Многоуважаемому Алексею Петровичу Полякову отъ автора

С. Н. Бернштейнъ.

О наилучшемъ приближенiи непрерывныхъ функцiй посредствомъ многочленовъ.

(Рѣчь, произнесенная при публичной защитѣ докторской диссертацiи 19 мая 1913 года).

ХАРЬКОВЪ.
Типографiя и Литографiя М. Зильберберсъ и С-вья.
Донецъ-Захаржевская ул., соб. д., № 7.
1914.

О наилучшемъ приближенiи непрерывныхъ функцiй посредствомъ многочленовъ.

(Рѣчь, произнесенная при публичной защитѣ докторской диссертацiи 19 мая 1913 г.).

Работа, которую я имѣлъ честь представить въ прошломъ году физико-математическому факультету Харьковскаго Университета на соисканiе степени доктора чистой математики,носитъ названiе «О наилучшемъ приближенiи непрерывныхъ функцiй при помощи многочленовъ данной степени». Терминъ наилучшее приближенiе понять не трудно. Какъ въ чистой математикѣ, такъ и во всевозможныхъ ея приложенiяхъ, постоянно приходится замѣнять сложныя функцiи приближенными выраженiями опредѣленнаго вида, напр., многочленами данной степени; при этомъ требуется, чтобы ни для одного изъ разсматриваемыхъ значенiй перемѣнной ошибка не превышала нѣкотораго даннаго числа ε. Важно подобрать коэффицiенты многочлена такъ, чтобы ошибка ε была возможна мала; эта наименьшая возможная ошибка и есть наилучшее приближенiе при помощи многочленовъ данной степени въ разсматриваемой области.

Понятiе наилучшаго приближенiя введено въ науку знаменитымъ русскимъ математикомъ П. Л. Чебышевымъ, который посвятилъ этому вопросу рядъ глубокихъ изслѣдованiй, открылъ важнѣйшiя общiя свойства многочленовъ, дающихъ наилучшее приближенiе, и вычислилъ ихъ въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ. Вопросы, выдвинутые Чебышевымъ, привлекли къ себѣ впослѣдствiи вниманiе многихъ выдающихся математиковъ, но никто изъ нихъ не внесъ въ эту область столько новыхъ и оригинальныхъ идей, какъ самъ ея генiальный основатель. Однако ни въ одной изъ работъ Чебышева о наилучшемъ приближенiи или его приложенiяхъ, мы не находимъ указанiй на то, чтобы великiй русскiй математикъ интересовался основнымъ вопросомъ, возможно ли для всякой непрерывной функцiи сдѣлать ошибку сколь угодно малой, если достаточно увеличить степень приближенныхъ многочленовъ.

Честь отвѣта, оказавшагося утвердительнымъ, на этотъ глубоко важный вопросъ, принадлежитъ другому знаменитому математику—Вейерштрассу. Открытіе Вейерштрасса, давшее прочную основу теоріи функцій вещественной перемѣнной, направило по новому пути изслѣдованія о приближеніи функціи.

Если направленіе, непосредственно созданное Чебышевымъ, можно охарактеризовать довольно точно названіемъ алгебраическаго, то направленіе, возникшее подъ вліяніемъ Вейерштрасса, правильно было бы назвать аналитическимъ.

Для Чебышева и его учениковъ вопросъ о наилучшемъ приближеніи носитъ характеръ по преимуществу алгебраическій, они предпочитаютъ сузить задачу лишь бы только получить ея рѣшеніе въ опредѣленной конечной формѣ. Впрочемъ, какъ и многіе другіе основатели научныхъ и философскихъ системъ, Чебышевъ самъ является менѣе ортодоксальнымъ послѣдователемъ собственной школы, чѣмъ его ближайшіе ученики, и не вполнѣ чуждъ направленія, которое мы назвали аналитическимъ. Дѣло въ томъ, что увлеченіе теоріей механизмовъ заставило Чебышева ставить себѣ задачи алгебраически явно неразрѣшимыя, и ему принадлежитъ первая попытка болѣе или менѣе общаго метода для приближеннаго вычисленія наилучшаго приближенія. Но, какъ истинный классикъ, Чебышевъ ограничивается разсмотрѣніемъ функцій, разлагающихся въ строку Тэйлора, предполагая вдобавокъ члены этой строки быстро убывающими, что, конечно, можетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, когда радіусъ сходимости строки весьма великъ по сравненію съ промежуткомъ, гдѣ разсматривается функція.

Кромѣ того, преслѣдуя опредѣленныя практическія цѣли, Чебышевъ останавливаетъ все свое вниманіе на многочленахъ малыхъ степеней. Не удивительно поэтому, что отъ него ускользнулъ подробно изслѣдованный мною общій законъ убыванія наилучшаго приближенія аналитическихъ функцій, который не находится въ простой зависимости отъ разсматриваемыхъ Чебышевымъ коэффиціентовъ строки Тэйлора, но непосредственно связанъ съ расположеніемъ комплексныхъ особенностей функціи, причемъ сумма полу-осей нѣкотораго эллипса играетъ здѣсь ту же роль, что и радіусъ сходимости для строки Тэйлора.

Однако, упомянутая попытка Чебышева, приближающая его къ аналитическому направленію, стоитъ одиноко и никѣмъ изъ его учениковъ возобновлена не была; наиболѣе выдающіеся изъ нихъ, Е. Золотаревъ и братья А. А. и В. А. Марковы, развили алгебраическія идеи великаго учителя и получили еще нѣсколько важныхъ алгебраическихъ теоремъ. Но, со смертью Чебышева, прекратились и изслѣдованія его учениковъ въ излюбленной имъ области, и за послѣднія 20 лѣтъ не появилось ни одной значительной работы алгебраическаго направленія.

Чѣмъ же это объяснить? Причину этого историческаго факта нельзя видѣть въ какихъ нибудь случайныхъ внѣшнихъ условіяхъ, т. к. цѣлый рядъ задачъ, завѣщанныхъ Чебышевымъ въ другихъ областяхъ, были удачно разрѣшены его учениками. Причина, слѣдовательно, лежитъ глубже, въ самомъ существѣ поставленныхъ проблеммъ; ее нужно искать въ естественномъ процессѣ развитія математическихъ идей, который, въ первомъ приближеніи, можно выразить краткой формулой: отъ конечнаго къ безконечному, отъ равенствъ къ неравенствамъ, отъ алгебры къ анализу.

Мнѣ незачѣмъ далеко ходить за примѣрами для подтвержденія этой формулы; они у всѣхъ передъ глазами: такова схема развитія основныхъ понятій числа и функціи, такова формула великой математической революціи 17-го столѣтія, создавшей и выдвинувшей на первое мѣсто анализъ безконечно малыхъ. Но однимъ изъ примѣровъ наиболѣе яркихъ является важнѣйшая область современнаго анализа—теорія дифференціальныхъ уравненій. Долгое время математики ограничивались конечнымъ или алгебраическимъ интегрированіемъ дифференціальныхъ уравненій, но послѣ разрѣшенія многихъ интересныхъ задачъ, уравненія, разрѣшимыя этимъ способомъ, были фактически исчерпаны, и нужно было, либо отказаться отъ дальнѣйшаго прогресса, либо отрѣшиться отъ формальной точки зрѣнія и стать на новый аналитическій путь. Аналитическое направленіе въ теоріи дифференціальныхъ уравненій утвердилось недавно; и еще семь лѣтъ тому назадъ покойный проф. А. Н. Коркинъ въ бесѣдѣ со мной пренебрежительно отзывался о „декадентскихъ" изслѣдованіяхъ Poincaré. Но въ виду блестящихъ ежедневныхъ успѣховъ новыхъ идей, плодотворность и жизненность ихъ не подлежитъ уже никакому сомнѣнію, и теперь никто не станетъ серьезно возражать противъ того, что теорія конечнаго интегрированія потеряла самостоятельное значеніе, и является только частью быстро разрастающейся общей или аналитической теоріи дифференціальныхъ уравненій.

Въ такомъ же положеніи, какъ дифференціальныя уравненія, находится, повидимому, и теорія наилучшаго приближенія функцій. Достаточно указать, что сравнительно элементарная задача, которую поставилъ себѣ Золотаревъ, приводитъ къ уравненію, алгебраически разрѣшимому лишь въ частныхъ случаяхъ или замѣтить, что простой вопросъ о построеніи прямой линіи, наименѣе уклоняющейся въ данномъ промежуткѣ, напр., отъ синусоиды, приводитъ къ трансцендентному уравненію. Алгебраическій методъ, разрѣшивъ нѣсколько основныхъ вопросовъ, и здѣсь очевидно, исчерпалъ важнѣйшія, доступныя ему, задачи и уперся въ тупикъ, изъ котораго нѣтъ другого исхода, какъ новая постановка проблеммъ въ духѣ общей теоріи функцій.

И дѣйствительно, въ то время, какъ алгебраическое направленіе фактически перестаетъ подавать признаки жизни, аналитическое направленіе, о которомъ я упомянулъ въ началѣ, дѣлаетъ быстрые успѣхи. Основной вопросъ, поставленный имъ, есть вопросъ о законѣ убыванія наилучшаго приближенія функціи при возрастаніи степени приближеннаго многочлена. Изслѣдованія Lebesgu'a, de la Vallée Poussin'a, Джексона и мои въ существенныхъ чертахъ вполнѣ разрѣшили этотъ вопросъ. Эти работы показали, что наилучшее приближеніе весьма тѣсно и просто связано съ основными дифференціальными свойствами функціи; такъ что, напримѣръ, если въ нѣкоторомъ промежуткѣ функція не имѣетъ производной, то мы никогда не выразимъ ее при помощи многочлена данной достаточно высокой степени съ такой точностью, какъ, если производная существуетъ. Если существуютъ всѣ производныя, то возможно будетъ еще гораздо лучшее приближеніе. Но наилучшее приближеніе при возрастаніи степени n лишь тогда будетъ уменьшаться быстрѣе, чѣмъ члены нѣкоторой убывающей геометрической прогрессіи когда функція будетъ аналитической, т. е. разлагаемой въ строку Тэйлора.

Такимъ образомъ чисто практическій вопросъ о возможности болѣе или менѣе точнаго приближенія функціи оказывается глубоко связаннными съ ея математической природой, и эта совершенно новая точка зрѣнія опять выдвигаетъ впередъ аналитическую функцію, но не какъ функцію комплексной перемѣнной, а какъ функцію, обладающую важными вещественными свойствами.

Не останавливаясь на томъ, что̀ именно сдѣлано каждымъ изъ упомянутыхъ авторовъ, т. к. это отняло бы у меня слишкомъ много времени, замѣчу только, что болѣе подробныя свѣдѣнія обо всемъ этомъ имѣются въ моей рѣчи, произнесенной въ прошломъ году на международномъ конгрессѣ математиковъ въ Кембриджѣ. Въ этой же рѣчи, которая можетъ служить введеніемъ въ аналитическую теорію наилучшаго приближенія, вы найдете, между прочимъ, что изслѣдованіе наилучшаго приближенія заставило меня обратить вниманіе на нѣкоторыя новыя дифференціальныя свойства функцій, которыя я назвалъ обобщенными условіями Липшица.

Указанные общіе результаты не только представляютъ несомнѣнный теоретическій интересъ, но имѣютъ и большое практическое значеніе, т. к. въ большинствѣ случаевъ они обнаруживаютъ, что приближенные многочлены, полученные нѣкоторыми общими простыми способами, даютъ приближеніе того же порядка, что и наилучшее возможное приближеніе, и поэтому нѣтъ никакой надобности производить новыхъ болѣе сложныхъ вычисленій. Напр., нетрудно построить многочленъ 10-й степени, который представилъ бы $\log(5-3x)$ въ промежуткѣ $(-1,+1)$ съ точностью до $\frac{1}{650000}$, между тѣмъ какъ наилучшее возможное приближеніе не менѣе $\frac{1}{1000000}$; разница такъ не велика, что практикъ вполнѣ могъ бы удовлетвориться найденнымъ многочленомъ. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что, какъ и въ другихъ подобныхъ случаяхъ, строка Тэйлора далеко не даетъ такой точности—а именно, многочленъ 10-й степени, который мы получили бы изъ нея, представитъ нашу функцію только съ точностью до $\frac{1}{1200}$.

Какъ это наблюдается во всѣхъ областяхъ математики, общія теоріи и методы почти всегда создаются и развиваются подъ вліяніемъ и съ цѣлью разрѣшенія какой нибудь опредѣленной конкретной задачи. Въ интересующей насъ области такую роль въ послѣдніе годы сыграла задача объ опредѣленіи порядка убыванія наилучшаго приближенія $|x|$ при помощи многочленовъ возрастающихъ степеней. Эта задача важна во первыхъ потому, что всякая ломанная линія выражается въ конечномъ видѣ при помощи $|x|$, и всякая вообще кривая линія, имѣющая нѣсколько точекъ излома, допускаетъ наилучшее приближеніе того же порядка, что $|x|$; другими словами, изслѣдованіе этой функціи есть въ то же время изслѣдованіе широкаго класса функцій, имѣющихъ опредѣленную особенность. Съ другой стороны, и это, быть можетъ, еще болѣе существенно, указанный вопросъ является простымъ и яркимъ примѣромъ задачи, къ которой безусловно непримѣнимы старые методы Чебышева и его школы, и поэтому слѣдовало ожидать, какъ оно и оказалось въ дѣйствительности, что новые методы, которые приведутъ къ ея рѣшенію, будутъ обладать достаточной гибкостью, чтобы разрѣшить и другія подобныя задачи. Вотъ почему, когда de la Vallée Poussin въ 1908 г. формулировалъ вопросъ о порядкѣ наилучшаго приближенія $|x|$, онъ привлекъ къ себѣ вниманіе всѣхъ математиковъ, работавшихъ въ этой области.

Еще ранѣе Lebesgue, пользуясь приближенными многочленами $|x|$, которые были указаны, между прочимъ, и Бертраномъ, показалъ, что съ помощью многочленовъ степени n можно получить приближеніе порядка $\frac{1}{\sqrt{n}}$. De la Vallée Poussin далъ въ 1908 г. многочлены, выражающіе эту функцію съ точностью до $\frac{1}{n}$, и поставилъ упомянутый выше вопросъ, возможно ли получить еще лучшее приближенiе. Отвѣтъ на этотъ вопросъ былъ тѣмъ труднѣе, что въ то время не было извѣстно ни одного метода для нахожденiя нижней границы наилучшаго приближенiя. Но уже въ 1909 году Lebesgue далъ одну важную теорему, которую въ слѣдующемъ году онъ примѣнилъ къ доказательству существованiя функцiй, удовлетворяющихъ обыкновенному условiю Липшица, для которыхъ нельзя найти приближенiя высшаго порядка, чѣмъ $\frac{1}{n}$. Возможность построенiя такихъ функцiй, не давая еще отвѣта на вопросъ de la Vallée Poussin, указывала только, что этотъ отвѣтъ можетъ быть отрицателенъ. Въ концѣ 1910 года, самъ la Vallée Poussin посвящаетъ спецiальную работу опредѣленiю нижней границы наилучшаго приближенiя $|x|$ и опредѣляетъ ее съ точностью до безконечно возрастающаго множителя $(\log n)^3$.

Еще одинъ шагъ впередъ (множитель $(\log n)^3$ замѣненъ множителемъ $\log n$) сдѣланъ въ моей замѣткѣ, представленной Парижской Академiи въ февралѣ 1911 г., и тотъ же результатъ (независимо отъ меня) немного позднѣй полученъ Джексономъ въ работѣ, премированной Геттингенскимъ университетомъ, который поставилъ на конкурсъ упомянутую задачу. Наконецъ, въ томъ же году въ сочиненiи, посланномъ въ Бельгiйскую Академiю, я далъ окончательный отвѣтъ на вопросъ *).

Въ моей русской работѣ имѣются еще существенно новые результаты, относящiеся къ $|x|$, но я не буду болѣе утомлять вниманiе почтеннаго собранiя новыми деталями и возвращусь къ общему ходу идей, которыя развивались, тѣсно переплетаясь съ упомянутой задачей, служившей все время пробнымъ камнемъ для выясненiя мощности примѣнявшихся методовъ.

Дальнѣйшее углубленiе вопроса о законѣ убыванiя наилучшаго приближенiя привело меня къ новой проблеммѣ—опредѣлить ассимптотическое значенiе наилучшаго приближенiя данной функцiи при безконечномъ возрастанiи степени приближеннаго многочлена. Эта задача представляетъ нѣкоторое сходство съ основной проблеммой алгебраическаго направленiя. Но вмѣсто того, чтобы искать точное алгебраическое выраженiе для наилучшаго приближенiя при помощи многочленовъ данной степени, что вообще, какъ мы видѣли, неосуществимо, я ищу выраженiе, являющееся вполнѣ точнымъ только для безконечныхъ степеней; для конечныхъ же значенiй степени, оно тѣмъ точнѣе, чѣмъ

*) Я позволилъ себѣ нѣсколько подробнѣе остановиться на исторiи этого вопроса, около котораго въ послѣднiе годы сконцентрировались усилiя математиковъ, работавшихъ въ этой области, потому что нѣкоторые критики хотятъ видѣть въ немъ только упражненiе изъ учебника Бертрана.

степень выше. Эту асимптотическую задачу мнѣ удалось разрѣшить во многихъ случаяхъ: при этомъ долженъ замѣтить, что значительная часть результатовъ получена мною уже послѣ напечатанія диссертаціи и составляетъ содержаніе отдѣльныхъ статей; кромѣ того, я не сомнѣваюсь, что поставленная мною проблемма, эквивалентная вопросу о разложеніи функціи въ возможно быстро сходящіеся ряды многочленовъ, приведетъ еще къ новымъ интереснымъ результатамъ. *

Такимъ образомъ мы видимъ здѣсь одно изъ наиболѣе парадоксальныхъ подтвержденій значенія для математики перехода отъ конечнаго къ безконечному. Между тѣмъ, какъ современная алгебра безсильна разрѣшить основную алгебраическую задачу о наилучшемъ приближеніи, приводящую къ конечному числу уравненій, съ конечнымъ числомъ неизвѣстныхъ, достаточно было новой постановкой вопроса безконечно усложнить алгебраическую форму задачи, увеличивъ до безконечности число уравненій и неизвѣстныхъ, для того, чтобы задача неожиданно упростилась и стала доступной для методовъ анализа.

Такова, М. Г. и М. Г., въ общихъ чертахъ, отъ Чебышева до нашихъ дней, картина развитія теоріи наилучшаго приближенія функцій при помощи многочленовъ. Что касается будущаго, то я считаю довольно вѣроятнымъ, что упомянутая только что общая асимптотическая проблемма, представляющая видоизмѣненіе прежней алгебраической задачи въ духѣ современной теоріи функцій, займетъ центральное мѣсто въ дальнѣйшемъ развитіи теоріи наилучшаго приближенія.

---

*) Отмѣчу также результаты, полученные моею ученицею Ѳ. И. Тарнаридеръ въ замѣткѣ Comptes Rendus, t. CLVI, 1913.

Table des travaux de S. Bernstein relatifs à la meilleure approximation des fonctions.

Указатель работъ С. Бернштейна, относящихся къ наилучшему приближенію функцій.

1911 г. 1) Sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes. Comptes rendus, t. CLII.

1912 г. 2) Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation de $|x|$. Comptes rendus, t. CLIV.

3) Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes. Mémoires publiés par la Classe des Sciences de l'Academie de Belgique, t. IV.

4) О наилучшемъ приближеніи непрерывныхъ функцій посредствомъ многочленовъ данной степени. Сообщенія Харьк. Мат. О-ва, т. XIII.

5) Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques. Comptes rendus, t. CLV.

6) Sur les recherches recentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes. Proceedings of the fifth international congress of mathematicians.

1913 г. 7) Объ асимптотическомъ значеніи наилучшаго приближенія аналитическихъ функцій. Сообщ. Харьк. Мат. О-ва, т. XIII.

8) Sur une propriété des polynômes. Сообщ. Харьк. Мат. О-ва, т. XIV.

9) Sur la valeur asymptotique de meilleure approximation des fonctions analytiques admettant des singularités données. Bulletins de l'Academie de Belgique, nº 2.

10) Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynômes de degrés donnés. Acta Mathematica, t. 37.

11) Sur l'inégalité de Wladimir Markoff. Сообщ. Харьк. Мат. О-ва, т. XIV.

12) Sur quelques propriétés asymptotiques des polynômes. Comptes Rendus, t. CLVII.