1)}(x)\,| < \varphi^{(n+1)}(x),$$

on a nécessairement

$$L_n(f) < 2L_n(\varphi).$$

En effet, d'après la proposition précédente, on aura

$$L_n(f+\varphi) < L_n(2\varphi), \qquad L_n(f-\varphi) < L_n(2\varphi);$$

donc

$$\mathrm{L}_n\left(\frac{f+\varphi+f-\varphi}{2}\right)=\mathrm{L}_n(f)<\mathrm{L}_n(2\varphi)=2\mathrm{L}_n(\varphi).$$

Corollaire. — *Si dans l'intervalle* (AB) *on a constamment pour une certaine valeur de* n

$$|f^{(n+1)}(x)|<kf^{(n+2)}(x),$$

on a nécessairement

$$\mathrm{L}_n(f)<2k\mathrm{L}_n(f'_x);$$

au contraire, pour une valeur de n *telle que*

$$f^{(n+1)}(x)>k\,|f^{(n+2)}(x)|,$$

on aura

$$\mathrm{L}_n(f)>\frac{k}{2}\mathrm{L}_n(f').$$

En effet, pour établir, par exemple, la première des inégalités, il suffira de poser dans le corollaire précédent $\varphi=kf'_x$.

Corollaire. — *Si dans l'intervalle* AB $(0\leqq \mathrm{A}<\mathrm{B})$, on a

$$f^{(n+1)}(x)>0,\qquad f^{(n+2)}(x)>0,$$

on aura nécessairement

$$\mathrm{L}_n(f)<\frac{1}{n+1}\mathrm{L}_n(xf'_x).$$

En effet, en posant

$$\varphi=\frac{xf'_x}{n+1},$$

on a

$$\varphi^{(n+1)}=\frac{xf^{(n+2)}}{n+1}+f^{(n+1)}>f^{(n+1)}>0.$$

Corollaire. — *Si dans l'intervalle* AB *de longueur* 2h *on a constamment* $N < f^{(n+1)}(x) < M$, *on aura*

$$\frac{2N}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} < L_n(f) < \frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}.$$

Pour le voir, il suffit de remarquer que la meilleure approximation $L_n(x^{n+1})$ est égale dans un intervalle de longueur $2h$ à $2\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}$.

Corollaire. — *Si dans un intervalle* AB *de longueur* 2h *on a* $|f^{(n+1)}(x)| < M$, *on aura nécessairement*

$$L_n(f) < \frac{4M}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}.$$

Remarque. — Rappelons que dans les mêmes conditions on peut affirmer au sujet de l'approximation fournie par la série de Taylor, qu'elle est inférieure à $\frac{M}{(n+1)!}h^{n+1}$ seulement.

43. Exemples. — *Quelle est la meilleure approximation* $L_{2m-1}(\sin x)$ *de* sin x *par un polynome de degré* 2m — 1 *dans l'intervalle* $(-h, +h)$, *où l'on suppose* $h \leqq \frac{\pi}{3}$?

Il est évident d'abord que $L_{2m-1}(\sin x) = L_{2m}(\sin x)$. Or en posant $n = 2m$, on voit que la dérivée $f^{(n+1)}(x)$ est ici $\pm \cos x$; donc $\frac{1}{2} < f^{(n+1)}(x) < 1$, et, d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{(2m+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2m+1} < L_n(\sin x) = L_{2m-1}(\sin x) < \frac{2}{(2m+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2m+1}.$$

Remarquons que le reste correspondant dans la série de Taylor est égal à $\frac{1-\varepsilon}{(2m+1)!}h^{2m+1}$, où ε tend rapidement vers 0 avec $\frac{1}{m}$.

Quelle est $L_n(e^x)$ *sur le segment* 01?

On vérifie immédiatement que

$$\frac{2}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} < L_n(e^x) < \frac{2e}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

44. ÉTUDE DE $L_n(x^m)$. — Nous allons borner notre étude au cas où m est entier et $m > n$. Dans ces conditions, on obtient immédiatement le développement trigonométrique de $(\cos t)^m$

$$(\cos t)^m = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^m = \frac{1}{2^{m-1}}\left[\cos mt + m\cos(m-2)t + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)t + \cdots\right],$$

et, en posant $x = h\cos t$, il vient

$$x^m = \frac{h^m}{2^{m-1}}\left[\mathrm{T}_m\left(\frac{x}{h}\right) + m\mathrm{T}_{m-2}\left(\frac{x}{h}\right) + \frac{m(m-1)}{2}\mathrm{T}_{m-4}\left(\frac{x}{h}\right) + \cdots\right],$$

où

$$\mathrm{T}_m(x) = \cos m \arccos x.$$

Considérons, pour fixer les idées, l'intervalle $(-1, +1)$; on posera alors $h = 1$, ce qui donnera

$$x^m = \frac{1}{2^{m-1}}\left[\mathrm{T}_m(x) + m\mathrm{T}_{m-2}(x) + \cdots\right]. \tag{46}$$

En rejetant le premier terme du second membre, on a un polynome approché de x^m de degré $m-2$ qui est précisément le polynome d'approximation de x^m.

En rejetant encore un terme, on a un polynome approché de x^m de degré $m-4$, etc. Il est facile d'ailleurs de calculer l'erreur correspondante, puisque $|\mathrm{T}_k(x)| \leqq 1$. On en conclut, par conséquent, que

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{L}_{m-3}(x^m) = \mathrm{L}_{m-4}(x^m) < \dfrac{m+1}{2^{m-1}}, \\ \mathrm{L}_{m-5}(x^m) = \mathrm{L}_{m-6}(x^m) < \dfrac{\dfrac{m(m-1)}{2} + m + 1}{2^{m-1}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{47}$$

dans l'intervalle $(-1, +1)$. On pourrait aussi obtenir des inégalités analogues, mais un peu moins précises, par les considérations du § 42.

Appliquons la formule (46) à une fonction $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots +$ dont le rayon de convergence est supérieur à 1.

On aura ainsi

$$(46^{\text{bis}})\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \frac{2}{2^2}a_2 + \frac{4.3}{2^4.2!}a_4 + \cdots + \frac{2l(2l-1)\ldots(l+1)}{2^{2l}.l!}a_{2l} + \cdots \\ &+ T_1(x)\left[a_1 + \frac{3}{2^2}a_3 + \frac{5.4}{2^4.2!}a_5 + \cdots + \frac{(2l+1)\ldots(l+2)}{2^{2l}.l!}a_{2l+1} + \cdots\right] \\ &+ T_2(x)\left[\frac{a_2}{2} + \frac{4}{2^3}a_4 + \frac{6.5}{2^5.2!}a_6 + \cdots + \frac{(2l+2)\ldots(l+3)}{2^{2l+1}.l!}a_{2l+2} + \cdots\right] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ T_n(x)\left[\frac{a_n}{2^{n-1}} + \frac{n+2}{2^{n+1}}a_{n+2} + \frac{(n+4)(n+3)}{2^{n+3}.2!}a_{n+4} + \cdots + \frac{(2l+n)\ldots(l+n+1)}{2^{2l+n-1}.l!}a_{2l+n} + \cdots\right] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Par conséquent, on voit que le reste $A_n[f(x)]$, qu'on obtient en s'arrêtant au terme de degré n, satisfait à l'inégalité

$$A_n[f(x)] \leqq \rho_n + \rho_{n+1} + \cdots,$$

où l'on a désigné par

$$\rho_n = \frac{1}{2^n}\left| a_{n+1} + \frac{n+3}{2^2}a_{n+3} + \frac{(n+5)(n+4)}{2^4.2!}a_{n+5} + \cdots\right|$$

la valeur absolue du coefficient de $T_{n+1}(x)$ dans le développement de $f(x)$ en série de polynomes trigonométriques.

A fortiori

$$(47^{\text{bis}})\qquad L_n[f(x)] < \rho_n + \rho_{n+1} + \cdots$$

45. Application du théorème de M. de la Vallée Poussin ou de l'inégalité (26). — Nous avons indiqué, à la fin du chapitre précédent, l'équivalence de l'inégalité (26) au théorème de M. de la Vallée Poussin. Sans revenir sur ce point et en laissant au lecteur le soin de vérifier que les conditions dans lesquelles nous allons nous placer nous sont imposées par la méthode du § 32, si nous y posons $\varphi(x) = x^{n+1}$, tandis que $f(x) = x^m$, nous pouvons procéder de la façon suivante :

Considérons l'ensemble de points $x_i = \cos\frac{i\pi}{n+1}$ $(i = 0, 1, \dots n+1)$ qui sont les $(n+2)$ racines de l'équation

$$S(x) = \sin(n+1)\arccos x \,.\, \sqrt{1-x^2} = 0,$$

et cherchons le polynome d'approximation de degré n de x^m pour cet ensemble de points. Ce polynome $P(x)$ satisfera aux $(n+2)$ équations

$$P(x_i) = x_i^m \pm \rho, \qquad (i = 0, 1, \dots n+1)$$

où ρ est la meilleure approximation sur cet ensemble.

On aura donc

$$P(x) = S(x)\sum_{i=0}^{i=n+1}\frac{x_i^m \pm \rho}{(x - x_i)S'(x_i)}, \tag{48}$$

et, en exprimant que $P(x)$ est un polynome de degré n, on a, pour déterminer ρ, l'équation

$$\sum_{i=0}^{i=n+1}\frac{x_i^m \pm \rho}{S'(x_i)} = 0,$$

où, en se souvenant des valeurs trouvées au § 39 pour $S'(x_i)$, on a

$$\pm\rho = \sum_{i=0}^{i=n+1}\frac{x_i^m}{S'(x_i)}. \tag{49}$$

Pour calculer cette somme, remarquons que

$$I = \sum_{i=0}^{i=n+1}\frac{f(x_i)}{S'(x_i)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{S(z)}, \tag{49bis}$$

C étant un contour entourant le segment $(-1, +1)$, à l'intérieur duquel $f(z)$ reste holomorphe.

Mais

$$S(z) = -2^n \cdot \left[z^{n+2} - \frac{n+3}{2^2} z^n + \frac{n^2+3n-2}{2^4 . 2!} z^{n-2} - \frac{(n-3)(n^2+3n-4)}{2^6 . 3!} z^{n-4} + \frac{(n-4)(n-5)(n^2+3n-6)}{2^8 . 4!} + \cdots \right],$$

d'où

$$(50) \qquad \frac{1}{S(z)} = -\frac{1}{2^n} \left[\frac{1}{z^{n+2}} + \frac{n+3}{2^2} \frac{1}{z^{n+4}} + \frac{(n+4)(n+5)}{2^4 . 2?} \frac{1}{z^{n+6}} + \cdots \right].$$

Donc

$$\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2k} \cdot \frac{(n+k+2)(n+k+3)\dots(n+2k+1)}{k!},$$

si $m = n + 2k + 1$. Au contraire, $\rho = 0$, si $m = n + 2k$.

Par conséquent,

$$(51) \qquad L_{n-1}(x^{n+2k+1}) = L_n(x^{n+2k+1}) \geqq \rho = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2k} \cdot \frac{(n+k+2)\dots(n+2k+1)}{k!}.$$

D'une façon plus générale, si

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

est une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1, on aura

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)\,dz}{s(z)} = \frac{-1}{2\pi i} \int_c \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots}{2^n} \left[\frac{1}{x^{n+2}} + \frac{n+3}{2^2} \frac{1}{x^{n+4}} + \cdots \right] dz =$$

$$= \frac{-1}{2^n} \left[a_{n+1} + \frac{n+3}{2^2} a_{n+3} + \frac{(n+4)(n+5)}{2^4 . 2!} a_{n+5} + \cdots \right];$$

de sorte que

$$(51^{\text{bis}}) \qquad L_n[f(x)] > \rho_n = \frac{1}{2^n} \left| a_{n+1} + \frac{n+3}{2^2} a_{n+3} + \frac{(n+4)(n+5)}{2^4 . 2!} a_{n+5} + \cdots \right|,$$

ρ_n ayant la même signification que dans le paragraphe précédent.

En rapprochant l'inégalité (51) des inégalités (47), on a finalement dans l'intervalle $(-1, +1)$

$$
(52)\quad
\left\{
\begin{aligned}
& \mathrm{L}_{m-1}(x^m) = \mathrm{L}_{m-2}(x^m) = \frac{1}{2^{m-1}},\\
& \frac{1}{2^{m-1}}\cdot m < \mathrm{L}_{m-3}(x^m) = \mathrm{L}_{m-4}(x^m) < \frac{1}{2^{m-1}}\cdot(m+1),\\
& \frac{1}{2^{m-1}}\cdot\frac{m(m-1)}{2!} < \mathrm{L}_{m-5}(x^m) = \mathrm{L}_{m-6}(x^m) < \frac{1}{2^{m-1}}\cdot\left[\frac{m(m-1)}{2!} + m + 1\right],\\
& \frac{1}{2^{m-1}}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)}{3!} < \mathrm{L}_{m-7}(x^m) = \mathrm{L}_{m-8}(x^m) <\\
& \qquad < \frac{1}{2^{m-1}}\cdot\left[\frac{m(m-1)(m-2)}{3!} + \frac{m(m-1)}{2!} + m + 1\right],\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
& \frac{1}{2^{m-1}}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-k+2)}{(k-1)!} < \mathrm{L}_{m-2k+1}(x^m) = \mathrm{L}_{m-2k}(x^m) <\\
& \qquad < \frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{m(m-1)\ldots(m-k+2)}{(k-1)!} + \cdots m + 1\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Plus k est petit, plus ces inégalités sont bonnes. Tant que $\frac{m-k+2}{k-1} > 2$, c'est-à-dire $m < 3k - 4$, la limite supérieure n'atteint pas le double de la limite inférieure. Des inégalités (52) on déduit des inégalités analogues relatives à l'intervalle 01, en posant $x^2 = z$. On aura ainsi, en désignant par $\mathrm{L}'_n(z^m)$ l'approximation de z^m par un polynome de degré n dans l'intervalle 01

$$
(52^{\text{bis}})\quad
\left\{
\begin{aligned}
& \mathrm{L}'_{m-1}(z^m) = \frac{1}{2^{2m-1}},\\
& \frac{1}{2^{2m-1}}\cdot 2m < \mathrm{L}'_{m-2}(z^m) < \frac{1}{2^{2m-1}}\cdot(2m+1),\\
& \frac{1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{2m(2m-1)}{2!} < \mathrm{L}'_{m-3}(z^m) < \frac{1}{2^{2m-1}}\cdot\left[\frac{2m(2m-1)}{2!} + 2m + 1\right],\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
& \frac{1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{2m(2m-1)\ldots(2m-k+2)}{(k-1)!} <\\
& \quad < \mathrm{L}'_{m-k}(z^m) < \frac{1}{2^{2m-1}}\left[\frac{2m(2m-1)\ldots(2m-k+2)}{(k-1)!} + \cdots + 2m + 1\right].
\end{aligned}
\right.
$$

En rapprochant les inégalités (47^{bis}) et (51^{bis}), on a

$$\rho_n < L_n[(f(x)] < \rho_n + \rho_{n+1} + \cdots \tag{53}$$

46. Considérations générales sur la meilleure approximation d'une fonction donnée par son développement de Taylor. — Soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

une fonction donnée par son développement de Taylor dont le rayon de convergence $R_1 > 1$. Nous verrons, dans la troisième partie, que la meilleure approximation d'une fonction quelconque, analytique ou non, $L_n(f)$ est supérieure à $\frac{k}{\log n} A_n(f)$, k étant une constante et $A_n(f)$ l'approximation qu'on obtient en s'arrêtant au polynome de degré n dans le développement de f suivant les polynomes trigonométriques (*). Dans le cas actuel, le procédé le plus simple pour obtenir ce développement sera d'appliquer la formule (46) aux termes successifs de $f(x)$, comme nous l'avons fait au § 44. On verra également plus loin que, B étant le point singulier de $f(x)$ qui se trouve sur la plus petite des ellipses homofocales ayant pour foyers $(-1, +1)$, $A_n(f)$, et par conséquent $L_n(f)$ également, satisfera à des inégalités de la forme

$$k\frac{1}{R''^n} < L_n(f) < k\frac{1}{R'^n},$$

où R'' et R' sont deux nombres quelconques $R'' > R > R'$ et R est la somme des demi-axes de l'ellipse homofocale passant par B. Si nous remarquons que le reste $r_n(f)$ correspondant de la série de Taylor, satisfait à des inégalités de la forme

$$\frac{k}{R_1''^n} < r_n(f) < \frac{k}{R_1'^n},$$

où $R_1'' > R_1 > R_1'$, nous voyons bien qu'il est impossible de donner une

(*) Théorème (53).

relation générale tant soit peu précise entre $L_n(f)$ et $r_n(f)$, ou bien entre $L_n(f)$ et R_1. Pour obtenir des résultats plus précis, il faudra avant tout connaître la position et, ensuite, la nature du point singulier B. Cela aura lieu en particulier si tous les signes des coefficients de $f(x)$ sont les mêmes ou changent alternativement (ce second cas se ramenant d'ailleurs au premier), puisque le point B se trouvera alors sur l'axe des x, et l'on aura $R = R_1 + \sqrt{R_1^2 - 1}$. Nous allons nous borner à examiner de plus près les cas où $f(x) = \frac{1}{R_1 - x}$, et celui où $f(x)$ est une fonction entière.

47. Étude de l'approximation des fonctions $\frac{1}{R_1 - x}$, e^x, etc., dans l'intervalle $(-1, +1)$. — 1° Soit d'abord

$$f(x) = \frac{1}{R_1 - x} = \frac{1}{R_1} + \frac{x}{R_1^2} + \cdots + \frac{x^n}{R_1^{n+1}} + \cdots$$

Nous aurons d'abord une limite inférieure de $L_n(f)$ par l'application de l'inégalité (51^{bis}).

Ainsi,

$$L_n\left(\frac{1}{R_1 - x}\right) > \frac{4}{(2R_1)^{n+2}}\left[1 + \frac{n+3}{2^2}\cdot\frac{1}{R_1^2} + \frac{(n+4)(n+5)}{2^4 . 2\,!}\cdot\frac{1}{R_1^4} + \frac{(n+5)(n+6)(n+7)}{2^6 . 3\,!}\frac{1}{R_1^6} + \cdots\right] =$$
$$= \frac{4}{(2R_1)^{n+2}} F\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+3}{2}, n+2, \frac{1}{R_1^2}\right),$$

en posant, comme il est convenu,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) . \beta(\beta+1)}{2\,!\,\gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$$

D'autre part, en appliquant l'inégalité (47^{bis}),

$$L_n\left(\frac{1}{R_1 - x}\right) < \frac{4}{(2R_1)^{n+2}}\left\{ F\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+3}{2}, n+2, \frac{1}{R_1^2}\right) + \left(\frac{1}{2R_1}\right) F\left(\frac{n+3}{2}, \frac{n+4}{2}, n+3, \frac{1}{R_1^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2R_1}\right)^2 F\left(\frac{n+4}{2}, \frac{n+5}{2}, n+4, \frac{1}{R_1^2}\right) + \cdots \right\}.$$

Or, il est aisé de voir que

$$\frac{F\left(\frac{n+k}{2}, \frac{n+k+1}{2}, n+k, \frac{1}{R_1^2}\right)}{F\left(\frac{n+k+1}{2}, \frac{n+k+2}{2}, n+k+1, \frac{1}{R_1^2}\right)} > \frac{1}{2},$$

puisque le $(p+1)^{\text{er}}$ terme du numérateur et du dénominateur sont respectivement

$$\frac{(n+k+p)\ldots(n+k+2p)}{p!}\cdot\frac{1}{(2R_1)^{2p}},$$

et

$$\frac{(n+k+p+1)\ldots(n+k+2p)}{p!}\cdot\frac{1}{(2R_1)^{2p}},$$

et ont donc pour rapport

$$\frac{(n+k+p)}{(n+k+2p)} > \frac{1}{2}.$$

Donc finalement

$$L_n\left(\frac{1}{R_1-x}\right) < \frac{2}{(2R_1)^{n+1}}\cdot\frac{1}{R_1-1}\cdot F\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+3}{2}, n+2, \frac{1}{R_1^2}\right).$$

Ainsi, on a

$$(53^{\text{bis}})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2}{(2R_1)^{n+1}}\cdot\frac{1}{R_1}\cdot F\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+3}{2}, n+2, \frac{1}{R_1^2}\right) < L_n\left(\frac{1}{R_1-x}\right) < \\ &\quad < \frac{2}{(2R_1)^{n+1}}\cdot\frac{1}{R_1-1}\cdot F\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+3}{2}, n+2, \frac{1}{R_1^2}\right). \end{aligned}\right.$$

On remarquera que le rapport entre les bornes dans l'inégalité (53^{bis}) tend vers 1, lorsque R_1 croît indéfiniment.

2° En reprenant l'inégalité générale

$$\rho_n < L_n[f(x)] < \rho_n + \rho_{n+1} + \cdots, \tag{53}$$

on voit que

$$\lim_{n=\infty} \frac{L_n[f(x)]}{\rho_n} = 1,$$

si

$$\lim_{n=\infty} \frac{\rho_{n+1} + \rho_{n+2} + \cdots}{\rho_n} = 0.$$

Cette circonstance se présentera assez souvent pour les fonctions entières. Ainsi, *si le développement de*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

est tel que

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = +\infty,$$

on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{L_n[f(x)]}{\rho_n} = 1.$$

En effet, dans ces conditions, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+2} + \dfrac{n+4}{2^2} a_{n+4} + \cdots}{a_{n+1} + \dfrac{n+3}{2^2} a_{n+3} + \cdots} = 0.$$

Soit, par exemple, $f(x) = e^x$. On trouve immédiatement

$$\lim_{n=\infty} L_n[e^x] \cdot 2^n \cdot (n+1)! = 1.$$

Considérons un autre cas général.

Si parmi les coefficients de $f(x)$ *il y en a une infinité* a_{n+1} *qui jouissent des propriétés que*

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 0$$

et que, quelque soit $k > 0$,

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+2k+1}}{a_{n+1}} \cdot \frac{(n+2k+1)\dots(n+k+2)}{k!} = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+2k+2}}{a_{n+1}} \cdot \frac{(n+2k+2)\dots(n+k+3)}{k!} = 0,$$

on aura

$$2^n . \lim_{n=\infty} \frac{L_n[f(x)]}{|a_{n+1}|} = 1,$$

pour les valeurs considérées de n.

En effet, la condition

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+2k+1}}{a_{n+1}} \cdot \frac{(n+2k+1)\dots(n+k+2)}{k!} = 0$$

a pour conséquence

$$\lim_{n=\infty} \frac{2^n \rho_n}{|a_{n+1}|} = 1.$$

Donc, pour n suffisamment grand,

$$1 < \frac{2^n . L_n[f(x)]}{|a_{n+1}|} < \left[1 + \left|\frac{\rho_{n+1}}{a_{n+1}}\right| + \dots + \left|\frac{\rho_{n+k}}{a_{n+1}}\right| + \dots\right];$$

et, en remarquant que

$$\lim_{n=\infty} \frac{2^k \rho_{n+k}}{a_{n+1}} = 0,$$

on a finalement

$$\lim_{n=\infty} \frac{2^n . L_n[(f(x)]}{|a_{n+1}|} = 1.$$

Soit, par exemple, $f(x) = \sin x$. On aura

$$\lim_{m=\infty} 2^{2m} . (2m+1)! \, L_{2m}(\sin x) = \lim_{m=\infty} 2^{2m} . (2m+1)! \, L_{2m-1}(\sin x) = 1.$$

De même,

$$\lim_{m=\infty} 2^{2m+1} . (2m+2)! \, L_{2m}(\cos x) = \lim_{m=\infty} 2^{2m+1} (2m+2)! \, L_{2m+1}(\cos x) = 1.$$

CHAPITRE V.

Le théorème de Weierstrass et ses généralisations.

48. Application de l'inégalité $\left| |x| - P_{2n}(x) \right| \leqq \frac{2}{\pi(2n+1)}$. — Il est bien connu aujourd'hui que le théorème général de Weierstrass sur l'approximation indéfinie des fonctions continues par des polynomes est une conséquence immédiate de la possibilité d'une telle approximation pour $|x|$. Il est également facile d'obtenir ainsi des indications assez précises sur l'ordre de l'approximation de plusieurs classes de fonctions. Nous allons nous borner à examiner deux classes de fonctions, en appliquant les formules d'interpolation rectiligne que j'ai données autrefois (*).

Soit $f(x)$ une fonction continue quelconque sur le segment 01, et soit $f_n(x)$ la fonction définissant l'ordonnée de la ligne brisée ayant pour sommet les points de la courbe $y = f(x)$, ou $x = \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots n)$. Cette ligne brisée a pour équation

$$y = f_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n-1} A_k \left| x - \frac{k}{n} \right| + A + Bx,$$

(*) *Sur l'interpolation*, Bulletin de la Société mathématique de France, 1905. Ces formules ont déjà été utilisées dans le même but par M. Potron : *Sur une formule générale d'interpolation*, Ibid., 1906.

où

$$(54)\begin{cases} A_k = \frac{n}{2}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k-1}{n}\right) - 2f\left(\frac{k}{n}\right)\right], \quad (k = 1, \dots n-1) \\ A = \frac{1}{2}\left[f(o) + nf\left(\frac{n-1}{n}\right) - (n-1)f(1)\right], \quad B = \frac{n}{2}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f(o) + f(1) - f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]. \end{cases}$$

Si l'on remplace $\left|x - \frac{k}{n}\right|$ par son polynome approché de degré $2p$, on obtient un polynome approché $f_{n,2p}$ de $f_n(x)$ qui donne manifestement

$$(54^{\text{bis}}) \qquad | f_n(x) - f_{n,2p}(x) | \leqq \frac{2}{\pi(2p+1)} \sum_{1}^{k-1} | A_k |.$$

49. Examen de deux cas particuliers. — *Premier cas*. La fonction $f(x)$ admet une dérivée à variation bornée (sur le segment 01).

Soit M la variation totale de $f'(x)$ et N le maximum de $|f'(x)|$. On aura évidemment $|f(x) - f_n(x)| < \frac{2N}{n}$ et, en vertu de (54) et (54^{bis}),

$$| f_n(x) - f_{n,2p}(x) | \leqq \frac{1}{\pi(2p+1)} \sum_{k=1}^{k=n-1} \left| f'\left(\frac{k+\theta_k}{n}\right) - f'\left(\frac{k-1+\theta_{k-1}}{n}\right)\right| \leqq \frac{M}{\pi(2p+1)},$$

où

$$| \theta_k | < 1.$$

Donc

$$| f(x) - f_{n,2p}(x) | \leqq \frac{2N}{n} + \frac{M}{\pi(2p+1)};$$

en faisant croître n indéfiniment, on voit qu'il existe un polynome $P_{2p}(x)$ de degré $2p$ qui dans l'intervalle 01 donne l'approximation

$$(55) \qquad | f(x) - P_{2p}(x) | \leqq \frac{M}{\pi(2p+1)}.$$

Ce résultat est équivalent à celui de M. de la Vallée Poussin (*).

(*) *Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes*, Bulletin de l'Académie des Sciences de Belgique, 1908.

Deuxième cas. — La fonction $f(x)$ satisfait à la condition de Dini-Lipschitz :

$$\lim_{h=0} [f(x+h)-f(x)] \cdot \log h = 0.$$

Soit

$$|f(x+h)-f(x)| \leqq \frac{\lambda(h)}{|\log h|},$$

on aura évidemment

$$|f(x)-f_n(x)| < \frac{2\lambda\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n};$$

d'autre part,

$$|f_n(x)-f_{n,2p}(x)| < \frac{n^2}{\pi(2p+1)} \cdot \frac{\lambda\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n}.$$

En posant $n^2 = 2p+1$, il vient par conséquent

$$(56) \qquad |f(x)-f_{n,2p}(x)| < \left(2+\frac{1}{\pi}\right) \cdot \frac{2\lambda\left(\frac{1}{n}\right)}{\log 2p+1}.$$

$\lambda\left(\frac{1}{n}\right)$ tendant vers 0, on a donc

$$\lim_{p=\infty} |f(x)-f_{n,2p}(x)| \log(2p+1) = 0.$$

Ce résultat, comme nous l'avons indiqué au § 22, est dû à M. Lebesgue. Remarquons d'ailleurs que dans l'inégalité (56) $\lambda\left(\frac{1}{n}\right)$ tendra vers 0 pour une infinité de valeurs de n, si la fonction $f(x)$ satisfait à une condition de Dini-Lipschitz généralisée au sens du § 22.

50. Première généralisation du théorème de Weierstrass. — *Le système de fonctions* $x^{\alpha_0}, x^{\alpha_1}, \dots x^{\alpha_n}, \dots$, *où* α_n *croît indéfiniment avec* n, *est complet sur le segment* 01, *si*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n}{n \log n} = 0.$$

On dit qu'un système de fonctions est complet dans un certain intervalle, si on peut représenter une fonction continue quelconque dans cet intervalle au moyen d'une suite limitée de ces fonctions avec une erreur aussi petite que l'on veut. Ceci posé, il suffira de prouver qu'on peut représenter x^p, où p est un entier donné quelconque, avec une erreur aussi petite que l'on veut au moyen d'une somme de la forme $A_p x^{\alpha_p} + \cdots + A_n x^{\alpha_n}$, en ayant recours seulement aux α_{n_1} supérieurs à p. *A fortiori*, il suffira de prouver que x peut être représenté avec une approximation aussi petite que l'on veut au moyen de la somme $A_p x^{\alpha_p - p+1} + \cdots + A_n x^{\alpha_n - p+1}$. Or, d'après le théorème (36), la meilleure approximation de x au moyen d'une telle somme est plus petite que la meilleure approximation au moyen d'une somme de puissances x^{β_n}, où $\beta_p > \alpha_p - p + 1, \ldots \beta_n > \alpha_n - p + 1$.

Posons, en particulier,

$$\beta_i = (i - p + 1)\gamma \cdot \log(n - p + 1) \geqq \alpha_i, \qquad (i = p, p+1, \ldots n)$$

en nous réservant de déterminer plus loin le nombre γ, et remarquons que les nombres β_i forment une progression arithmétique. Mais l'approximation de x au moyen de la suite $b_1 x^k + b_2 x^{2k} + \cdots + b_s x^{sk}$ dans l'intervalle 01 est naturellement la même que celle de $x^{\frac{1}{k}}$ au moyen $b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_s x^s$ dans le même intervalle qui est de l'ordre de $\frac{1}{s^{\frac{2}{k}}}$, comme on peut le reconnaître par des considérations analogues à celles des chapitres précédents et que nous vérifierons d'ailleurs par une méthode différente dans le chapitre suivant. Actuellement, on a $k = \gamma \cdot \log(n - p + 1)$ et $s = n - p + 1$. Donc l'approximation cherchée sera au plus de l'ordre de

$$\frac{1}{(n-p+1)^{\frac{2}{\gamma \log(n-p+1)}}} = \frac{1}{e^{\frac{2}{\gamma}}} = e^{-\frac{2}{\gamma}},$$

et elle tendra vers 0, si l'on peut faire γ aussi petit que l'on veut. Nous pouvons prendre γ égal à la plus grande des valeurs de $\frac{\alpha_i}{(i-p+1)\log(n-p+1)}$, pour $(i = p, p+1, \ldots n)$. Mais, p étant donné, on peut faire n assez grand pour que toutes ces valeurs soient inférieures à ε, ε étant un nombre aussi petit que l'on veut donné d'avance : on déterminera d'abord un nombre N assez grand pour qu'on ait $\frac{\alpha_n}{(n-p+1)\log(n-p+1)} < \varepsilon$, dès que $n \geqq N$; et ensuite on choisira n de la sorte que

$$\log(n-p+1) > \frac{\alpha_i}{(i-p+1)\varepsilon}, \qquad (i = p, p+1, \ldots, N).$$

Le théorème est donc démontré. Il est évident que l'intervalle 01 peut être remplacé par un intervalle quelconque AB $(0 \leqq A < B)$.

51. Seconde généralisation du théorème de Weierstrass. — *Le système de fonctions* $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots x^{\alpha_n}, \ldots$ *est complet dans l'intervalle* 01, *s'il existe deux nombres* H *et* K $(H > K > 0)$, *tels qu'il y a une infinité de nombres* α_n *compris entre* H *et* K.

Ainsi, d'après ce théorème, l'ensemble de fonctions

$$x\sqrt{x}, x\sqrt[4]{x}, x\sqrt{x}, \ldots$$

serait complet dans l'intervalle 01.

La démonstration s'appuie encore sur une proposition analogue au théorème (36) et qui résulte d'un raisonnement identique à celui par lequel ce dernier théorème a été établi. Voici cette proposition : *La meilleure approximation de* x^p *au moyen d'une suite de puissances* $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots x^{\alpha_n}$ *est plus petite que sa meilleure approximation au moyen de* $x^{\beta_1}, x^{\beta_2}, \ldots x^{\beta_n}$, *si* $p > \alpha_i > \beta_i > 0$.

D'autre part, rappelons et transformons l'une des inégalités (52^{bis})

$$L'_{m-k}(x^m) < \frac{1}{2^{2m-1}}\left[\frac{2m(2m-1)\ldots(2m-k+2)}{(k-1)!} + \cdots + 2m + 1\right] = C.$$

On a d'abord, en posant $m - k = S$,

$$C = \frac{1}{2^{2m-1}}[I_{s+1} + I_{s+2} + \cdots + I_{m-1} + I_m],$$

où

$$I_e = \frac{2m\ldots(m+l+1)}{(m-l)!} = I_0\frac{m(m-1)\ldots(m-l+1)}{(m+1)\ldots(m+l)}.$$

Donc,

$$\log I_l = \log I_0 + \log \frac{m(m-1)\dots(m-l+1)}{(m+1)\dots(m+l)} = \log I_0 + \left[\log\left(1-\frac{1}{m}\right) - \log\left(1+\frac{1}{m}\right)\right] +$$
$$+ \dots + \left[\log\left(1-\frac{l-1}{m}\right) - \log\left(1+\frac{l-1}{m}\right)\right] -$$
$$-\log\left(1+\frac{l}{m}\right) < \log I_0 - \frac{2}{m} - \frac{4}{m} - \dots - \frac{2(l-1)}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l^2}{2m^2} = \log I_0 - \frac{l^2}{m} + \frac{l^2}{2m^2}.$$

D'où

$$I_l < I_0 e^{-\frac{l^2}{m}+\frac{l^2}{2m^2}}.$$

Mais, pour $m > 1$, $l > 0$, on a

$$e^{-\frac{l^2}{m}+\frac{l^2}{2m^2}} < \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{\left(l-\frac{1}{2}\right)^2}{m}} + e^{-\frac{l^2}{m}}\right].$$

En effet, cette inégalité est équivalente à

$$e^{\frac{l^2}{2m^2}} < \frac{1}{2}\left[1 + e^{\frac{l}{m}-\frac{1}{4m}}\right]$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$f(u) = 2e^{\frac{u^2}{2}-u} - e^{-u} < e^{-\alpha},$$

si l'on pose

$$u = \frac{l}{m}, \qquad \alpha = \frac{1}{4m}.$$

Il s'agit donc de prouver cette dernière inégalité, lorsque $\alpha \leqq \frac{1}{8}$ et $1 \geqq u \geqq 4\alpha$. Or, il est aisé de voir que

$$f''(u) = e^{-u}\left[2e^{\frac{u^2}{2}}(u-1)^2 + 2e^{\frac{u^2}{2}} - 1\right] > 0.$$

Par conséquent, la plus grande valeur de $f(u)$ sera $f(1) = 2e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}$ ou bien $f(4\alpha) = 2e^{8\alpha^2-4\alpha} - e^{-4\alpha}$; mais chacune de ces valeurs est inférieure à $e^{-\alpha}$, si, comme on le suppose, $\alpha \leqq \frac{1}{8}$.

Ainsi,

$$I_l < \frac{1}{2} I_0 \left[e^{-\frac{\left(l-\frac{1}{2}\right)^2}{m}} + e^{-\frac{l^2}{m}} \right] < I_0 \int_{l-1}^{l} e^{-\frac{z^2}{m}} dz.$$

Donc,

$$C < \frac{I_0}{2^{2m-1}} \int_{s}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{m}} dz = \frac{I_0 \sqrt{m}}{2^{2m-1}} \int_{\frac{s}{\sqrt{m}}}^{\infty} e^{-t^2} dt < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{s}{\sqrt{m}}}^{\infty} e^{-t^2} dt,$$

car

$$\frac{I_0 \sqrt{m}}{2^{2m}} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2m-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2m} \cdot \sqrt{m} < \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Par conséquent, la meilleure approximation de x^m par un polynome de degré s sur le segment 01 satisfait à l'inégalité

$$L_s'(x^m) < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{s}{\sqrt{m}}}^{\infty} e^{-t^2} dt. \tag{57}$$

Cette approximation tend donc vers 0, si $\frac{s}{\sqrt{m}}$ croît indéfiniment (*).

Cela étant, considérons l'ensemble de puissances $x^{\frac{1}{s}}, x^{\frac{2}{s}}, \ldots x$. Je dis que, quel que soit $p > 1$, on peut prendre s assez grand, pour que l'approximation de x^p au moyen de cette suite soit aussi petite que l'on veut dans l'intervalle 01. En effet, cette approximation est la même que celle de x^{ps} au moyen d'un polynome de degré s, s'annullant à l'origine, c'est-à-dire inférieure à

$$2L_s'(x^{ps}) < \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{s}}{p}}^{\infty} e^{-t^2} dt^2.$$

(*) Le calcul que nous venons de faire conduit au résultat suivant, relatif au calcul des probabilités : *si la probabilité d'un événement* A *est égal* $\frac{1}{2}$, *et que le nombre d'expériences est égal à* $2m$ $(m > 1)$, *la probabilité de l'inégalité* $|m - m_1| \leqq z\sqrt{m}$, *où* m_1 *est le nombre d'apparition de l'événement, est supérieure à la fonction de Laplace*

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-t^2} dt,$$

qu'elle a, comme il est bien connu, pour limite, pour $m = \infty$.

Or, nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer $K = 1$, de sorte qu'en posant $\beta_i = \frac{i}{s}$ on ait toujours $\alpha_i > \beta_i$. La démonstration s'achève alors immédiatement, grâce à la proposition indiquée plus haut.

Il est évident que le théorème subsiste, si l'intervalle est remplacé 01 par un intervalle quelconque AB de l'axe des x positifs; on vérifiera même sans difficulté que si le segment AB n'a pas l'origine pour extrémité, les nombres H et K de l'énoncé n'ont pas besoin d'être positifs.

51^bis^. Condition nécessaire pour que l'ensemble des fonctions x^{α_1}, x^{α_2}, ... x^{α_n}, ... forme un système complet. — Nous avons recherché jusqu'ici des conditions *suffisantes* pour que le système de puissances $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots x^{\alpha_n}, \ldots$ soit complet sur un segment de l'axe positif.

Nous allons démontrer à présent que *la condition nécessaire pour que le système de fonctions* $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots x^{\alpha_n}, \ldots$ *soit complet sur le segment* 01 *(pour fixer les idées) est, qu'il soit impossible de former une suite de nombres positifs* $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, \ldots$, *telle que les séries* $\sum\limits_1^\infty \delta_n$ et $\sum\limits_1^\infty e^{-\alpha_n\delta_n}$ *convergent simultanément.*

En effet, si le système est complet, on pourra choisir n assez grand pour qu'on ait sur le segment 01,

$$| x^k + A_1 x^{\alpha_1} + \cdots + A_n x^{\alpha_n} | < \beta_n$$

k étant nombre positif donné, et $\lim\limits_{n=\infty} \beta_n = 0$. Donc, en posant $y = x(1 + \delta_n)$, on aura aussi

$$\left| \frac{y^k}{(1+\delta_n)^k} + \cdots + A_n \frac{y^{\alpha_n}}{(1+\delta_n)^{\alpha_n}} \right| < \beta_n$$

sur le segment $(0, 1 + \delta_n)$ et *a fortiori* sur le segment (01). En remplaçant y par x dans cette dernière inégalité, après l'avoir multiplié par $(1 + \delta_n)^{\alpha_n}$, on obtient

$$| (1+\delta_n)^{\alpha_n - k} x^k + \cdots + A_n x^{\alpha_n} | < \beta_n (1+\delta_n)^{\alpha_n};$$

en retranchant de la première inégalité on trouve ainsi

$$| [(1+\delta_n)^{\alpha_n - k} - 1] x^k + \cdots + B_{n-1} x^{\alpha_{n-1}} | < \beta_n [(1+\delta_n)^{\alpha_n} + 1],$$

ou

$$|x^k + \cdots + B'_{n-1}x^{\alpha_{n-1}}| < \beta_n \frac{(1+\delta_n)^{\alpha_n}+1}{(1+\delta_n)^{\alpha_n-k}-1}.$$

On en conclut que

$$\beta_{n-1} < \beta_n \frac{(1+\delta_n)^{\alpha_n}+1}{(1+\delta_n)^{\alpha_n-k}-1},$$

ou

$$\beta_n > \beta_{n-1} \cdot \frac{(1+\delta_n)^{\alpha_n-k}-1}{(1+\delta_n)^{\alpha_n}+1}.$$

Donc, finalement

$$\beta_n > \prod_{m=1}^{m=n} \frac{(1+\delta_m)^{\alpha_m-k}-1}{(1+\delta_m)^{\alpha_m}+1} = \prod_{m=1}^{m=n} \frac{1}{(1+\delta_m)^k} \cdot \prod_{m=1}^{m=n} \frac{1-\dfrac{1}{(1+\delta_m)^{\alpha_m-k}}}{1+\dfrac{1}{(1+\delta_m)^{\alpha_m}}}.$$

Donc β_n ne saurait tendre vers 0, si chacun des produits du second membre était convergent, ou, ce qui revient au même, si les séries $\sum \delta_m$ et $\sum \frac{1}{(1+\delta_m)^{\alpha_m}}$ étaient convergentes toutes les deux. Mais la première de ces séries est celle de l'énoncé et la seconde converge en même temps que la seconde série de l'énoncé $\sum e^{-\alpha_n\delta_n}$.

Corollaire. — *Le système* $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots x^{\alpha_n}, \ldots$ *ne peut être complet, si on a, quel que soit* n $(n > n_1)$,

$$\alpha_n \geqq n(\log n)^{2+\varepsilon}, \qquad \text{ou} \qquad \alpha_n \geqq n(\log n)^2(\log\log n)^{1+\varepsilon}, \text{ etc.,}$$

ε *étant un nombre positif quelconque.*

En effet, si on a, par exemple, $\alpha_n \geq n(\log n)^{2+\varepsilon}$, on posera

$$\delta_n = \frac{1}{2n(\log n)^{1+\varepsilon}},$$

de sorte que la série $\sum \delta_n$ convergera; mais alors la série

$$\sum e^{-\alpha_n\delta_n} \leqq \sum e^{-2.(\log n)} = \sum \frac{1}{n^2}$$

serait également convergente.

TROISIÈME PARTIE

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS CONTINUES EN SÉRIES DE POLYNOMES TRIGONOMÉTRIQUES.

CHAPITRE VI.

Étude de l'approximation fournie par des suites limitées de Fourier ou de polynomes trigonométriques.

52 Les séries trigonométriques et les séries de polynomes trigonométriques. — Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $(-1, +1)$. En posant $x = \cos t$, on a $f(x) = \varphi(t)$ qui est une fonction périodique de période 2π et paire de t. La fonction $\varphi(t)$ aura donc comme série de Fourier

$$A_0 + A_1 \cos t + \cdots + A_n \cos nt + \cdots,$$

où

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) \, . \, dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) \, . \, T_n(x) \, . \, dx}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned} \right.$$

où $T_n(x) = \cos n \arccos x$; ce développement est identiquement égal à

$$(59) \quad A_0 + A_1 T_1(x) + \cdots + A_n T_n(x) + \cdots,$$

qui est le développement en série de polynomes trigonométriques de la fonction donnée $f(x)$. L'étude de la convergence de cette dernière série ou bien de la valeur du reste qu'on obtient en prenant un nombre limité de ses termes se ramène donc toujours à l'étude correspondante de la série trigonométrique de $f(\cos t) = \varphi(t)$. Le polynome

$$P_n(x) = A_0 + A_1 T_1(x) + \cdots + A_n T_n(x),$$

qu'on obtient en rejetant les termes de degré supérieur à n dans le développement (59), jouira manifestement de la propriété de rendre minimum l'intégrale

$$\delta_n^2 = \int_{-1}^{+1} [f(x) - P_n(x)]^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et l'on a

$$\delta_n^2 = \pi [A_{n+1}^2 + A_{n+2}^2 + \cdots].$$

Donc

$$L_n^2 [f(x)] \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi L_n^2 [f(x)] > \delta_n^2.$$

D'où,

$$\sqrt{A_{n+1}^2 + A_{n+2}^2 + \cdots +} < L_n[f(x)] < | A_{n+1} | + | A_{n+2} | + \cdots \tag{53bis}$$

En se reportant au § 44, on voit que $A_{n+1} = \rho_n$; les inégalités (**53**bis) sont donc à rapprocher aux inégalités (53) : la borne inférieure que nous trouvons ici est plus précise que celle que nous avons obtenue antérieurement. Ces inégalités seront utiles pour l'étude de la meilleure approximation des fonctions analytiques (§ 47), mais elles seront, en général, insuffisantes pour les fonctions non analytiques.

53. Théorème. — *Si* $A_n(f)$ *est l'approximation fournie par le développement en série de polynomes trigonométriques limité au terme de degré* n, *on a*

$$L_n(f) > \frac{k}{\log(n+1)} A_n(f),$$

k *étant une constante déterminée; on a une inégalité analogue, si* $L_n(f)$

désigne la meilleure approximation au moyen d'une suite trigonométrique quelconque d'ordre n, $A_n(f)$ *étant l'approximation fournie par la série limitée de Fourier de même ordre.*

Ce théorème est une conséquence de la proposition suivante due à M. Lebesgue (*) : *Si* φ_n *est une suite trigonométrique d'ordre* n *telle que* $|f - \varphi_n| < \delta$, *on a nécessairement* $|f_n - \varphi_n| < k_1\delta \log(n+1)$, f_n *étant la suite limitée de Fourier de* f *du même ordre et* k, *une constante déterminée* (**). En effet, on conclut de là que, si $|f - \varphi_n| < \delta$, donc $|f - f_n| < \delta[1 + k_1 \log(n+1)]$, ce qui prouve l'exactitude du théorème, moyennant la remarque du paragraphe précédent.

54. Application a la fonction $|x|$. — Cherchons le développement de $|x|$ suivant les polynomes trigonométriques.

D'après les formules (58), les coefficients de ce développement sont

$$A_p = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\cos t| \cos ptdt, \qquad A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\cos t|\, dt = \frac{2}{\pi};$$

si p est impair, on a évidemment $A_p = 0$; si p est pair, il vient

$$A_p = \frac{y}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos ptdt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(p+1)t + \cos(p-1)t]\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{p+1} - \frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{p-1}\right] = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{\frac{p}{2}+1}}{p^2-1}.$$

Donc

$$|x| = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{T_2}{3} - \frac{T_4}{15} + \frac{T_6}{35} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}T_{2n}}{4n^2-1} + \cdots\right].$$

(*) *Sur les intégrales singulières*, Annales de Toulouse, 3me série, t. I, 1909, p. 118.

(**) Pour le calcul de la constante k, voir le mémoire cité de M. Lebesgue et aussi celui de M. Fejer : *Lebeguesche Konstanten und divergente Fourierreihe*, Journal für reine und angewandte Mathematik, t. CXXXVIII, 1910.

Par conséquent,

$$(6\cdot) \quad \left\{ \begin{aligned} & A_{2n} \, | \, x \, | = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{4(n+1)^2-1}+\frac{1}{4(n+2)^2-1}+\cdots\right]= \\ & =\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}+\cdots\right]=\frac{2}{\pi(2n+1)}. \end{aligned} \right.$$

Ce développement si simple de $|x|$ fournit, je crois, la plus petite approximation de $|x|$ obtenue jusqu'à présent. On voit que le théorème (53) permettrait d'affirmer que la meilleure approximation possible L_{2n} est supérieure à $\frac{2k}{\pi(n+1)\log(n+1)}$, et conduirait donc à une conclusion à peu près équivalente à celle du § 39.

55. Remarque. — M. Lebesgue (*loc. cit.*), qui avait obtenu une inégalité équivalente à l'inégalité (56) du § 49, en a déduit, grâce à sa proposition que nous avons indiquée au § 53, la convergence des séries de Fourier satisfaisant à une condition de Dini-Lipschitz. Cette conclusion subsiste manifestement pour les développements en série de polynomes trigonométriques. Mais, en tenant compte de la remarque faite à la fin du § 49, nous pouvons en conclure que, si c'est *la condition généralisée de Dini-Lipschitz qui est satisfaite, les développements considérés groupés convenablement deviennent également uniformément convergents.*

56. Théorème. — *Si une fonction satisfait à une condition de Lipschitz de degré $\alpha < 1$, les polynomes de degré* n, *qu'on obtient en appliquant le procédé de sommation de M. Fejer au développement en série de polynomes trigonométriques, fournissent une approximation de l'ordre de $\frac{1}{n^\alpha}$ au plus; dans le cas de $\alpha = 1$, cette approximation est au plus de l'ordre de $\frac{\log n}{n}$.*

Remarquons d'abord que si $f(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz de degré α, il en est de même de $\varphi(\theta) = f(\cos\theta)$; il nous suffira donc de démontrer la proposition équivalente relative à la série de Fourier.

Or, on sait (*) que,

$$\sigma_n = a_0 + a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + \cdots + b_n\sin n\theta$$

(*) Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 94.

étant une suite de Fejer d'ordre n relative à la fonction $\varphi(\theta)$, on a

$$R_n = \sigma_n - \varphi = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2[\varphi(\theta+2t)+\varphi(\theta-2t)-2\varphi(\theta)]\,dt.$$

Par hypothèse,

$$|\varphi(\theta+2t)-\varphi(\theta)| < Mt^{\alpha},$$

M étant un nombre fixe.

Donc

$$|R_n| < \frac{2M}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2\cdot t^{\alpha}dt < \frac{2M}{n\pi}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} n^2t^{\alpha}dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^{\alpha}}{\sin^2 t}dt\right]$$
$$< \frac{2M}{\pi n^{\alpha}}\left[\frac{1}{1+\alpha}+\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{1-\alpha}\right],$$

si $\alpha < 1$. De même, si $\alpha = 1$, on a

$$|R_n| < \frac{2M}{n\pi}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} n^2t\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\sin^2 t}dt\right] < \frac{M}{n}\left[\frac{1}{\pi}+\log 2n\right]. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

57. Remarques. — Cette proposition (*) ainsi que celles qui vont suivre complètent les résultats du chapitre II; ainsi, d'après le théorème (15), on sait que si l'approximation d'une fonction par un polynome de degré n peut (quel que soit n) être faite inférieure à $\frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{1+\epsilon}}$, la fonction satisfait à une condition de Lipschitz de degré α; au contraire, nous venons de voir que si cette approximation ne peut atteindre l'ordre $\frac{1}{n^{\alpha}}$, la fonction ne satisfait certainement pas à une condition de Lipschitz de degré α.

Comme nous l'avons déjà remarqué au § 19, il y aura pourtant des cas exceptionnels (ainsi, lorsque la meilleure approximation est de l'ordre $\frac{1}{n_{\alpha}\log n}$), où, en général, on ne pourra pas conclure de l'ordre de la meilleure approximation, si une condition de Lipschitz d'un degré determiné α existe ou non. Mais *on pourra, dans tous les cas, fixer le nombre α tel que des*

(*) Comparez avec les résultats du mémoire de M. Jackson cité au début.

conditions de Lipschitz de degrés inférieurs à α existent et supérieurs à α n'existent pas.

Une autre remarque à faire est relative à la différence essentielle, constatée également dans la première partie, entre l'influence des bords et des points intérieurs de l'intervalle sur la meilleure approximation par des polynomes de degré donné.

La nature de cette différence, que nous n'allons pas étudier ici en détail, est bien mise en évidence par l'exemple de la fonction $|x|^\alpha$, dont la meilleure approximation est, d'après le paragraphe précédent, de l'ordre de $\frac{1}{n^\alpha}$ (au plus) sur le segment $(-1, +1)$. Or, cette fonction étant paire, on en conclut, en posant $y = x^2$, qu'on aura la même approximation pour la fonction $y^{\frac{\alpha}{2}}$ sur le segment 01. On se rend compte par cet exemple qu'il arrivera, en général, que la même singularité qui, lorsqu'elle se rencontre en un point intérieur, augmente la meilleure approximation jusqu'à ε_n, n'augmentera cette approximation que jusqu'à l'ordre ε_n^2, si elle se trouve au bord.

58. Théorème. — *Si la dérivée* $f'(x)$ *de* $f(x)$ *satisfait à une condition de Lipschitz de degré α, la série de polynomes trigonométriques de* $f(x)$ *arrêtée au terme de degré* n *fournit une approximation d'ordre* $\frac{\log n}{n^{1+\alpha}}$ *au plus; si la dérivée est seulement bornée, cette approximation est de l'ordre de* $\frac{\log n}{n}$ *au plus.*

D'après le § 52, et en remarquant que $\varphi'(\theta) = -f'(x) . \sin\theta$ (si on pose $\varphi(\theta) = f(\cos\theta)$), nous pouvons nous borner à démontrer la propriété correspondante du reste de la série de Fourier de la fonction périodique $\varphi(\theta)$, dont la dérivée jouit des propriétés indiquées dans l'énoncé. On a (*), en désignant par S_n la suite limitée de Fourier d'ordre n de la fonction $\varphi(\theta)$,

$$R_n = S_n - \varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}[\varphi(\theta+2t)+\varphi(\theta-2t)-2\varphi(\theta)]\,dt.$$

(*) Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 56. Voyez aussi Lebesgue, *Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz*, Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXXVIII.

Posons

$$\frac{\varphi(\theta+2t)+\varphi(\theta-2t)-2\varphi(\theta)}{\sin t}=\psi(t)$$

et cherchons une limite supérieure du module de

$$\mathrm{I}=\psi(t+\delta)+\psi(t-\delta)-2\psi(t).$$

On aura

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}&=\frac{\varphi(\theta+2t+2\delta)+\varphi(\theta-2t-2\delta)-\varphi(\theta+2t)-\varphi(\theta-2t)}{\sin(t+\delta)}+\\
&+\frac{\varphi(\theta+2t-2\delta)+\varphi(\theta-2t+2\delta)-\varphi(\theta+2t)-\varphi(\theta-2t)}{\sin(t-\delta)}+\\
&+\Big[\varphi(\theta+2t)+\varphi(\theta-2t)-2\varphi(\theta)\Big]\left[\frac{1}{\sin(t+\delta)}+\frac{1}{\sin(t-\delta)}-\frac{2}{\sin t}\right]=\\
&=\frac{2\delta}{\sin(t+\delta)}\cdot[\varphi'(\theta+2t+2\delta')-\varphi'(\theta-2t-2\delta'')-\varphi'(\theta+2t-2\delta_1)+\varphi'(\theta-2t+2\delta_2)]+\\
&+2\delta\left[\frac{1}{\sin(t+\delta)}-\frac{1}{\sin(t-\delta)}\right]\Big[\varphi'(\theta+2t-2\delta_1)-\varphi'(\theta-2t+2\delta_2)\Big]+\\
&+\Big[\varphi(\theta+2t)+\varphi(\theta-2t)-2\varphi(\theta)\Big]\left[\frac{1}{\sin(t+\delta)}+\frac{1}{\sin(t-\delta)}-\frac{2}{\sin t}\right],
\end{aligned}$$

où

$$\delta_1<\delta,\qquad \delta_2<\delta,\qquad \delta'<\delta,\qquad \delta''<\delta.$$

Par conséquent, en supposant $\frac{\pi}{2}\geqq t>2\delta$, on a, en admettant que $\left|\frac{\varphi'(\theta)-\varphi'(\theta_1)}{(\theta-\theta_1)^\alpha}\right|<\mathrm{M}$,

$$\begin{aligned}
|\mathrm{I}|&<\delta\left[\frac{8\pi\delta^\alpha\mathrm{M}}{t-\delta}+\frac{4^\alpha\pi^2t^\alpha\delta\,.\,\mathrm{M}}{(t-\delta)^2}+\frac{4^\alpha\pi^3t^{1+\alpha}\delta\,.\,\mathrm{M}}{(t-\delta)^3}\right]<\\
&<\frac{\mathrm{M}\delta^{1+\alpha}}{t-\delta}\Big[8\pi+4\pi^2+16\pi^3\Big]=\frac{k_1\mathrm{M}\delta^{1+\alpha}}{t-\delta}.
\end{aligned}$$

De même, en admettant seulement que $|\varphi'(\theta)|<\mathrm{M}$, on a

$$|\mathrm{I}|<\delta\left[\frac{4\pi\mathrm{M}}{t-\delta}+\frac{\pi^2\mathrm{M}\delta}{(t-\delta)^2}+\frac{\pi^3\mathrm{M}\delta\,.\,t}{(t-\delta)^3}\right]<\frac{\mathrm{M}\delta}{t-\delta}(4\pi+\pi^2+2\pi^3)=\frac{k_2\mathrm{M}\delta}{t-\delta}.$$

D'autre part (en prenant n impair, pour fixer les idées), on a

$$\mathrm{R}_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \sin t \,.\, \psi\left(\frac{t}{2n+1}\right) dt = \frac{1}{(2n+1)\pi}\int_0^{\pi} \sin t \,.\, \psi\left(\frac{t}{2n+1}\right) dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi(2n+1)}\left\{\int_{\pi}^{2\pi} \sin t \,.\, \psi\left(\frac{t}{2n+1}\right) dt - \int_{2\pi}^{3\pi} \sin t \,.\left[\psi\left(\frac{t-\pi}{2n+1}\right)+\psi\left(\frac{t+\pi}{2n+1}\right)-2\psi\left(\frac{t}{2n+1}\right)\right] dt -\right.$$

$$-\int_{4\pi}^{5\pi} \sin t \,.\left[\psi\left(\frac{t-\pi}{2n+1}\right)+\psi\left(\frac{t+\pi}{2n+1}\right)-2\psi\left(\frac{t}{2n+1}\right)\right] dt - \dots -$$

$$\left.-\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin t \,.\left[\psi\left(\frac{t-\pi}{2n+1}\right)+\psi\left(\frac{t+\pi}{2n+1}\right)-2\psi\left(\frac{t}{2n+2}\right)\right] dt\right\}.$$

Donc dans le premier cas,

$$|\,\mathrm{R}_n\,| < \frac{12\mathrm{M}}{(2n+1)^{1+\alpha}} + \frac{k_1\mathrm{M}}{(2n+1)^{1+\alpha}} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{n\pi} \frac{dt}{t-\pi} < \frac{k\mathrm{M}\log n}{n^{1+\alpha}},$$

et dans le second cas,

$$|\,\mathrm{R}_n\,| < \frac{k\mathrm{M}\log n}{n}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

59. Théorème. — *Si une fonction* f(x) *admet une dérivée d'ordre* p *satisfaisant à une condition de Lipschitz de degré* α, *son développement en série de polynomes trigonométriques arrêté au terme de degré* n *fournit une approximation* $\mathrm{A_n(f)} < \frac{\mathrm{k \log n}}{\mathrm{n^{p+\alpha}}}$; *si la dérivée d'ordre* p *est seulement bornée, on a* $\mathrm{A_n(f)} < \frac{\mathrm{k \log n}}{\mathrm{n^p}}$; *si la dérivée d'ordre* p *est à variation bornée, on a* $\mathrm{A_n(f)} < \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n^p}}$, k *étant une constante.*

Remarquons d'abord que, si $f^{(p)}(x)$ satisfait à une des trois conditions indiquées, la dérivée $p^{\text{ème}}$ de $f(\cos\theta)$ par rapport à θ jouira de la même propriété. Il suffira donc de démontrer les inégalités correspondantes relatives aux séries de Fourier des fonctions périodiques. D'après ce qui précède, elles sont déjà démontrées dans le cas de $p=0$, $p=1$; la troisième des inégalités résulte d'ailleurs, quel que soit p, de la remarque que les coefficients A_n et B_n de Fourier sont dans ce cas inférieurs en valeur absolue à $\frac{k}{n^{p+1}}$. Attribuons maintenant à p une valeur entière quelconque. Soit, par exemple, p impair, $p = 2\mu + 1$. Si

$$\varphi(\theta) = A_0 + A_1 \cos\theta + B_1 \sin\theta + \cdots + A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta + \cdots,$$

on aura

$$\varphi^{(p-1)}(\theta) = (-1)^\mu [A_1 \cos\theta + B_1 \sin\theta + \cdots + n^{p-1}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + \cdots],$$

et, d'après le théorème (58),

$$|R_n| = |(n+1)^{p-1}[A_{n+1}\cos(n+1)\theta + B_{n+1}\sin(n+1)\theta] +$$
$$+ (n+2)^{p-1}[A_{n+2}\cos(n+2)\theta + B_{n+2}\sin(n+2)\theta] + \cdots | < \frac{k\log n}{n^{1+\alpha}},$$

si $\varphi^{(p)}(\theta)$ satisfait à une condition de Lipschitz de degré α; et $|R_n| < \frac{k\log n}{n}$, si $\varphi^{(p)}(\theta)$ est seulement bornée.

Par conséquent, en vertu du lemme d'Abel,

$$|\rho_n| = |A_{n+1}\cos(n+1)\theta + B_{n+1}\sin(n+1)\theta + A_{n+2}\cos(n+2)\theta +$$
$$+ B_{n+2}\sin(n+2)\theta + \cdots + | < \frac{|R_n|}{(n+1)^{p-1}} < \frac{k\log n}{n^{p+\alpha}}$$

dans le premier cas, et

$$|\rho_n| < \frac{k\log n}{n^p}$$

dans le second cas. C. Q. F. D.

60. Réciproque du théorème (23). — *Si une fonction* f(x) *admet des dérivées bornées de tous les ordres sur le segment* $(-1, +1)$, *on a*

$$\lim_{n=\infty} A_n(f) \,.\, n^p = 0,$$

quel que soit le nombre donné p.

C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

Remarque. — La série de polynomes trigonométriques converge dans ce cas uniformément ainsi que toutes les séries obtenues par différentiation terme à terme. On a là, par conséquent, une représentation des fonctions indéfiniment dérivables qui, au point de vue pratique, présente quelque avantage sur le développement proposé par M. Borel (*) dans sa thèse.

Démontrons encore le théorème suivant qui contient la réciproque du théorème (24).

61. Théorème. — *Si* f(x) *est une fonction holomorphe à l'intérieur de l'ellipse* E *ayant pour foyers les points* $(-1, +1)$ *et* R *pour somme des demi-axes, on a*

$$A_n(f) < \frac{2M}{(R-1) \cdot R^n},$$

M *étant le module maximum de* f *sur l'ellipse.*

En effet, on a

$$f(x) = A_0 + A_1 T_1(x) + \cdots + A_n T_n(x) + \cdots,$$

où

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos\theta) \cos n\theta d\theta,$$

et, en posant $e^{i\theta} = z$, on a

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right) \cdot \frac{z^n + z^{-n}}{z} \cdot dz,$$

l'intégrale étant prise le long de la circonférence C de rayon 1.

Mais, par hypothèse, $f(x)$ est holomorphe à l'intérieur de l'ellipse E. Or, x décrit l'ellipse E, lorsque z parcourt le cercle de rayon R ou bien celui de rayon $\frac{1}{R}$ ayant le centre à l'origine, car

$$x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\Upsilon + \frac{1}{\Upsilon}\right)\cos\varphi + i\left(\Upsilon - \frac{1}{\Upsilon}\right)\sin\varphi\right],$$

en posant $z = \Upsilon e^{i\varphi}$. Donc, $f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)$ est holomorphe entre ces deux cercles,

(*) *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 68.

que nous pouvons ainsi substituer à volonté au cercle C pour le calcul de A_n. Par conséquent,

$$|A_n| < \frac{2M}{R^n}. \tag{61}$$

D'où on tire immédiatement le résultat annoncé.

62. Applications. — 1° *Si la fonction* $f(x)$ *admet une dérivée bornée qui possède seulement des points de discontinuité de première espèce* (*) *dans le voisinage desquels cette dérivée satisfait à une condition de Lipschitz, la meilleure approximation de* $f(x)$ *est de l'ordre* $\frac{1}{n}$.

En effet, soit x_0 le point de discontinuité de la dérivée, où $f'(x_0+o) = M$, $f'(x_0-o) = N$. On pourra alors poser $f(x) = \frac{1}{2}(M-N)|x-x_0| + \varphi(x)$, la dérivée $\varphi'(x)$ satisfaisant à une condition de Lipschitz dans un certain intervalle entourant x_0.

Par conséquent, dans ce petit intervalle, la meilleure approximation de φ sera inférieure à $\frac{k\log n}{n^{1+\alpha}}$, et puisque celle de $|x-x_0|$ est de l'ordre de $\frac{1}{n}$, l'ordre de $L'_n(f)$ dans le même intervalle sera également $\frac{1}{n}$. Mais il est évident que l'approximation dans tout l'intervalle ne peut pas être plus petite que dans une de ses parties; elle sera donc nécessairement de l'ordre de $\frac{1}{n}$, car on peut mettre $f(x) = \sum_0^k B_k|x-x_k| + \psi(x)$ sous la forme d'une somme d'un nombre limité de termes dont chacun est susceptible dans tout l'intervalle d'une approximation de cet ordre.

2° *Si la partie réelle d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un cercle C satisfait à une condition de Lipschitz de degré* α *sur la circonférence, la partie imaginaire satisfait nécessairement à une condition de Lipschitz de degré* α_1, *quel que soit* $\alpha_1 < \alpha$, *sur la même circonférence.*

Soit, pour fixer les idées, 1 le rayon du cercle. Soit

$$P(\theta) = \sum_0^\infty A_p \cos p\theta + B_p \sin p\theta$$

la partie réelle sur la circonférence C.

(*) Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 1.

On aura, d'après ce qui précède,

$$|R_n(\theta)| = \left|\sum_{n+1}^{\infty} A_p \cos p\theta + B_p \sin p\theta\right| < \frac{k \log n}{n^\alpha},$$

et séparément

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} A_p \cos p\theta\right| < \frac{k \log n}{n^\alpha}, \qquad \left|\sum_{n+1}^{\infty} B_p \sin p\theta\right| < \frac{k \log n}{n^\alpha}.$$

Donc, en vertu du lemme d'Abel,

$$\left|\sum_{n+1} \frac{A_p}{p} \cos p\theta\right| < \frac{k \log n}{n^{1+\alpha}}, \qquad \left|\sum_{n+1}^{\infty} \frac{B_p}{p} \sin p\theta\right| < \frac{k \log n}{n^{1+\alpha}},$$

d'où on tire la conclusion voulue en appliquant les résultats du chapitre II.

En tenant compte du théorème 17, on voit même que

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} A_p \sin p\theta\right| < \frac{2^{2+\alpha} k \log n}{(2^{\frac{\alpha}{2}} - 1) \cdot n^\alpha},$$

mais on ne peut pas conclure de là que la partie imaginaire satisfait à une condition de Lipschitz de degré $\alpha_1 = \alpha$, une telle conclusion d'ailleurs serait inexacte, en général.

On démontrera à l'aide des mêmes considérations que si la série $\sum\limits_{n}^{\infty} A_n \cos nx$ n'est pas bornée, il en sera de même de

$$\sum_{n}^{\infty} A_n (\log n)^{1+\varepsilon} \sin nx, \qquad \sum_{n} A_n \log n \,.\, (\log\log n)^{1+\varepsilon} \sin nx, \text{ etc.}$$

Il en résultera, en particulier, que les séries telles que

$$\sum (\log n)^\varepsilon \frac{\sin nx}{n}, \qquad \sum (\log\log n)^\varepsilon \frac{\sin nx}{n}$$

ne peuvent pas être bornées.

CHAPITRE VII.

Démonstration de quelques propriétés générales des fonctions de deux variables réelles.

63. Remarques préliminaires. — Le lien très étroit que nous avons reconnu entre les propriétés différentielles d'une fonction et l'ordre de sa meilleure approximation par des polynomes de degrés donnés permet d'établir certaines propriétés des dérivées partielles des fonctions de plusieurs variables qu'il ne serait pas facile, il me semble, de démontrer directement. Nous nous bornerons, pour fixer les idées, aux fonctions de deux variables.

On sait bien, et l'exemple simple de la fonction $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$ (pour $x = y = 0$) en est la preuve, qu'une fonction de deux variables peut être analytique (holomorphe) par rapport à chacune d'elles dans une aire donnée sans même être continue par rapport à leur ensemble. Dans ce qui va suivre, nous allons préciser la nature de la fonction par rapport à chacune des variables pour en déduire des propriétés précises de la fonction par rapport aux deux variables.

Faisons d'abord une remarque très simple relative aux fonctions *périodiques*. Soit

$$f(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}[a_{pq}\cos px\cos qy + b_{pq}\cos px\sin qy + c_{pq}\sin px\cos qy + d_{pq}\sin px\sin qy]$$

un développement trigonométrique absolument et uniformément convergent. Convenons d'appeler module généralisé de $f(x, y)$ la somme

$$\boxed{f(x,y)} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}[|a_{pq}| + |b_{pq}| + |c_{pq}| + |d_{pq}|]$$

qui pourra être finie ou infinie. Ceci posé, il est facile de vérifier la remarque suivante :

Si $f(x, y)$ admet une dérivée partielle d'ordre k par rapport à x, et une dérivée partielle d'ordre k par rapport à y, et que celles-ci ont des modules généralisés finis inférieurs à M, toutes les dérivées partielles d'ordre k de $f(x, y)$ existeront, seront finies et continues et auront des modules généralisés inférieurs à $2M$.

En effet, par hypothèse,

$$\overline{\underline{\frac{\partial^k f}{\partial x^k}}} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} p^k [|a_{pq}| + |b_{pq}| + |c_{pq}| + |d_{pq}|] < M$$

et

$$\overline{\underline{\frac{\partial^k f}{\partial y^k}}} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} q^k [|a_{pq}| + |b_{pq}| + |c_{pq}| + |d_{pq}|] < M;$$

si la série

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} p^{k_1} q^{k_1}\Big[a_{pq}\cos\left(px + \frac{k_1\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(qy + \frac{k_2\pi}{2}\right) + b_{pq}\cos\left(px + \frac{k_1\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(qy + \frac{k_2\pi}{2}\right)$$
$$+ c_{pq}\sin\left(px + \frac{k_1\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(qy + \frac{k_2\pi}{2}\right) + d_{pq}\sin\left(px + \frac{k_1\pi}{2}\right)\sin\left(qy + \frac{k_2\pi}{2}\right)\Big]$$

converge absolument et uniformément, elle représente manifestement $\frac{\partial^{k_1+k_2} f}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}$. Mais, si $k_1 + k_2 = k$, on a certainement $p^k + q^k > p^{k_1}q^{k_2}$, puisque $\left(\frac{p}{q}\right)^{k_2} + \left(\frac{q}{p}\right)^{k_1} > 1$; il en résulte que

$$(62) \qquad \Sigma\, p^{k_1}q^{k_2}[|a_{pq}| + |b_{pq}| + |c_{pq}| + |d_{pq}|] < 2M. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

64. Théorème. — *Si dans une certaine aire* S *la fonction* f(x, y) *(périodique ou non) admet une dérivée partielle* $\frac{\partial^l f}{\partial x^l}$ *d'ordre* l *par rapport à* x *et une dérivée partielle* $\frac{\partial^l f}{\partial y^l}$ *d'ordre* l *par rapport à* y, *telles que, quel que soient* x, y *dans l'aire considérée, la première satisfait à une condition de Lipschitz de degré* α *par rapport à* x, *et la seconde satisfait à une condition de Lipschitz de degré* α *par rapport à* y : *toutes les dérivées partielles de* f(x, y) *d'ordre* l *existeront dans ces conditions dans une aire quelconque* S' *entièrement intérieure à* S, *et satisferont par rapport aux deux variables à des conditions de Lipschitz de degré* α_1, *quel que soit* $\alpha_1 < \alpha$.

Supposons d'abord la fonction $f(x, y)$ périodique de période 2π par rapport à chacune des variables et S un carré dont les côtés ont 2π pour longueur. Dans ces conditions, on pourra former le développement de Fourier

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}[a_{pq}\cos px\cos qy+b_{pq}\cos px\sin qy+c_{pq}\sin px\cos qy+d_{pq}\sin px\sin qy],$$

où

$$a_{pq}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x,y)\cos px\cos qy\,dx\,dy,\ \text{etc.}$$

On aura ainsi

$$S_n=\sum_{p=0}^{p=n}\sum_{q=0}^{q=n}[a_{pq}\cos px\cos qy+\cdots+d_{pq}\sin px\sin qy]=$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\cdot\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}$$
$$\cdot[f(x+2t,y+2\theta)+f(x-2t,y+2\theta)+f(x+2t,y-2\theta)+f(x-2t,y-2\theta)]\,dt\,d\theta.$$

Donc

$$R_n=S_n-f(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\cdot\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}$$
$$\cdot\{[f(x+2t,y+2\theta)+f(x-2t,y+2\theta)-2f(x,y+2\theta)]+$$
$$+[f(x+2t,y-2\theta)+f(x-2t,y-2\theta)-2f(x,y-2\theta)]+$$
$$+2[f(x,y+2\theta)+f(x,y-2\theta)-2f(x,y)]\}\,dt\,d\theta.$$

Or, chacune des intégrales telles que

$$\rho_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}[f(x+2t,y+2\theta)+f(x-2t,y+2\theta)-2f(x,y+2\theta)]\,dt$$

est, en vertu du théorème (59), inférieure à $\frac{k\log n}{n^{l+\alpha}}$.

Par conséquent,

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}\cdot\rho_n\,d\theta\right|<\frac{k\log n}{n^{l+\alpha}\cdot\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}\right|d\theta$$
$$<\frac{k_1\log^2 n}{n^{l+\alpha}}.$$

Donc

$$(63) \qquad | R_n | < \frac{k_2 \log^2 n}{n^{l+\alpha}},$$

k_2 étant une constante déterminée. Il suffira à présent d'écrire f sous forme d'une série simple

$$(64) \qquad f = S_1 + (S_2 - S_1) + \cdots + (S_n - S_{n-1}) + \cdots$$

pour en tirer la conclusion voulue au moyen de la remarque (18) du chapitre II. Avant de passer au cas des fonctions non périodiques, nous pouvons remarquer que pour les fonctions périodiques nous n'avons pas dû introduire d'aire S' intérieure au carré des périodes S, la conclusion est vraie pour le carré entier; il en sera, peut-être, de même dans le cas général, mais nous n'allons pas approfondir ici cette question, nous bornant à démontrer le théorème tel qu'il est énoncé.

Nous pouvons, par hypothèse, entourer un point quelconque M de l'aire S' par un carré de dimensions déterminées non extérieur à S, et par conséquent, sans restreindre la généralité, on peut réduire l'aire S à un carré ayant pour côtés les droites $x = \pm 1$ et $y = \pm 1$. En posant ensuite $x = \cos u$, $y = \cos v$, on a $f(x, y) = f(\cos u, \cos v) = \varphi(u, v)$, la fonction $\varphi(u, v)$ étant périodique et satisfaisant aux conditions de l'énoncé dans le carré des périodes. D'après ce qui vient d'être démontré, toutes les dérivées $\frac{\partial^l \varphi}{\partial u^{l_1} \partial v^{l_2}}$, $(l_1 + l_2, = l)$ existeront et satisferont à des conditions de Lipschitz de degré $\alpha_1 < \alpha$. Or

$$\frac{\partial^l f}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} = \sum_{i=0}^{i=l_1} \sum_{k=0}^{k=l_2} A_{ik} \frac{\partial^{i+k} \varphi}{\partial u^i \partial v^k},$$

les coefficients A_{ik} étant bornés à l'intérieur d'une aire quelconque S' entièrement intérieure au carré S; le théorème se trouve ainsi démontré.

65. Application. — *Si* z *satisfait dans une certaine région* S *aux deux équations :*

$$\frac{\partial^k z}{\partial x^k} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \cdots \frac{\partial^{k-1} z}{\partial x \partial y^{k-2}}, \frac{\partial^{k-1} z}{\partial y^{k-1}}\right), \qquad \frac{\partial^k z}{\partial y^k} = \varphi\left(x, y, z, \cdots \frac{\partial^{k-1} z}{\partial x \partial y^{k-2}}, \frac{\partial^{k-1} z}{\partial y^{k-1}}\right),$$

f et φ ayant des dérivées partielles bornées de tous les ordres pour toutes les valeurs réelles bornées des variables, si on admet de plus que les dérivées partielle $\frac{\partial^{k-1}z}{\partial x^{k-1}}$ et $\frac{\partial^{k-1}z}{\partial y^{k-1}}$ existent dans la région S, où la première satisfait à une condition de Lipschitz par rapport à x, et la seconde à une condition de Lipschitz par rapport à y de degrés aussi petits qu'on veut, la fonction z aura des dérivées bornées de tous les ordres dans toute région S′ entièrement intérieure à S.

En effet, d'après le théorème précédent, toutes les dérivées d'ordre $(k - 1)$ satisferont à une condition de Lipschitz, il en sera donc de même de $\frac{\partial^k z}{\partial x^k}$ et $\frac{\partial^k z}{\partial y^k}$ et par conséquent aussi de toutes les dérivées d'ordre k. En différentiant ensuite la première des équations par rapport à x et la seconde par rapport à y, on constate l'existence des dérivées d'ordre $k+1$, $\frac{\partial^{k+1}z}{\partial x^{k+1}}$ et $\frac{\partial^{k+1}y}{\partial y^{k+1}}$ satisfaisant également à une condition de Lipschitz; et en continuant ainsi de proche en proche on arrive aux dérivées d'un ordre déterminé quelconque qui satisferont dans une région S′ à une condition de Lipschitz et *a fortiori* devront être bornées.

66. Théorème. — *Si dans une certaine région S, f(x, y), considérée comme fonction de x seul, ou de y seul, admet des dérivées bornées de tous les ordres par rapport à chacune des variables prise isolément, elle admet également dans la même région des dérivées partielles bornées de tous les ordres par rapport aux deux variables ensemble.*

Il suffira d'examiner le cas où S est le carré formé par les droites $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. On pourra alors utiliser l'égalité (64), en y remplaçant les fonctions trigonométriques par les polynomes trigonométriques, et on pourra ainsi, grâce à l'inégalité (63), appliquer le théorème (23) pour obtenir la conclusion annoncée.

67. Théorème. — *Soit f(x, y) une fonction de deux variables réelles (x, y) déterminée à l'intérieur du carré C formé par les droites x = ± 1, y = ± 1. Si, quel que soit x_0 $(-1 \leqq x_0 \leqq 1)$, $f(x_0, y)$ considérée comme fonction de y est analytique et son module reste inférieur à M à l'intérieur de l'ellipse E (du plan de la variable complexe y) ayant (— 1, + 1) pour* *foyers et* R *pour somme des demi-axes; et si de même, quel que soit* $y_0 (-1 \geqq y_0 \geqq 1)$, $f(x, y_0)$ *considérée comme fonction de* x *est analytique et son module reste inférieur à* M *à l'intérieur de l'ellipse* E_1 (*du plan de la variable complexe* x) *ayant* $(-1, +1)$ *pour foyers et* R *pour somme des demi-axes : dans ces conditions*, $f(x, y)$ *est analytique par rapport aux deux variables* x, y *ensemble et son module reste inférieur à* $\frac{4M}{(1-\lambda)^2}$, *lorsque* x *et* y *deviennent complexes et se trouvent en même temps la première dans l'ellipse* ε_1 *homofocale à* E_1 *et ayant* ρ_1 *pour somme des demi-axes, la seconde dans l'ellipse* ε *homofocale à* E *et ayant* ρ *pour somme des demi-axes, si* $\frac{\rho\rho_1}{R} = \lambda^2 < 1$.

En effet, on a

$$f(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{pq} T_p(x) \,.\, T_q(y), \tag{65}$$

avec

$$a_{pq} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos u, \cos v) \cos pu, \cos qv \, du dv,$$

si $p > 0$, $q > 0$, et des expressions analogues pour a_{oq}, a_{po}. Donc à cause de l'inégalité (61), on a

$$| a_{pq} | < \frac{2M}{\pi R^p} \int_{-\pi}^{\pi} | \cos qv | \, dv < \frac{4M}{R^p},$$

et de même en changeant l'ordre des intégrations

$$| a_{pq} | < \frac{4M}{R^p}.$$

Par conséquent, si x et y se trouvent respectivement dans les ellipses ε_1 et ε, le module du terme général de la série (65) sera, en vertu de l'inégalité (9), inférieur à

$$\frac{4M \rho_1^p \rho^q}{R^{\frac{\alpha p + \beta q}{\alpha + \beta}}},$$

quels que soit les nombres positifs α, β, qu'on déterminera par l'équation

$$\frac{\rho_1}{R^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}} = \frac{\rho}{R^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} = \lambda.$$

Ainsi le terme général aura son module inférieur à $4M\lambda^{p+q}$. Donc la somme des modules des termes de la série $f(x, y)$ sera inférieure à

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} 4M\lambda^{p+q} = \sum_{n=0}^{\infty} 4M(n+1)\lambda^n = \frac{4M}{(1-\lambda)^2}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Il est évident que dans l'énoncé précédent les segments $(-1, +1)$ des axes réels dans le plan de chacune des variables complexes peuvent être remplacés par des segments quelconques de longueur $2h$ de ces plans, les ellipses correspondantes ayant toujours les extrémités des segments pour foyers, seulement on aura $\lambda^2 = \frac{\rho_1\rho}{hR}$.

TABLE DES MATIÈRES