# Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions.

---

## I.

§ 1. Tant que la variable $x$ reste dans le voisinage d'une même valeur, on parvient à représenter, par les principes du calcul différentiel, une fonction quelconque $f(x)$, sous une forme donnée, avec la plus grande approximation possible. Ainsi l'on trouve la représentation approximative de $f(x)$, dans le voisinage de $x = a$, sous la forme d'un polynôme de degré $n$, en s'arrêtant dans son développement d'après la série de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \ldots .$$

au terme $\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n} f^n(a)$. On obtient de même la valeur approchée de $f(x)$ sous la forme quelconque $Z$, en égalant à zéro pour $x = a$ la différence $f(x) - Z$ et ses premières dérivées. — S'il ne s'agit que des valeurs de $x$ qui avoisinent $a$, ces expressions de $f(x)$ la représentent avec la plus grande précision dont elles soient susceptibles d'après leur forme. Mais cela n'a plus lieu, si la variable $x$ n'est assujettie qu'à rester dans des limites plus ou moins étendues. Dans ce cas les recherches des valeurs approximatives de $f(x)$ demandent des méthodes essentiellement différentes de celles dont nous venons de parler. Comme le degré de précision des valeurs approchées des fonctions se détermine par la limite de leurs erreurs, il est clair que l'on doit prendre pour la représentation de $f(x)$ celle des expressions qui, parmi toutes les autres de même forme, s'écarte le moins de $f(x)$ dans l'intervalle, où l'on cherche sa valeur approchée. Or les expressions approximatives des fonctions, qu'on trouve par les principes du calcul différentiel, ne satisfont jamais à cette condition; elles ne donnent la valeur de $f(x)$ avec la plus grande précision que dans le voisinage d'une même valeur de $x$, ou, ce qui revient au même, dans un intervalle infiniment resserré. Par conséquent, lorsque $x$ varie entre les limites plus ou moins étendues, comme cela a lieu dans la pratique, on est obligé de modifier plus ou moins les expressions approximatives de $f(x)$ qu'on trouve d'après les méthodes ordinaires.

§ 2. Dans notre Mémoire intitulé: «*Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*» nous avons traité le cas, où l'on cherche l'expression approximative des fonctions sous la forme d'un polynôme et nous avons donné la solution de ce problème:

*Trouver les modifications qu'on doit apporter dans la valeur approchée de $f(x)$, donnée par son développement suivant les puissances croissantes de $x - a$, quand on cherche à rendre minimum la limite de ses erreurs entre $x = a - h$ et $x = a + h$, $h$ étant une valeur assez petite.*

La solution de ce problème procure facilement les éléments des *paralléllogrammes* qui remplissent les conditions les plus avantageuses pour la précision du jeu de ce mécanisme. Mais en cherchant à résoudre les autres questions de cette espèce, nous sommes parvenu à reconnaître combien il est important d'avoir une méthode générale pour la solution des problèmes analogues à celui que nous indiquons ici, et consistant à déterminer les expressions qui, parmi toutes les autres de même forme, entre deux limites données s'écartent le moins d'une fonction quelconque $f(x)$.

C'est de la solution de pareils problèmes que nous allons maintenant nous occuper.

§ 3. Nous commencerons par exposer un théorème général relativement à la solution de ces problèmes, qu'on peut énoncer de la manière suivante:

*Etant donnée une fonction quelconque $F(x)$ avec $n$ paramètres arbitraires $p_1, p_2, \ldots p_n$, il s'agit par un choix convenable des valeurs $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ de rendre minimum la limite de ses écarts de zéro entre $x = -h$ et $x = +h$.*

Passant aux applications de ce théorème, nous montrerons comment il sert à obtenir les équations qui fournissent la solution du problème, où l'on se propose de représenter des fonctions sous la forme d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle. — En définitive, nous montrerons le parti qu'on peut tirer de la résolution de ces équations dans certains cas particuliers, résolution que l'on effectue à l'aide des méthodes analogues à celles dont on se sert dans *l'Analyse de Diophante*, et qui donne naissance à plusieurs théorèmes algébriques d'un genre tout-à-fait nouveau.

§ 4. Remarquons encore que les cas particuliers, qui seront traités ici, sont très importants pour la solution de ce problème général:

*Etant donnée la valeur approchée de $f(x)$, déduite des méthodes ordinaires, soit sous la forme d'un polynôme, soit sous la forme d'une fraction, trouver les changements qu'il faut faire subir aux coefficients, quand on cherche à rendre minimum la limite de ses erreurs entre $x = a - h$ et $x = a + h$, $h$ étant une valeur assez petite.*

Mais nous ne nous arrêterons pas cette fois à ce problème, résolu en partie dans le Mémoire cité plus haut et dont la solution fera l'objet d'un autre Mèmoire.

## II.

§ 5. La fonction quelconque $F(x)$, entre les limites $x = -h$ et $x = +h$, ne s'écartera pas de zéro plus que d'une certaine quantité $L$, si toutes ses valeurs depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$ sont comprises entre $-L$ et $+L$, et que parmi elles il y en ait au moins une égale à $+L$ ou $-L$. — Supposons que cette valeur de $F(x)$ réponde à $x = x_1$. Comme $F(x)$, pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre $x = -h$, $x = +h$, ne doit pas surpasser $+L$, ni devenir inférieure à $-L$, il est clair que la valeur $x = x_1$, qui réduit $F(x)$ à $\pm L$, doit être ou l'une des valeurs de $x$, pour lesquelles la fonction $F(x)$ devient soit *maximum* soit *minimum*, ou l'une des valeurs limites de $x$, c.-à-d. $x = +h$, $x = -h$. D'après cela, et en faisant abstraction du cas où la dérivée $F'(x)$ pour $x = x_1$ devient infinie, nous concluons que $x_1$ doit vérifier l'une de ces équations

$$(x - h)(x + h) = 0, \quad F'(x) = 0,$$

et par conséquent celle-ci

$$(x - h)(x + h) F'(x) = 0,$$

ou

$$(x^2 - h^2) F'(x) = 0.$$

La même chose aura lieu pour toutes les valeurs de $x$ qui, entre les limites $x = -h$, $x = +h$, réduisent $F(x)$ soit à $+L$, soit à $-L$, ou, ce qui revient au même, qui vérifient l'équation

$$F^2(x) = L^2.$$

D'après cela, en désignant par

$$x_1, x_2, \ldots x_\mu$$

les valeurs de $x$ dont nous venons de parler, nous concluons que les équations

$$(1) \qquad F^2(x) = L^2, \quad (x^2 - h^2)\, F'(x) = 0$$

auront $\mu$ solutions communes

$$x = x_1,\ x_2, \ldots . x_\mu,$$

où $x_1$, $x_2, \ldots . x_\mu$ sont des valeurs réelles, différentes entre elles et comprises entre $x = -h$ et $x = +h$.

C'est en ayant égard à ces solutions communes des équations (1) que nous chercherons à déterminer les valeurs des paramètres $p_1$, $p_2, \ldots p_n$ de la fonction $F(x)$, pour lesquelles la quantité $L$, qui désigne, comme nous l'avons vu, la limite des écarts de $F(x)$ de 0 entre $x = -h$ et $x = +h$, devient la plus petite possible.

§ 6. Pour simplifier ces recherches nous laissons de côté le cas, où $F(x)$ et ses dérivées par rapport à $x$, $p_1$, $p_2, \ldots . p_n$ cessent d'être finies et continues entre $x = -h$ et $x = +h$, et dans cette hypothèse nous allons établir le théorème suivant:

## Théorème 1.

*La quantité $L$ qui désigne de combien la fraction $F(x)$ s'écarte de zéro entre $x = -h$ et $x = +h$, n'est pas réduite à sa plus petite valeur, si le système des équations*

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{dF(x_1)}{dp_1}\lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_1}\lambda_2 + \ldots . + \frac{dF(x_\mu)}{dp_1}\lambda_\mu = 0, \\ \frac{dF(x_1)}{dp_2}\lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_2}\lambda_2 + \ldots . + \frac{dF(x_\mu)}{dp_2}\lambda_\mu = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dF(x_1)}{dp_n}\lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_n}\lambda_2 + \ldots . + \frac{dF(x_\mu)}{dp_n}\lambda_\mu = 0 \end{cases}$$

*n'a pas d'autres solutions que*

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0, \ldots . \lambda_\mu = 0;$$

*$x_1$, $x_2, \ldots . x_\mu$ sont des valeurs de $x$, pour lesquelles la fonction $F(x)$, entre $x = -h$ et $x = +h$, atteint ses valeurs extrêmes $+L$ et $-L$; $p_1, p_2, \ldots p_n$ désignent les paramètres arbitraires de $F(x)$.*

## Démonstration.

Ce théorème découle évidemment des deux propositions suivantes que nous établirons d'abord:

1) Si les équations (2) ne sont possibles qu'autant que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0, \ldots . \lambda_\mu = 0$, on trouvera des valeurs finies $N_1$, $N_2 \ldots . N_n$ satisfaisant aux $\mu$ équations

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dF(x_1)}{dp_1} N_1 + \frac{dF(x_1)}{dp_2} N_2 + \ldots . + \frac{dF(x_1)}{dp_n} N_n = F(x_1), \\ \frac{dF(x_2)}{dp_1} N_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_2} N_2 + \ldots . + \frac{dF(x_2)}{dp_n} N_n = F(x_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dF(x_\mu)}{dp_1} N_1 + \frac{dF(x_\mu)}{dp_2} N_2 + \ldots . + \frac{dF(x_\mu)}{dp_n} N_n = F(x_\mu). \end{array} \right.$$

2) Au moyen des valeurs finies $N_1$, $N_2, \ldots . N_n$ qui vérifient les équations (3) on peut assigner un système de valeurs des paramètres $p_1$, $p_2, \ldots . p_n$, avec lesquelles la fonction $F(x)$, depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, n'atteint ni la limite $+L$, ni la limite $-L$, et par conséquent, reste comprise dans des limites plus étroites.

*Démonstration de la première proposition.*

§ 7. Quand il s'agit d'équations du premier degré, dont les coefficients et les termes connus ont des valeurs finies, on parvient toujours à leur résolution en quantités finies, si toutefois, en les résolvant par une des méthodes usitées, on ne tombe pas sur une équation, où toutes les inconnues disparaissent et le terme connu ne se réduit pas à zéro. Or, si cela se présentait dans la résolution des équations (3), on pourrait les combiner de manière à avoir

$$\left. \begin{array}{l} \left[\frac{dF(x_1)}{dp_1} N_1 + \frac{dF(x_1)}{dp_2} N_2 + \ldots + \frac{dF(x_1)}{dp_n} N_n\right] \lambda_1 + \\ \left[\frac{dF(x_2)}{dp_1} N_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_2} N_2 + \ldots + \frac{dF(x_2)}{dp_n} N_n\right] \lambda_2 + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left[\frac{dF(x_\mu)}{dp_1} N_1 + \frac{dF(x_\mu)}{dp_2} N_2 + \ldots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_n} N_n\right] \lambda_\mu \end{array} \right\} = F(x_1)\lambda_1 + F(x_2)\lambda_2 + \ldots + F(x_\mu)\lambda_\mu;$$

où toutes les inconnues $N_1$, $N_2$, $N_3, \ldots N_n$ disparaissent et le terme

$$F(x_1)\lambda_1 + F(x_2)\lambda_2 + \ldots + F(x_\mu)\lambda_\mu.$$

ne s'annule pas, ce qui suppose qu'on parviendrait à vérifier les équations

$$\begin{gathered}
\frac{dF(x_1)}{dp_1}\lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_1}\lambda_2 + \ldots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_1}\lambda_\mu = 0, \\
\frac{dF(x_1)}{dp_2}\lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_2}\lambda_2 + \ldots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_2}\lambda_\mu = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dF(x_1)}{dp_n}\lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_n}\lambda_2 + \ldots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_n}\lambda_\mu = 0,
\end{gathered}$$

sans réduire l'expression

$$F(x_1)\lambda_1 + F(x_2)\lambda_2 + \ldots + F(x_\mu)\lambda_\mu$$

à zéro, et par conséquent, sans faire

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0, \ldots \lambda_\mu = 0.$$

Donc, tant qu'on ne peut vérifier les équations (2) par des valeurs de $\lambda_1, \lambda_1, \ldots \lambda_\mu$, autres que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0, \ldots \lambda_\mu = 0$, on est certain de trouver des valeurs finies $N_1$, $N_2, \ldots N_n$ satisfaisant aux équations (3), ce qu'il s'agissait de prouver.

*Démonstration de la seconde proposition.*

§ 8. Soit $\omega$ une quantité positive, infiniment petite, $N_1$, $N_2, \ldots N_n$ des valeurs finies qui satisfont aux équations (3), $F_0(x)$ la valeur que prend la fonction $F(x)$ quand on change ses paramètres

$$p_1,\ p_2, \ldots p_n$$

en

$$p_1 - N_1\omega,\ p_2 - N_2\omega, \ldots p_n - N_n\omega.$$

Comme il ne s'agit que du cas, où la fonction $F(x)$ et ses dérivées par rapport à $x$, $p_1$, $p_2, \ldots p_n$ restent finies et continues pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre $x = -h$ et $x = +h$ (les seules valeurs de $x$ que nous aurons à considérer), la fonction $F_0(x)$, qu'on trouve en changeant dans l'expression de $F(x)$ les quantités

$$p_1,\ p_2, \ldots p_n$$

en

$$p_1 - N_1\omega,\ p_2 - N_2\omega, \ldots . p_n - N_n\omega,$$

peut être représentée ainsi

$$(4)\quad F_0(x) = F(x) - \left[\frac{dF(x)}{dp_1}N_1 + \frac{dF(x)}{dp_2}N_2 + \ldots . + \frac{dF(x)}{dp_n}N_n\right]\omega + R\omega^2,$$

où $R$ est une fonction de $\omega$ et de $x$, qui ne devient pas infinie pour $\omega = 0$.

D'après cela il est aisé de montrer que, depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, la valeur numérique de $F(x)$ reste au-dessous de $L$, en supposant bien entendu, que la quantité $L$ n'est pas nulle, ou, ce qui revient au même, que la fonction $F(x)$, entre $x = -h$ et $x = +h$, n'est pas constamment égale à zéro.

Pour s'en assurer nous remarquerons que d'après la formule (4) et en vertu des équations (3) on trouve pour $x = x_1$

$$F_0(x_1) = F(x_1) - F(x_1)\omega + \omega^2 R = F(x_1)(1 - \omega) + \omega^2 R,$$

et comme $F(x_1)$ d'après (1) se réduit à $\pm L$, valeur différente de zéro, et que $\omega$, par notre supposition, est une quantité positive infiniment petite, la valeur numérique de cette expression de $F_0(x_1)$ est évidemment au-dessous de $L$.

La même chose a lieu, si l'on donne à $x$ une valeur dont la différence avec $x_1$ ne surpasse pas une certaine limite finie. — En effet, d'après les équations (1) et (3), pour $x = x_1$ les expressions

$$F(x),$$

$$\frac{dF(x)}{dp_1}N_1 + \frac{dF(x)}{dp_2}N_2 + \ldots . + \frac{dF(x)}{dp_n}N_n$$

ont la même valeur $\pm L$, autre que zéro, et en vertu de la continuité des fonctions qui composent ces expressions, elles ne peuvent varier brusquement. D'où il suit que dans le voisinage de $x = x_1$ ces expressions auront des valeurs différentes de zéro et de même signe. Mais tant que cela a lieu, l'équation (4), où $\omega$ est positif et infiniment petit, donne pour $F_0(x)$ une valeur numériquement au-dessous de $F(x)$, et par conséquent au dessous de $L$, qui est la limite des valeurs de $F(x)$ entre $x = -h$ et $x = +h$.

On reconnait semblablement que la valeur numérique de $F(x)$ reste inférieure à $L$, si $x$ est dans le voisinage de ces valeurs

$$x_2,\ x_3, \ldots . x_\mu.$$

Il reste à prouver que cela a lieu aussi pour toutes les autres valeurs de $x$, comprises entre $x = -h$ et $x = +h$. Or, comme $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ sont les seules valeurs de $x$ pour lesquelles la fonction $F(x)$, entre $x = -h$ et $x = +h$, atteint ses valeurs limites $-L$ et $+L$, et que $F_0(x)$ ne diffère de $F(x)$ que par des termes infiniment petits, il est clair, que dans le cas, où $x$ n'est pas dans le voisinage de $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, les fonctions $F_0(x)$ et $F(x)$ ne peuvent s'approcher ensemble infiniment près de $-L$ et de $+L$, et par conséquent, les valeurs de $F_0(x)$ seront comprises dans des limites plus étroites.

Ainsi on parvient à reconnaître que, depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, la fonction $F_0(x)$ qu'on trouve en changeant dans la fonction $F(x)$ les paramètres

$$p_1, \; p_2, \ldots p_n$$

en

$$p_1 - N_1\omega, \; p_2 - N_2\omega, \ldots p_n - N_n\omega,$$

ne peut atteindre ni la limite $+L$, ni la limite $-L$, ce qui prouve la proposition.

## III.

§ 9. Le théorème que nous venons de donner nous servira pour trouver les équations, qui déterminent les valeurs des paramètres $p_1, p_2, \ldots p_n$ avec lesquelles la fonction $F(x)$ s'écarte le moins de 0 entre $x = -h$ et $x = +h$. On trouverait facilement ces équations, si l'on connaissait d'avance le nombre $\mu$, qui désigne combien de fois, depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, la fonction $F(x)$, avec les paramètres cherchés, atteindra ses valeurs extrêmes $-L$ et $+L$; et l'incertitude, qui plane ordinairement sur la valeur de $\mu$, produit la principale difficulté des présentes questions de *minima*. Nous allons montrer maintenant comment on peut toujours lever cette difficulté jusqu'à un certain point, et même complètement dans plusieurs cas spéciaux.

Relativement au nombre $\mu$ il y a deux hypothèses à faire: 1) $\mu$ surpasse $n$, nombre des paramètres arbitraires de $F(x)$, 2) $\mu$ ne surpasse pas $n$. Chacune de ces hypothèses, comme nous verrons plus tard, peut avoir lieu; examinons-les.

§ 10. *Le nombre $\mu$ surpasse $n$.* Dans ce cas il n'est pas important de connaître la vraie valeur de $\mu$; car, $\mu$ étant plus grand que $n$, la série

$$x_1, \; x_2, \ldots x_\mu$$

contiendra au moins $n+1$ valeurs différentes, et alors d'après le § 5 les équations

$$F^2(x) = L^2, \; (x^2 - h^2)\, F'(x) = 0$$

doivent avoir au moins $n+1$ solutions communes, ce qui entraine $n+1$ équations entre $n+1$ quantités inconnues, savoir: $n$ paramètres cherchés de $F(x)$ et la quantité $L$ qui désigne de combien la fonction $F(x)$ s'écartera de zéro entre les limites: $x=-h$, $x=+h$. Par la résolution de ces équations on aura toutes ces inconnues, si toutefois on ne tombe pas sur des équations identiques, ce qui ne peut avoir lieu que dans des cas exceptionnels. Nous ne nous arrêterons pas à présent à ces cas particuliers, car ils ne se rencontrent point dans la solution des questions dont nous devrons nous occuper.

Donc, si le nombre $\mu$ est plus grand que $n$, on se passera tout-à-fait des équations (2). D'ailleurs, il n'est pas difficile de remarquer que dans ce cas elles ne donnent rien ni par rapport à $L$, $p_1, p_2, \ldots p_n$, ni par rapport à $x_1, x_2, \ldots x_\mu$; car, $\mu$ étant plus grand que $n$, le nombre des équations (2) est au-dessous de celui des inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$.

§ 11. *Le nombre $\mu$ ne surpasse pas $n$.* Dans ce cas les équations (2), par l'élimination de $\mu$ inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$, fournissent $n-\mu+1$ équations entre $n+\mu$ quantités

$$p_1,\ p_2, \ldots p_n,$$
$$x_1,\ x_2, \ldots x_\mu.$$

D'autre part, en faisant dans les équations (1)

$$x = x_1,\ x_2, \ldots x_\mu,$$

on trouve encore $2\mu$ équations entre $p_1, p_2, \ldots p_n$, $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ et $L$. Donc, on aura en tout $n+\mu+1$ équations entre le même nombre d'inconnues

$$p_1,\ p_2, \ldots p_n,\ x_1,\ x_2, \ldots x_\mu,\ L.$$

Par la résolution de ces équations on parviendra à déterminer et la quantité $L$ et les paramètres cherchés $p_1, p_2, \ldots p_n$ de la fonction $F(x)$. Mais comme ces équations changent essentiellement avec la valeur du nombre $\mu$, et pour embrasser tous les cas possibles, on examinera séparément ces $n$ hypothèses:

$$\mu = 1,\ 2,\ 3, \ldots n,$$

les seules possibles à cause de $\mu \overline{\overline{<}} n$ et $\mu > 0$.

§ 12. Tant qu'on ne saura rien d'avance sur le nombre $\mu$, on ne pourra connaître les paramètres cherchés de $F(x)$, avec lesquels elle s'écarte le moins de zéro depuis $x=-h$ jusqu'à $x=+h$, qu'en comparant entre elles les valeurs de $L$, trouvées dans les différentes hypothèses sur $\mu$, savoir: $\mu > n$ et $\mu = 1, 2, \ldots n$. Remarquons que l'importance de l'examen de divers systèmes des paramètres entrant dans $F(x)$ et du choix de celui qui donne la solution cherchée tient à la nature de notre problème, où l'on cherche le *minimum minimorum* de $L$, ce qui exige qu'on ait les valeurs de tous les *minima* possibles. Mais souvent on parvient facilement à reconnaître que les équations (2), dans le cas de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$ autres que 0, sont impossibles pour certaines valeurs de $\mu$; alors le nombre des hypothèses possibles sur la valeur de $\mu$ diminue, et par là la solution de notre problème se simplifie notablement.

Un de ces cas, à la fois le plus intéressant et le plus fréquent, est celui, où d'après la nature de la fonction $F(x)$, les équations (2) entrainent

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0, \ldots \lambda_\mu = 0,$$

tant que $\mu$ ne surpasse pas $n$. Alors, suivant le théorème 1, on ne pourra réduire $L$ à sa plus petite valeur sans faire $\mu > n$, et, comme nous venons de le voir (cas de $\mu > n$), la quantité $L$ et les paramètres cherchés de $F(x)$ seront déterminés par la condition que les équations

$$F^2(x) - L^2 = 0,\ (x^2 - h^2)\, F'(x) = 0,$$

aient au moins $n + 1$ solutions communes. Comme ces solutions sont

$$x = x_1,\ x = x_2,\ x = x_3, \ldots,$$

nous concluons, en vertu de ce que nous avons vu dans le § 5 par rapport à ces quantités, que les $n + 1$ solutions communes de nos équations seront nécessairement inégales et comprises entre $x = -h$ et $x = +h$.

## IV.

§ 13. Pour montrer le parti que l'on peut tirer de ce que nous avons établi ci-dessus, nous allons examiner spécialement ces trois valeurs de $F(x)$:

$$F(x) = p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n - Y,$$

$$F(x) = \frac{p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n}{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m} - Y,$$

$$F(x) = \frac{p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \ldots + p_{n-l-1} x + p_{n-l}}{p_{n-l+1} x^l + p_{n-l+2} x^{l-1} + \ldots + p_n x + 1} - Y,$$

où $Y$ est une fonction de $x$ qui reste finie et continue, ainsi que ses dérivées, depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$. La solution de notre problème, pour ces trois valeurs de $F(x)$, est d'autant plus importante qu'elle se rattache évidemment à la représentation approximative des fonctions soit sous la forme d'un polynôme, soit sous la forme d'une fraction avec un dénominateur donné ou arbitraire.

## *Premier cas.*

$$F(x) = p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n - Y.$$

§ 14. Dans ce cas on parvient facilement à reconnaître que les équations (2) supposent

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0, \dots \lambda_\mu = 0,$$

si $\mu$ ne surpasse pas $n$.

En effet, la différentiation de

$$F(x) = p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n - Y$$

par rapport à $p_1, p_2, \dots p_{n-1}, p_n$ nous donne

$$\frac{dF(x)}{dp_1} = x^{n-1},\ \frac{dF(x)}{dp_2} = x^{n-2}, \dots \frac{dF(x)}{dp_{n-1}} = x,\ \frac{dF(x)}{dp_n} = 1.$$

En vertu de cela, les équations (2) deviennent

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 x_2^{n-1} + \dots + \lambda_\mu x_\mu^{n-1} = 0,\\
&\lambda_1 x_1^{n-2} + \lambda_2 x_2^{n-2} + \dots + \lambda_\mu x_\mu^{n-2} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots\dots\dots + \lambda_\mu x_\mu = 0,\\
&\lambda_1 + \lambda_2 + \dots\dots\dots\dots\dots + \lambda_\mu = 0,
\end{aligned}$$

et, en prenant la somme de ces équations, après les avoir multipliées respectivement par les quantités quelconques $K_{n-1}, K_{n-2}, \dots K_1, K_0$, nous obtenons

$$\lambda_1 \Phi(x_1) + \lambda_2 \Phi(x_2) + \dots + \lambda_\mu \Phi(x_\mu) = 0,$$

où

$$\Phi(x) = K_{n-1} x^{n-1} + K_{n-2} x^{n-2} + \dots + K_1 x + K_0.$$

Or, comme $\Phi(x) = K_{n-1} x^{n-1} + K_{n-2} x^{n-2} + \dots\dots + K_1 x + K_0$

peut représenter toutes les fonctions entières de degré au-dessous de $n$, on pourra faire

$$\Phi(x) = (x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_\mu) = x^{\mu-1} - (x_2 + x_3 + \ldots + x_\mu) x^{\mu-2} + \\ + (x_2 x_3 + \ldots + x_{\mu-1} x_\mu) x^{\mu-3} \ldots,$$

si $\mu$ ne surpasse pas $n$, et pour cette valeur de $\Phi(x)$ l'équation précédente devient

$$\lambda_1 (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_\mu) = 0;$$

d'où résulte

$$\lambda_1 = 0,$$

les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ étant toutes différentes entre elles.

De la même manière on trouverait

$$\lambda_2 = 0, \ldots \lambda_\mu = 0,$$

en prenant

$$\Phi(x) = (x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_\mu),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\Phi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{\mu-1}).$$

De ce que nous venons de prouver par rapport aux équations (2) dans le cas de

$$F(x) = p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n - Y,$$

et du § 12, on déduit ce théorème:

## Théorème 2.

*Les quantités $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, p_n$ étant choisies de manière à ce que la fonction*

$$F(x) = p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n - Y$$

*s'écarte le moins possible de zéro depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, les équations*

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2) F'(x) = 0$$

*ont au moins $n + 1$ solutions communes, différentes entre elles et comprises entre $x = -h$ et $x = +h$. La quantité $L$ désigne la limite des écarts de $F(x)$ de zéro entre $x = -h$ et $x = +h$.*

## *Deuxième cas.*

$$F(x) = \frac{p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n}{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m} - Y.$$

§ 15. En cherchant à résoudre notre problème pour cette valeur de $F(x)$, on pourra bien se borner au cas, où le dénominateur de la fraction

$$\frac{p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n}{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m}$$

ne s'évanouit pas entre $x = -h$ et $x = +h$. En effet, d'après la nature du problème, la fraction cherchée doit être nécessairement l'une de celles qui ne cessent d'être finies depuis $x = -h$ jusqu' à $x = +h$.

Par conséquent, si son dénominateur

$$A_0 x_m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

contenait des facteurs s'annulant entre $x = -h$ et $x = +h$, son numérateur

$$p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n$$

devrait être divisible par tous ces facteurs. En vertu de cela la fraction cherchée serait réductible à la forme plus simple, où le dénominateur est la fonction $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$, dépourvue de tous ses facteurs susceptibles de s'annuler entre $x = -h$ et $= +h$, et le numérateur une fonction de la même forme que

$$p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n,$$

mais de degré inférieur à $n - 1$ d'autant d'unités qu'on trouve dans la fonction

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

de facteurs linéaires qui s'évanouissent entre $x = -h$ et $x = +h$.

Ainsi notre problème sur la valeur de

$$F(x) = \frac{p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n}{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m} - Y$$

se réduit toujours au cas, où le dénominateur ne s'annule point entre les limites $x = -h$ et $x = +h$. — C'est de ce cas que nous nous occuperons maintenant.

Comme $Y$, par hypothèse, est une fonction qui reste finie et continue, ainsi que ses dérivées, entre $x = -h$ et $x = +h$, et que le dénominateur de la fraction

$$\frac{p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n}{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m}$$

ne s'annule pas dans ces limites, il est clair que dans cet intervalle ni la fonction

$$F(x) = \frac{p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n}{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m} - Y,$$

ni ses dérivées par rapport à $x$, $p_1$, $p_2, \ldots p_{n-1}, p_n$ ne cesseront d'être finies et continues. Donc, pour cette valeur de $F(x)$ le théorème du § 6 aura lieu.

D'autre part, on reconnaît aisément qu'avec cette valeur de $F(x)$ les équations (2), dans les cas de $\mu \lesseqgtr n$, supposent que

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0, \ldots \lambda_\mu = 0.$$

En effet, pour cette valeur de $F(x)$ et en faisant pour abréger

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = \varphi(x),$$

on trouve

$$\frac{dF(x)}{dp_1} = \frac{x^{n-1}}{\varphi(x)},\ \frac{dF(x)}{dp_2} = \frac{x^{n-2}}{\varphi(x)}, \ldots \frac{dF(x)}{dp_{n-1}} = \frac{x}{\varphi(x)},\ \frac{dF(x)}{dp_n} = \frac{1}{\varphi(x)}.$$

En vertu de cela, les équations (2) deviennent

$$\begin{gathered}
\frac{\lambda_1 x_1^{n-1}}{\varphi(x_1)} + \frac{\lambda_2 x_2^{n-1}}{\varphi(x_2)} + \ldots + \frac{\lambda_\mu x_\mu^{n-1}}{\varphi(x_\mu)} = 0, \\
\frac{\lambda_1 x_1^{n-2}}{\varphi(x_1)} + \frac{\lambda_2 x_2^{n-2}}{\varphi(x_2)} + \ldots + \frac{\lambda_\mu x_\mu^{n-2}}{\varphi(x_\mu)} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\lambda_1 x_1}{\varphi(x_1)} + \frac{\lambda_2 x_2}{\varphi(x_2)} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\lambda_\mu x_\mu}{\varphi(x_\mu)} = 0, \\
\frac{\lambda_1}{\varphi(x_1)} + \frac{\lambda_2}{\varphi(x_2)} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\lambda_\mu}{\varphi(x_\mu)} = 0;
\end{gathered}$$

où $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2) \ldots \varphi(x_\mu)$ sont des valeurs différentes de zéro, car la fonction

$$\varphi(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

ne s'annule pas entre $x = -h$ et $x = +h$, et les valeurs $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, comme nous l'avons vu (§ 6), sont comprises dans ces limites.

En multipliant les équations précédentes respectivement par les quantités

$$K_{n-1},\ K_{n-2},\ldots. K_1,\ K_0$$

et prenant leur somme, on a

$$\frac{\lambda_1\,\Phi(x_1)}{\varphi(x_1)}+\frac{\lambda_2\,\Phi(x_2)}{\varphi(x_2)}+\ \ldots+\frac{\lambda_\mu\,\Phi(x_\mu)}{\varphi(x_\mu)}=0,$$

où

$$\Phi(x)=K_{n-1}\,x^{n-1}+K_{n-2}\,x^{n-2}+\ \ldots+K_1\,x+K_0.$$

En répétant les raisonnements employés dans le premier cas, on conclut que cette équation, où $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$,....$\varphi(x_\mu)$ sont des valeurs différentes de 0, entraîne $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0,\ldots.\lambda_\mu=0$, tant que $\mu$ ne surpasse pas $n$.

C'est pourquoi nous parvenons, comme dans le cas précédent, à ce théorème:

## Théorème 3.

*Les quantités* $p_1, p_2,\ldots. p_{n-1}, p_n$ *étant choisies de manière à ce que la fonction*

$$F(x)=\frac{p_1\,x^{n-1}+p_2\,x^{n-2}+\ldots.+p_{n-1}\,x+p_n}{A_0\,x^m+A_1\,x^{m-1}+\ldots.+A_{m-1}\,x+A_m}-Y,$$

*depuis* $x=-h$ *jusqu'à* $x=+h$, *s'écarte le moins de zéro, les équations*

$$F^2(x)-L^2=0,\ (x^2-h^2)\,F'(x)=0$$

*ont au moins* $n+1$ *solutions communes, différentes entre elles et comprises entre* $x=-h$ *et* $x=+h$. *La quantité* $L$ *est la limite des valeurs de* $F(x)$ *entre* $x=-h$ *et* $x=+h$.

### *Troisième cas.*

$$F(x)=\frac{p_1\,x^{n-l-1}+p_2\,x^{n-l-2}+\ldots.+p_{n-l-1}\,x+p_{n-l}}{p_{n-l+1}\,x^l+p_{n-l+2}\,x^{l-1}+\ldots.+p_n\,x+1}-Y.$$

§ 16. On peut toujours supposer que la fraction

$$\frac{p_1\,x^{n-l-1}+p_2\,x^{n-l-2}+\ldots.+p_{n-l-1}\,x+p_{n-l}}{p_{n-l+1}\,x^l+p_{n-l+2}\,x^{l-1}+\ldots.+p_n\,x+1}$$

est réduite à sa forme la plus simple. Dans cette supposition, et en remarquant que la fraction qui résout notre problème de *minimum* ne cessera d'être finie entre $x=-h$ et $x=+h$, on conclut que son dénominateur restera différent de zéro entre ces limites, et dans ce cas ni la fonction

$$F(x)=\frac{p_1\,x^{n-l-1}+p_2\,x^{n-l-2}+\ldots.+p_{n-l-1}\,x+p_{n-l}}{p_{n-l+1}\,x^l+p_{n-l+2}\,x^{l-1}+\ldots.+p_n\,x+1}-Y,$$

ni ses dérivées par rapport à $x, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, p_n$, ne peuvent devenir infinies ou discontinues pour les valeurs de $x$ que nous aurons à considérer. Donc, le théorème du § 6 sera applicable aussi à cette valeur de $F(x)$.

Pour tirer de ce théorème les équations relatives à $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, p_n, L$, nous commencerons par chercher les valeurs de

$$\frac{dF(x)}{dp_1}, \frac{dF(x)}{dp_2}, \ldots \frac{dF(x)}{dp_{n-1}}, \frac{dF(x)}{dp_n}.$$

D'après l'expression de $F(x)$, et en faisant pour abréger

$$p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \ldots + p_{n-l-1} x + p_{n-l} = \psi(x),$$
$$p_{n-l+1} x^l + p_{n-l+2} x^{l-1} + \ldots + p_n x + 1 = \varphi(x),$$

nous trouvons

$$\frac{dF(x)}{dp_1} = \frac{x^{n-l-1}}{\varphi(x)}, \frac{dF(x)}{dp_2} = \frac{x^{n-l-2}}{\varphi(x)}, \ldots \frac{dF(x)}{dp_{n-l-1}} = \frac{x}{\varphi(x)}, \frac{dF(x)}{dp_{n-l}} = \frac{1}{\varphi(x)},$$
$$\frac{dF(x)}{dp_{n-l+1}} = -\frac{x^l\psi(x)}{\varphi^2(x)}, \frac{dF(x)}{dp_{n-l+2}} = -\frac{x^{l-1}\psi(x)}{\varphi^2(x)}, \ldots \frac{dF(x)}{dp_{n-1}} = -\frac{x^2\psi(x)}{\varphi^2(x)}, \frac{dF(x)}{dp_n} = -\frac{x\psi(x)}{\varphi^2(x)}.$$

Dès lors les équations (2) deviennent

$$\frac{\lambda_1 x_1^{n-l-1}}{\varphi(x_1)} + \frac{\lambda_2 x_2^{n-l-1}}{\varphi(x_2)} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\lambda_\mu x_\mu^{n-l-1}}{\varphi(x_\mu)} = 0,$$
$$\frac{\lambda_1 x_1^{n-l-2}}{\varphi(x_1)} + \frac{\lambda_2 x_2^{n-l-2}}{\varphi(x_2)} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\lambda_\mu x_\mu^{n-l-2}}{\varphi(x_\mu)} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\lambda_1 x_1}{\varphi(x_1)} + \frac{\lambda_2 x_2}{\varphi(x_2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\lambda_\mu x_\mu}{\varphi(x_\mu)} = 0,$$
$$\frac{\lambda_1}{\varphi(x_1)} + \frac{\lambda_2}{\varphi(x_2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\lambda_\mu}{\varphi(x_\mu)} = 0,$$
$$-\frac{\lambda_1\psi(x_1)x_1^l}{\varphi^2(x_1)} - \frac{\lambda_2\psi(x_2)x_2^l}{\varphi^2(x_2)} - \ldots\ldots\ldots - \frac{\lambda_\mu\psi(x_\mu)x_\mu^l}{\varphi^2(x_\mu)} = 0,$$
$$-\frac{\lambda_1\psi(x_1)x_1^{l-1}}{\varphi^2(x_1)} - \frac{\lambda_2\psi(x_2)x_2^{l-1}}{\varphi^2(x_2)} - \ldots\ldots - \frac{\lambda_\mu\psi(x_\mu)x_\mu^{l-1}}{\varphi^2(x_\mu)} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-\frac{\lambda_1\psi(x_1)x_1^2}{\varphi^2(x_1)} - \frac{\lambda_2\psi(x_2)x_2^2}{\varphi^2(x_2)} - \ldots\ldots\ldots - \frac{\lambda_\mu\psi(x_\mu)x^2_\mu}{\varphi^2(x_\mu)} = 0,$$
$$-\frac{\lambda_1\psi(x_1)x_1}{\varphi^2(x_1)} - \frac{\lambda_1\psi(x_2)x_2}{\varphi^2(x_2)} - \ldots\ldots\ldots - \frac{\lambda_\mu\psi(x_\mu)x_\mu}{\varphi^2(x_\mu)} = 0,$$

Il n'est pas difficile de montrer que ces équations, dans le cas de $\mu \lesseqgtr n$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots . \lambda_\mu$ autres que 0, entraînent celles-ci:

$$(5) \qquad \begin{cases} p_1 = 0, \; p_2 = 0, \ldots . p_d = 0, \\ p_{n-l+1} = 0, \; p_{n-l+2} = 0, \ldots . p_{n-l+d} = 0, \end{cases}$$

où

$$d = n + 1 - \mu.$$

Pour le prouver, prenons la somme de ces équations après les avoir multipliées respectivement par les facteurs arbitraires

$$B_{n-l-1}, \; B_{n-l-2}, \ldots . B_1, \; B_0, \; C_l, \; C_{l-1}, \ldots . C_2, \; C_1,$$

ce qui nous donne

$$\frac{\lambda_1 \Phi(x_1)}{\varphi^2(x_1)} + \frac{\lambda_2 \Phi(x_2)}{\varphi^2(x_2)} + \ldots . + \frac{\lambda_\mu \Phi(x_\mu)}{\varphi^2(x_\mu)} = 0,$$

en faisant pour abréger

$$\begin{aligned} \Phi(x) = \varphi(x)\left[B_{n-l-1} x^{n-l-1} + B_{n-l-2} x^{n-l-2} + \ldots . + B_1 x + B_0\right] \\ - x\psi(x)\left[C_l x^{l-1} + C_{l-1} x^{l-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_2 x + C_1\right]. \end{aligned}$$

D'après cette équation on trouverait

$$\lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = 0, \ldots . \lambda_\mu = 0,$$

comme dans les cas précédents, si par un choix convenable des quantités

$$B_{n-l-1}, \; B_{n-l-2} \ldots . B_1, \; B_0, \; C_l, \; C_{l-1}, \ldots . C_2, \; C_1$$

dans la valeur de

$$\begin{aligned} \Phi(x) = \varphi(x)\left[B_{n-l-1} x^{n-l-1} + B_{n-l-2} x^{n-l-2} + \ldots . + B_1 x + B_0\right] \\ - x\psi(x)\left[C_l x^{l-1} + C_{l-1} x^{l-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_2 x + C_1\right] \end{aligned}$$

on pouvait faire

$$\Phi(x) = (x-x_2)(x-x_3) \ldots . (x-x_\mu) = x^{\mu-1} - (x_2 + x_3 + \ldots . + x_\mu) x^{\mu-2} + \ldots . ,$$

$$\Phi(x) = (x-x_1)(x-x_3) \ldots . (x-x_\mu) = x^{\mu-1} - (x_1 + x_3 + \ldots . + x_\mu) x^{\mu-2} + \ldots . ,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\Phi(x) = (x-x_1)(x-x_2) \ldots . (x-x_{\mu-1}) = x^{\mu-1} - (x_1 + x_2 + \ldots . + x_{\mu-1}) x^{\mu-2} + \ldots$$

D'après cela, pour prouver que les équations (2), dans le cas de $\mu \leqq n$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots . \lambda_\mu$ autres que 0, entraînent les équations (5), il suffit de montrer que la formule

$$\begin{aligned}\varphi(x)\left[B_{n-l-1} x^{n-l-1} + B_{n-l-2} x^{n-l-2} + \ldots . + B_1 x + B_0\right]\\ - x\psi(x)\left[C_l x^{l-1} + C_{l-1} x^{l-2} + \ldots\ldots\ldots + C_2 x + C_1\right]\end{aligned}$$

peut représenter toutes les valeurs de $\Phi(x)$ mentionnées plus haut, si les équations (5) ne sont pas satisfaites. C'est ce que nous allons faire.

Comme la fraction

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \ldots . + p_{n-l-1} x + p_{n-l}}{p_{n-l+1} x^l + p_{n-l+2} x^{l-1} + \ldots . + p_n x + 1}$$

est irréductible, et que son dénominateur

$$\varphi(x) = p_{n-l+1} x^l + p_{n-l+2} x^{l-1} + \ldots . + p_n x + 1$$

n'est pas divisible par $x$, il en résulte que les fonctions $\varphi(x)$ et $x\psi(x)$ sont premières entre elles et, par conséquent, qu'on peut trouver des fonctions $M$ et $N$ satisfaisant à cette équation:

$$\varphi(x) M - x\psi(x) N = 1.$$

D'où nous tirons

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi(x)\left[\varphi(x) M - x\psi(x) N\right]\\ &= \varphi(x)\left[\Phi(x) M - x\psi(x) Q\right] - x\psi(x)\left[\Phi(x) N - \varphi(x) Q\right],\end{aligned}$$

$Q$ étant une fonction quelconque. De cette expression de $\Phi(x)$ on conclut qu'elle est représentée par la formule

$$\begin{aligned}\varphi(x)\left[B_{n-l-1} x^{n-l-1} + B_{n-l-2} x^{n-l-2} + \ldots . + B_1 x + B_0\right]\\ - x\psi(x)\left[C_l x^{l-1} + C_{l-1} x^{l-2} + \ldots\ldots . + C_2 x + C_1\right],\end{aligned}$$

si toutefois le choix convenable de $Q$ abaisse les degrés des fonctions

$$\Phi(x) M - x\psi(x) Q, \quad \Phi(x) N - \varphi(x) Q$$

respectivement au-dessous de $n - l$, $l$. Or, comme nous le verrons tout à l'heure, on y parvient toujours dans le cas où les équations

$$p_1 = 0, \; p_2 = 0, \ldots . p_d = 0$$

ne sont pas satisfaites, en prenant pour $Q$ le quotient de la division de $\Phi(x)M$ par $x\psi(x)$.

En effet, pour cette valeur de $Q$ la fonction

$$\Phi(x)M - x\psi(x)Q$$

se réduit à $R$, $R$ étant le reste de la division de $\Phi(x)M$ par $x\psi(x)$, et par conséquent, elle est de degré inférieur à celui de $x\psi(x)$ ou $x^{n-l}$.

En passant à la valeur de

$$\Phi(x)N - \varphi(x)Q,$$

nous remarquerons que les équations

$$\varphi(x)M - x\psi(x)N = 1, \quad \Phi(x)M - x\psi(x)Q = R$$

donnent

$$M = \frac{1 + x\psi(x)N}{\varphi(x)}, \quad Q = \frac{\Phi(x)M - R}{x\psi(x)}.$$

D'où résulte cette expression de $Q$:

$$Q = \frac{\Phi(x) + x\psi(x)\Phi(x)N - R\varphi(x)}{x\psi(x)\varphi(x)},$$

et par là

$$\Phi(x)N - \varphi(x)Q = \Phi(x)N - \frac{\Phi(x) + x\psi(x)\Phi(x)N - R\varphi(x)}{x\psi(x)} = -\frac{\Phi(x)}{x\psi(x)} + \frac{R\varphi(x)}{x\psi(x)}.$$

D'après cette valeur de

$$\Phi(x)N - \varphi(x)Q$$

on reconnaît aisément que son degré sera inférieur à $l$, tant que les équations

$$p_1 = 0, \; p_2 = 0, \ldots . p_d = 0$$

ne seront pas satisfaites, ou, ce qui revient au même, tant que le degré de la fonction

$$\psi(x) = p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \ldots + p_{n-l-1}x + p_{n-l}$$

surpassera $n - l - d - 1$, ou $\mu - l - 2$, $d$ étant égal à $n + 1 - \mu$.

Pour s'en assurer, on remarquera que dans ce cas, la fonction $\Phi(x)$ étant seulement de degré $\mu - 1$, le terme $\frac{\Phi(x)}{x\psi(x)}$ sera de degré inférieur à $\mu - 1 - (\mu - l - 1) = l$. Quant à l'autre terme de la valeur de

$$\Phi(x)N - \varphi(x)Q = -\frac{\Phi(x)}{x\psi(x)} + \frac{R\varphi(x)}{x\psi(x)},$$

il est aussi de degré inférieur à $l$, car $R$, comme nous l'avons vu, est de degré inférieur à celui de $x\psi(x)$, et la fonction

$$\varphi(x) = p_{n-l+1}x^l + p_{n-l+2}x^{l-1} + \ldots + p_n x + 1$$

ne peut pas être de degré plus élevé que $l$.

Ainsi nous parvenons à reconnaître que, dans le cas où les équations

$$p_1 = 0,\ p_2 = 0, \ldots p_d = 0$$

ne sont pas satisfaites et où $Q$ est le quotient de la division de $\Phi(x)M$ par $x\psi(x)$, les expressions

$$\Phi(x)M - x\psi(x)Q, \quad \Phi(x)N - \varphi(x)Q$$

sont respectivement de degrés inférieurs à $n-l$ et $l$, ce qu'il fallait démontrer.

De la même manière on parvient à reconnaître que, dans le cas où les équations

$$p_{n-l+1} = 0,\ p_{n-l+2} = 0, \ldots p_{n-l+d} = 0$$

ne sont pas satisfaites, les degrés des fonctions

$$\Phi(x)M - x\psi(x)Q, \quad \Phi(x)N - \varphi(x)Q$$

sont respectivement plus petits que $n-l$ et $l$, tant qu'on prend pour $Q$ le quotient de la division de $\Phi(x)N$ par $\varphi(x)$.

En vertu de quoi, comme nous l'avons vu, les équations (2), pour $\mu \overline{\overline{<}} n$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$ autres que zéro, entraînent certainement ces équations

$$p_1 = 0,\ p_2 = 0, \ldots p_d = 0,$$

$$p_{n-l+1} = 0,\ p_{n-l+2} = 0, \ldots p_{n-l+d} = 0,$$

où

$$d = n + 1 - \mu.$$

D'où découle, d'après le § 12, le théorème suivant:

## Théorème 4.

*Les quantités $p_1, p_2, \ldots p_n$ étant choisies de manière à ce que la fonction*

$$F(x) = \frac{p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \ldots + p_{n-l-1}x + p_{n-l}}{p_{n-l+1}x^l + p_{n-l+2}x^{l-1} + \ldots + p_n x + 1} - Y,$$

*depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, s'écarte le moins possible de zéro, le nombre des diverses solutions communes aux deux équations*

$$F^2(x) - L^2 = 0, \ (x^2 - h^2)\ F'(x) = 0$$

*et comprises entre $x = -h$ et $x = +h$ ne peut être inférieur à $n+1$ de $d$ unités, à moins qu'on n'ait*

$$p_1 = 0, \ p_2 = 0, \dots . p_d = 0, \ p_{n-l+1} = 0, \ p_{n-l+2} = 0, \dots . p_{n-l+d} = 0.$$

*La quantité $L$ est la limite des valeurs de $F(x)$ entre $x = -h$ et $x = +h$.*

Comme chaque racine commune aux deux équations entraîne une relation particulière entre leurs coefficients, il est clair que par ce théorème on obtiendra $n+1-d$ équations entre les quantités

$$p_1, \ p_2, \dots . p_n, \ L,$$

que les fonctions $F^2(x) - L^2$, $(x - h^2) F'(x)$ contiennent, et comme on a, en même temps,

$$p_1 = 0, \ p_2 = 0, \dots . p_d = 0,$$

$$p_{n-l+1} = 0, \ p_{n-l+2} = 0, \dots . p_{n-l+d} = 0,$$

on aura en définitive $n+d+1$ équations entre les $n+1$ quantités cherchées: $p_1, \ p_2, \dots \ p_n, \ L$. D'où il suit que, sauf le cas de $d = 0$, ces équations ne sauront être satisfaites à moins que les données du problème elles mêmes ne vérifient certaines conditions, ce qui nous porte à conclure que le nombre $d$ ne cesse d'être égal à 0 que dans des cas exceptionnels, où les quantités comprises dans la fonction $Y$ avec la valeur donnée de $h$ vérifient certaines équations.

Abstraction faite de ces cas, on aura

$$d = 0,$$

et alors, suivant le théorème démontré, le nombre des diverses solutions communes aux deux équations

$$F^2(x) - L^2 = 0, \ (x^2 - h^2)\ F'(x) = 0$$

et comprises entre $x = -h$ et $x = +h$ sera au moins égal à $n+1$, comme cela a lieu toujours pour les deux autres valeurs de $F(x)$ déjà considérées.

V.

§ 17. Pour montrer l'application des théorèmes relatifs aux trois valeurs particulières de $F(x)$ nous chercherons la solution de ces trois problèmes:

1) *Quelle est la fonction entière qui, parmi toutes celles de la forme* $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n$, *s'écarte le moins possible de zéro entre les limites* $x = -h$ *et* $x = +h$?

2) *Quelle est la fraction qui, parmi celles de la forme*

$$\frac{x^n + p' x^{n-1} + p'' x^{n-2} + \ldots + p^{(n-1)} x + p^{(n)}}{A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-2} x + A_{n-l-1}},$$

*ayant le même dénominateur* $A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-2} x + A_{n-l-1}$ *s'écarte le moins possible de zéro entre les limites* $x = -h$ *et* $x = +h$?

3) *Quelle est la fraction qui, parmi toutes les autres de la forme*

$$\frac{p' x^{n-l-1} + p'' x^{n-l-2} + \ldots + p^{(n-l-1)} x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)} x^l + p^{(n-l+2)} x^{l-1} + \ldots + p^{(n)} x + p^{(n+1)}},$$

*entre* $x = -h$ *et* $x = +h$ *s'écarte le moins possible d'un polynôme donné* $x^{n-l} + A x^{n-l-1} + B x^{n-l-2} + \ldots$?

§ 18. Tous ces problèmes ne sont, évidemment, que des cas particuliers de ceux, dont nous nous sommes occupés dans les §§ 14, 15, 16, et d'après les trois théorèmes démontrés ci-dessus on parvient facilement aux équations qui déterminent leurs solutions. Mais, en passant à la recherche des résultats définitifs, on reconnait tout de suite que les équations qui déterminent les quantités cherchées

$$p_1,\ p_2, \ldots p_{n-1},\ p_n$$

ne peuvent être résolues à l'aide des méthodes connues d'Algèbre, si ce n'est quand le nombre de ces quantités est très limité; car, ces équations étant de forme très compliquée, leur résolution, dans le cas de plusieurs inconnues, demande des calculs tout-à-fait impraticables. Donc, si l'on cherchait à résoudre nos problèmes au moyen de ces équations, on ne saurait aller au-delà d'un petit nombre de cas particuliers qui, pris isolément, ne présentent pas beaucoup d'intérêt. — Nous montrerons dans les paragraphes suivants qu'on peut donner la solution générale de nos problèmes, en les réduisant aux questions *d'Analyse indéterminée*.

Nous parviendrons à opérer cette réduction, en observant qu'en vertu des théorèmes démontrés plus haut la solution de ces problèmes est caractérisée par une propriété très simple dont jouit un système de deux équations, composées des fonctions cherchées, et dont l'expression analytique, comme on verra, fournit des équations indéterminées de second degré entre les polynômes cherchés contenus dans les fonctions et certains autres polynômes qui jouent le rôle d'inconnues auxiliaires. C'est à l'aide de ces équations indéterminées que nous obtenons la solution définitive de nos problèmes, solution qu'on ne pouvait trouver à l'aide des méthodes ordinaires d'Algébre.

§ 19. La même méthode peut être avantageusement employée dans plusieurs autres cas et, entr'autres, dans les recherches générales sur la représentation approximative des fonctions, soit sous la forme d'un polynôme, soit sous la forme d'une fraction quelconque, où elle donne la solution du problème mentionné dans le § 4. C'est ce que nous nous proposons de faire dans un autre Mémoire, où l'on verra combien la solution des problèmes particuliers, que nous donnerons à présent, est importante pour les recherches générales sur la représentation approximative des fonctions sous une forme rationnelle assignée.

## Sur la fonction qui, parmi celles de la forme

$$x_n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n,$$

## s'écarte le moins possible de zéro entre les limites $x = -h$ et $x = +h$.

VI.

§ 20. Comme la fonction

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n$$

n'est que la valeur de

$$p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n - Y$$

pour le cas, où $Y = -x^n$, nous concluons, en vertu du théorème 2, que, les coefficients

$$p_1, p_2, \dots p_{n-1}, p_n$$

étant choisis de manière à ce que l'expression

$$F(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n$$

s'écarte le moins possible de zéro entre $x = -h$ et $x = +h$, les équations

$$F^2(x) - L^2 = 0,\ (x^2 - h^2) F'(x) = 0 \tag{6}$$

ont au moins $n + 1$ solutions communes, différentes entre elles.

Supposons donc que

$$x = x_0$$

soit l'une de ces solutions. Il n'est pas difficile de s'assurer qu'alors l'expression

$$(x^2 - h^2)\,(F^2(x) - L^2)$$

sera divisible par $(x - x_0)^2$. En effet, d'après la première des équations précédentes, l'expression

$$(x^2 - h^2)\,(F^2(x) - L^2)$$

s'annule pour $x = x_0$. De plus, comme sa première dérivée est

$$2\,(x^2 - h^2)\,F(x)\,F'(x) + 2\,x\,(F^2(x) - L^2),$$

elle se réduira aussi à zéro pour $x = x_0$ en vertu des mêmes équations, ce qui nous prouve que l'expression

$$(x^2 - h^2)\,(F^2(x) - L^2)$$

est divisible par $(x - x_0)^2$.

La même chose a lieu par rapport aux autres solutions, communes aux équations (6), et comme le nombre de ces solutions, différentes entre elles, n'est pas au-dessous de $n + 1$, il en résulte que l'expression

$$(x^2 - h^2)\,(F^2(x) - L^2)$$

est divisible par $n + 1$ facteurs différents entre eux

$$(x - x_0)^2,\ (x - x_1)^2,\ (x - x_2)^2, \ldots .(x - x_n)^2,$$

et, par conséquent, par leur produit

$$(x - x_0)^2\,(x - x_1)^2\,(x - x_2)^2 \ldots .(x - x_n)^2.$$

Mais l'expression

$$(x^2 - h^2)\,(F^2(x) - L^2),$$

où

$$F(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots . + p_{n-1} x + p_n,$$

n'étant que de degré $2n+2$, le quotient de la division de cette expression par le produit

$$(x-x_0)^2 (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 \ldots (x-x_n)^2$$

ne peut être qu'une constante. Donc

$$(x^2-h^2)\left(F^2(x)-L^2\right) = C(x-x_0)^2 (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 \ldots (x-x_n)^2.$$

Cette équation n'aura lieu, évidemment, que si $x+h$ et $x-h$ sont au nombre des facteurs

$$x-x_0,\ x-x_1,\ x-x_2, \ldots x-x_n.$$

Or, si l'on suppose

$$x-x_0 = x+h,\ x-x_1 = x-h,$$

cette équation, divisée par $(x+h)(x-h) = x^2-h^2$, devient

$$F^2(x) - L^2 = C(x^2-h^2)(x-x_2)^2 \ldots (x-x_n)^2,$$

ou

$$(7) \qquad F^2(x) - L^2 = (x^2-h^2)\,\Phi^2(x),$$

en dénotant par $\Phi(x)$ la fonction entière

$$\sqrt{C}(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

C'est à l'aide de cette équation que nous trouverons la fonction $F(x)$ qui, parmi celles de la forme $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n$, s'écarte le moins possible de zéro entre $x = -h$ et $x = +h$. La quantité $L$, comme nous le savons, détermine la plus grande valeur de cette fonction pour $x$ comprise entre les limites $x = -h$ et $x = +h$.

§ 21. Pour trouver la fonction $F(x)$ d'après l'équation (7), remarquons que celle-ci devient

$$\left[F(x) - \Phi(x)\sqrt{x^2-h^2}\right]\left[F(x) + \Phi(x)\sqrt{x^2-h^2}\right] = L^2,$$

et par là

$$F(x) - \Phi(x)\sqrt{x^2-h^2} = \frac{L^2}{F(x) + \Phi(x)\sqrt{x^2-h^2}}.$$

D'où nous tirons

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} = \sqrt{x^2 - h^2} + \frac{L^2}{\Phi(x)\left[F(x) + \Phi(x)\sqrt{x^2 - h^2}\right]},$$

ce qui prouve que la fraction $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ est la valeur de $\sqrt{x^2 - h^2}$ exacte jusqu'aux termes de l'ordre $\frac{1}{\Phi^2(x)}$ inclusivement.

Mais ceci ne peut avoir lieu que si $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ est l'une des fractions convergentes de $\sqrt{x^2 - h^2}$, que l'on trouve par son développement en fraction continue. De plus, comme les fonctions $F(x)$, $\Phi(x)$, en vertu de l'équation (7), sont nécessairement premières entre elles, et que

$$F(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + p_{n-1} x + p_n,$$

il est clair que $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ est celle des fractions convergentes de $\sqrt{x^2 - h^2}$ dont le numérateur est de degré $n$, et que ses parties, à un facteur constant près, sont égales à $F(x)$ et $\Phi(x)$. On aura donc

$$F(x) = C_0 P_n, \quad \Phi(x) = C_0 Q_n,$$

en dénotant par $\frac{P_n}{Q_n}$ celle des fractions convergentes de $\sqrt{x^2 - h^2}$, dont le numérateur est de degré $n$. Quant à la constante $C_0$, on trouvera sa valeur, en remarquant que la fonction $F(x)$ doit être de la forme $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + p_{n-1} x + p_n$, et que, par conséquent, le coefficient de $x^n$ doit être égal à 1.

§ 22. D'après le développement de $\sqrt{x^2 - h^2}$ en fraction continue il n'est pas difficile de trouver la série de ses fractions convergentes et, par là, celle que nous avons désignée par $\frac{P_n}{Q_n}$ et qui détermine les fonctions $F(x)$ et $\Phi(x)$. Mais on peut trouver directement les valeurs des fonctions $P_n$ et $Q_n$, comme nous allons le montrer.

D'après l'identité

$$\left(x - \sqrt{x^2 - h^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - h^2}\right) = h^2,$$

qu'on vérifie aisément, on a

$$\sqrt{x^2 - h^2} - x = -\frac{h^2}{x + \sqrt{x^2 - h^2}} = -\frac{h^2}{2x + \sqrt{x^2 - h^2} - x},$$

et par là on trouve

$$\sqrt{x^2-h^2}-x=-\frac{h^2}{2x+\sqrt{x^2-h^2}-x}=-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x+\sqrt{x^2-h^2}-x}}$$

$$=-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x+\sqrt{x^2-h^2}-x}}}=\ldots=-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\cdots-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{\sqrt{x^2-h^2}+x}}}}$$

D'où l'on voit que l'expression $\sqrt{x^2-h^2}$ se développe en fraction continue

$$x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\cdots}}$$

et que le quotient complet est égal à $\sqrt{x^2-h^2}+x$. Donc, en dénotant par

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ldots\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}},\ \frac{P_m}{Q_m},\ldots$$

la série des fractions convergentes de

$$\sqrt{x^2-h^2}=x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\cdots}}}$$

on a

$$\sqrt{x^2-h^2}=\frac{P_m(\sqrt{x^2-h^2}+x)-h^2P_{m-1}}{Q_m(\sqrt{x^2-h^2}+x)-h^2Q_{m-1}},$$

et par là

$$P_m-Q_m\sqrt{x^2-h^2}=\frac{h^2(P_{m-1}-Q_{m-1}\sqrt{x^2-h^2})}{x+\sqrt{x^2-h^2}}.$$

Comme

$$h^2=(x+\sqrt{x^2-h^2})\,(x-\sqrt{x^2-h^2}),$$

cette valeur de $P_m-Q_m\sqrt{x^2-h^2}$ nous donne

$$P_m-Q_m\sqrt{x^2-h^2}=(x-\sqrt{x^2-h^2})\,(P_{m-1}-Q_{m-1}\sqrt{x^2-h^2}),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{P_m-Q_m\sqrt{x^2-h^2}}{P_{m-1}-Q_{m-1}\sqrt{x^2-h^2}}=x-\sqrt{x^2-h^2}.$$

En faisant dans cette formule

$$m=n,\ m=n-1,\ m=n-2,\ldots m=3,\ m=2,$$

nous obtenons la série d'équations:

$$\frac{P_n - Q_n\sqrt{x^2-h^2}}{P_{n-1} - Q_{n-1}\sqrt{x^2-h^2}} = x - \sqrt{x^2-h^2},$$

$$\frac{P_{n-1} - Q_{n-1}\sqrt{x^2-h^2}}{P_{n-2} - Q_{n-2}\sqrt{x^2-h^2}} = x - \sqrt{x^2-h^2},$$

$$\frac{P_{n-2} - Q_{n-2}\sqrt{x^2-h^2}}{P_{n-3} - Q_{n-3}\sqrt{x^2-h^2}} = x - \sqrt{x^2-h^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{P_3 - Q_3\sqrt{x^2-h^2}}{P_2 - Q_2\sqrt{x^2-h^2}} = x - \sqrt{x^2-h^2},$$

$$\frac{P_2 - Q_2\sqrt{x^2-h^2}}{P_1 - Q_1\sqrt{x^2-h^2}} = x - \sqrt{x^2-h^2},$$

qui, étant multipliées entre elles, donnent

$$\frac{P_n - Q_n\sqrt{x^2-h^2}}{P_1 - Q_1\sqrt{x^2-h^2}} = \left(x - \sqrt{x^2-h^2}\right)^{n-1}.$$

D'où nous concluons

$$P_n - Q_n\sqrt{x^2-h^2} = \left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^{n-1} = \left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^n,$$

en remarquant que la première fraction convergente de

$$\sqrt{x^2-h^2} = x - \cfrac{h^2}{2x - \cfrac{h^2}{2x - \cdots}}$$

est égale à $\frac{x}{1}$, et que, par conséquent,

$$P_1 = x,\ Q_1 = 1,\ P_1 - Q_1\sqrt{x^2-h^2} = x - \sqrt{x^2-h^2}.$$

L'équation

$$P_n - Q_n\sqrt{x^2-h^2} = \left(x - \sqrt{x^2-h^2}\right)^n,$$

par le changement du signe de $\sqrt{x^2-h^2}$, devient

$$P_n + Q_n\sqrt{x^2-h^2} = \left(x + \sqrt{x^2-h^2}\right)^n,$$

et dès lors nous avons

$$P_n = \frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^n + (x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{2}, \quad Q_n = \frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^n - (x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{2\sqrt{x^2-h^2}}.$$

D'après cela la fonction cherchée $F(x)$, qui est égale, comme nous l'avons vu (§ 21), à $C_0 P_n$, s'exprime ainsi:

$$F(x) = C_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2}.$$

Cette valeur de $F(x)$, développée selon les puissances de $x$, a pour premier terme $2^{n-1} C_0 x^n$, et $F(x)$ devant être de la forme

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_1 x + p_0,$$

il s'ensuit que $2^{n-1} C_0 = 1$. D'où

$$C_0 = \frac{1}{2^{n-1}},$$

et, en portant cette valeur de $C_0$ dans l'expression précédente de $F(x)$, nous trouvons définitivement

$$(8) \qquad F(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2^n}.$$

Telle est la valeur de la fonction $F(x)$ qui, parmi celles de la forme $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n$, s'écarte le moins possible de zéro entre $x = -h$ et $x = +h$.

## VII.

§ 23. La valeur trouvée de $F(x)$ fournit aisément la limite des écarts de zéro de cette fonction entre $x = -h$ et $x = +h$, limite que nous avons désignée par $L$.

En effet, remarquons que l'équation (7), pour $x = h$, donne

$$F^2(h) - L^2 = 0,$$

et par là

$$L = \pm F(h).$$

Mais, en faisant $x = h$ dans la valeur trouvée de $F(x)$, on a

$$F(h) = \frac{h^n}{2^{n-1}};$$

donc

$$L = \frac{h^n}{2^{n-1}}.$$

D'après cette valeur de $L$, et en remarquant que notre fonction $F(x)$ est celle qui, parmi toutes les autres de la forme

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n,$$

s'écarte le moins de zéro entre $x = -h$ et $x = +h$, nous parvenons à ce théorème:

## Théorème 5.

*La valeur numérique de la fonction* $x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n$, *entre* $x = -h$ *et* $= +h$, *ne peut rester inférieure à* $2\left(\frac{h}{2}\right)^n$.

§ 24. De ce théorème se déduisent plusieurs autres; nous en indiquerons quelques-uns.

## Théorème 6.

*Si la fonction* $f(x)$ *est de la forme* $x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n$, *et que la différence entre deux valeurs* $f(a-h)$, $f(a+h)$ *soit inférieure à* $4\left(\frac{h}{2}\right)^n$, *la première dérivée de* $f(x)$ *change de signe entre* $x = a - h$ *et* $x = a + h$.

Pour le démontrer supposons le contraire, savoir, que $f'(x)$ ne change pas de signe entre $x = a - h$ et $x = a + h$. Dans cette supposition, la fonction

$$f(a+x) - \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2},$$

depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, ne pourrait être que constamment croissante ou décroissante, et par conséquent, resterait comprise entre ses deux valeurs extrêmes

$$f(a-h) - \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = \frac{f(a-h) - f(a+h)}{2},$$

$$f(a+h) - \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = -\frac{f(a-h) - f(a+h)}{2}.$$

D'où il suit que sa valeur numérique, depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, ne surpasserait pas celle de $\frac{f(a-h) - f(a+h)}{2}$ et, par conséquent, serait inférieure à $2\left(\frac{h}{2}\right)^n$, cette valeur, d'après l'énoncé du théorème, étant numériquement plus grande que

$$\frac{f(a-h) - f(a+h)}{2}.$$

Mais comme la fonction

$$f(a+x)-\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}$$

est de la forme

$$x^n+p_1x^{n-1}+\ldots.+p_{n-1}x+p_n,$$

ceci ne peut avoir lieu en vertu du théorème 5, ce qui prouve le théorème énoncé.

## Théorème 7.

*Si la valeur numérique de l'intégrale*

$$\int_{H_0}^{H}(x^{n-1}+Ax^{n-2}+\ldots.+K)\,dx$$

*est inférieure à* $\frac{4}{n}\left(\frac{H-H_0}{4}\right)^n$, *on trouvera au moins une racine de l'équation*

$$x^{n-1}+Ax^{n-2}+\ldots.+K=0$$

*entre* $x=H_0$ *et* $x=H$.

Pour le prouver, nous remarquerons qu'en faisant

$$n\int_0^x(x^{n-1}+Ax^{n-2}+\ldots.+K)\,dx=f(x),$$

$$H_0=a-h,$$

$$H=a+h,$$

on trouve

$$f(a+h)-f(a-h)=n\int_{H_0}^{H}(x^{n-1}+Ax^{n-2}+\ldots.+K)\,dx,$$

$$\left(\frac{H-H_0}{4}\right)^n=\left(\frac{h}{2}\right)^n,$$

et comme, suivant le théorème, l'intégrale définie

$$\int_{H_0}^{H}(x^{n-1}+Ax^{n-2}+\ldots.+K)\,dx$$

est numériquement inférieure à $\frac{4}{n}\left(\frac{H-H_0}{4}\right)^n$, il en résulte que la valeur numérique de $f(a+h)-f(a-h)$ est au-dessous de $4\left(\frac{h}{2}\right)^n$. D'où, en remarquant que

$$f(x)=n\int_0^x(x^{n-1}+Ax^{n-2}+\ldots.+K)\,dx$$

est une fonction de la forme

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n,$$

nous concluons en vertu du théorème précédent que l'équation

$$f'(x) = n\,(x^{n-1} + A x^{n-2} + \ldots + K) = 0$$

doit avoir au moins une racine comprise entre $a - h = H_0$, $a + h = H$, ce qu'il s'agissait de prouver.

## Théorème 8.

*Le nombre des variations de signes dans la suite*

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x),\ f^{(n)}(x),$$

*où*

$$f(x) = x^n + A x^{n-1} + \ldots + K,$$

*change toujours, quand on passe de la substitution quelconque $x = t$ à celle déterminée par la formule $x = t \pm 4 \sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}$, en prenant le radical avec le signe contraire à celui de $\frac{f(t)}{f'(t)}$.*

Nous ne traiterons ici que le cas où $f(t)$ et $f'(t)$ sont positives. Mais on reconnaîtra aisément que la même démonstration est applicable à tous les cas.

Pour prouver notre théorème dans le cas où $f(t)$ et $f'(t)$ sont positives, nous allons montrer que, ces valeurs étant au-dessus de zéro, au moins l'une des fonctions

$$f(x),\ f'(x)$$

change de signe entre $x = t - 4 \sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}$ et $x = t$. En effet, si les fonctions $f(x)$, $f'(x)$ demeuraient positives entre ces deux limites, la valeur

$$f\left(t - 4 \sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}\right)$$

serait positive et au-dessous de $f(x)$, et par conséquent, la valeur numérique de

$$f(t) - f\left(t - 4 \sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}\right)$$

resterait au-dessous de $f(t)$, ou, ce qui revient au même, au-dessous de

$$4\left[\frac{t-\left(t-4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}\right)}{4}\right]^n.$$

Mais cela est inadmissible, car, en vertu du théorème 6, la valeur numérique de la différence

$$f(t)-f\left(t-4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}\right)$$

ne peut être inférieure à

$$4\left[\frac{t-\left(t-4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}\right)}{4}\right]^n,$$

à moins que $f'(x)$ ne change de signe dans les limites

$$x=t-4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}},\quad x=t.$$

Donc, il est certain que dans ces limites au moins l'une des fonctions $f(x)$, $f'(x)$ cesse d'être positive.

Comme notre théorème devient évident, si $f(x)$ change de signe entre $x=t-4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}$, $x=t$, nous n'avons qu'à examiner le cas où, dans ces limites, la fonction $f(x)$ demeure positive et $f'(x)$ change de signe.

Puisque $f'(t)$ est positive, il est clair que dans le cas, où $f'(x)$ change de signe entre $x=t-4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}$ et $x=t$, elle doit passer du négatif au positif. Mais ce changement de signe fera disparaître deux variations de signes dans la suite

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ldots . f^{(n-1)}(x),\ f^{(n)}(x);$$

car, par hypothèse, $f(x)$ est positive depuis $x=t-4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}$ jusqu'à $x=t$, et $f''(x)$ ne saurait être négative, quand la fonction $f'(x)$ passe du négatif au positif, ce qui prouve notre théorème.

Dans le cas particulier, où l'équation

$$f(x)=0$$

n'a que des racines réelles, le théorème que nous venons d'établir entraîne celui-ci:

## Théorème 9.

*Si l'équation*

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + \ldots + K = 0$$

*n'a que des racines réelles, quelle que soit la valeur de $t$, on trouvera toujours l'une de ses racines entre $x = t$ et $x = t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}$, en prenant le radical avec le signe contraire à celui de $\frac{f(t)}{f'(t)}$.*

## Théorème 10.

*Si l'équation $x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx + K = 0$ ne contient que des puissances impaires de $x$, entre les limites $-2\sqrt[2l+1]{\frac{1}{2}K}$, $+2\sqrt[2l+1]{\frac{1}{2}K}$ on trouvera au moins une de ses racines.*

En effet, si l'équation

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx + K = 0$$

n'avait point de racines entre

$$x = -2\sqrt[2l+1]{\tfrac{1}{2}K}, \quad x = +2\sqrt[2l+1]{\tfrac{1}{2}K},$$

la même chose aurait lieu pour celle-ci

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx - K = 0,$$

qu'on trouve, en changeant le signe de $x$ dans l'équation

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx + K = 0.$$

D'où, en prenant le produit de ces équations, on serait porté à conclure que dans les mêmes limites l'équation

$$(x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx)^2 - K^2 = 0$$

n'a pas de racines. Mais comme la fonction

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx$$

s'annule pour $x = 0$, cela suppose que sa valeur numérique, depuis

$x = -2\sqrt[2l+1]{\frac{1}{2}K}$ jusqu'à $x = +2\sqrt[2l+1]{\frac{1}{2}K}$, reste au-dessous de $K$, ce qui est inadmissible, car, d'après le théorème 5, la fonction de la forme $x^{2l+1} + p_1 x^{2l} + \ldots + p_{2l+1}$, entre ces limites, ne peut rester numériquement au-dessous de

$$2\left(\frac{2\sqrt[2l+1]{\frac{1}{2}K}}{2}\right)^{2l+1} = K.$$

D'où résulte notre théorème.

## Théorème 11.

*Si l'équation*

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx + K - K_0 x^{2\lambda} = 0$$

*ne contient qu'un terme* $-K_0 x^{2\lambda}$ *avec la puissance paire de* $x$, *et que ce terme soit de signe contraire à celui du terme connu* $K$, *on trouvera au moins une de ses racines entre les limites* $x = -2\sqrt[2l+1]{\frac{1}{2}K}, x = +2\sqrt[2l+1]{\frac{1}{2}K}$.

En remarquant que l'équation

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx + K - K_0 x^{2\lambda} = 0$$

par le changement de $x$ en $-x$ devient

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx - K + K_0 x^{2\lambda} = 0,$$

et que ces équations, multipliées entre elles, donnent

$$(x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx)^2 - (K - K_0 x^{2\lambda})^2 = 0,$$

nous concluons, comme dans la démonstration précédente, que cette équation n'aurait point de racines entre

$$x = -2\sqrt[2l+1]{\frac{1}{2}K}, \quad x = +2\sqrt[2l+1]{\frac{1}{2}K},$$

si aucune des racines de l'équation

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx + K - K_0 x^{2\lambda} = 0$$

n'était comprise dans ces limites, et par là que la valeur numérique de la fonction

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \ldots + Jx,$$

depuis $x = -2\sqrt[2l+1]{\frac{1}{2}K}$ jusqu'à $x = +2\sqrt[2l+1]{\frac{1}{2}K}$, resterait au-dessous de celle de $K - K_0 x^{2\lambda}$. Or cela est évidemment impossible, si l'expression $K - K_0 x^{2\lambda}$ s'annule dans ces limites, la valeur numérique n'étant jamais au-dessous de zéro. — Mais cela ne peut avoir lieu non plus, si dans ces limites l'expression $K - K_0 x^{2\lambda}$ ne s'annule pas; car dans ce cas, $K_0$ et $K$ étant de même signe, la valeur numérique de $K - K_0 x^{2\lambda}$ reste au-dessous de celle de $K$, et, d'après ce que nous venons de voir dans la démonstration du théorème précédent, la fonction

$$x^{2l+1} + A x^{2l-1} + \ldots . + Jx,$$

dans les limites

$$x = -2\sqrt[2l+1]{\frac{1}{2}K}, \quad x = +2\sqrt[2l+1]{\frac{1}{2}K},$$

ne peut rester numériquement au-dessous de $K$, et, à plus forte raison, d'une valeur nnmériquement plus petite, ce qui prouve notre théorème.

## VIII.

§ 25. Les théorèmes que nous avons donnés et plusieurs autres de la même espèce ne sont pas les seuls résultats qu'on puisse tirer de la valeur de la fonction entière qui, parmi celles de la même forme, s'écarte le moins possible de zéro entre les limites données. Nous allons montrer maintenant le parti que l'on peut en tirer par rapport à *l'interpolation.*

Soit $f(x)$ l'expression exacte des valeurs que l'on cherche à représenter approximativement par la fonction entière

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots . + Hx^{n-1}$$

et

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots .\ f(x_n)$$

les $n$ valeurs de $f(x)$ au moyen desquelles on détermine les coefficients $A$, $B$, $C, \ldots . H$ de l'expression cherchée de $f(x)$.

Comme l'on trouve les coefficients

$$A,\ B,\ C,\ \ldots .\ H,$$

en égalant entre elles la fonction $f(x)$ et son expression cherchée

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots . + Hx^{n-1},$$

pour $x = x_1, x_2, \ldots . x_n$, la différence de ces deux fonctions se réduira à zéro pour toutes ces valeurs de $x$. Mais d'après cela, tant que la fonction $f(x)$ et ses dérivées $f'(x), f''(x), \ldots . f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x)$ ne cessent d'être finies et continues dans les limites où sont comprises $x, x_1, x_2, \ldots . x_n$, on trouve

$$f(x) - (A + Bx + Cx^2 + \ldots . + Hx^{n-1}) = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{1.2 \ldots . n}(x - x_1)(x - x_2) \ldots . (x - x_n),$$

où $\alpha$ est une quantité moyenne entre $x, x_1, x_2, \ldots . x_n$.

§ 26. Comme la différence

$$f(x) - (A + Bx + Cx^2 + \ldots . + Hx^{n-1})$$

désigne l'erreur de la valeur approchée de $f(x)$ obtenue d'après la formule

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + \ldots . + Hx^{n-1},$$

l'équation précédente nous montre que le degré de précision des valeurs de $f(x)$, qu'on trouve d'après cette formule, ou, ce qui revient au même, d'après l'interpolation, sera plus ou moins grand selon les valeurs de l'expression

$$\frac{f^n(\alpha)}{1.2 \ldots . n}(x - x_1)(x - x_2) \ldots . (x - x_n).$$

Puisque cette expression, dans l'étendue où l'on fait l'interpolation, peut atteindre des limites plus ou moins considérable selon les valeurs de $x_1, x_2, \ldots . x_n$, il est clair que le degré de précision des valeurs, obtenues par l'interpolation, dépend non seulement de la nature de la fonction interpolée et du nombre de termes $f(x_1), f(x_2) \ldots . f(x_n)$, dont on se sert pour l'interpolation, mais aussi du choix plus ou moins convenable de ces termes. Plus l'expression

$$\frac{f^n(\alpha)}{1.2 \ldots . n}(x - x_1)(x - x_2) \ldots . (x - x_n)$$

s'approche de zéro dans les limites de l'interpolation, plus les valeurs

$$f(x_1),\ f(x_2), \ldots . f(x_n)$$

sont avantageuses pour la précision des résultats. Mais comme l'on ne sait rien sur l'expression exacte de la fonction interpolée $f(x)$, et par là sur la relation entre la valeur de $f^n(\alpha)$ et celle de $x, x_1, x_2, \ldots . x_n$, il ne reste dans le choix de $f(x_1), f(x_2) \ldots . f(x_n)$ qu'à chercher à diminuer autant que possible le facteur

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots . (x - x_n)$$

entre les limites d'interpolation.

Donc, sous le rapport de la précision des résultats d'interpolation, à tous les systèmes des valeurs de

$$f(x_1),\ f(x_2)\ \ldots\ f(x_n),$$

on préférera celui dans lequel la fonction

$$(x-x_1)\,(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_n),$$

entre les limites d'interpolation, s'écarte le moins de zéro, et par conséquent, d'après le § 22, on prendra

$$(x-x_1)\,(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_n)=\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^n+(x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{2^n},$$

s'il s'agit d'interpoler entre les limites

$$x=-h,\quad x=+h.$$

§ 27. La formule que nous venons d'obtenir nous montre, que les valeurs qu'on doit prendre pour $x_1,\ x_2,\ldots x_n$, dans l'interpolation entre les limites $x=-h$ et $x=+h$, sont les $n$ racines de cette équation:

$$\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^n+(x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{2^n}=0.$$

Or, si l'on fait

$$x=h\cos\varphi,$$

cette équation devient

$$\cos(n\varphi)=0.$$

D'où il suit

$$\varphi=\frac{2k+1}{2n}\pi,$$

$k$ étant un nombre entier quelconque.

Donc, les $n$ racines de l'équation

$$\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^n+(x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{2^n}=0,$$

et, par conséquent, les valeurs de $x_1,\ x_2,\ldots x_n$ dont nous venons de parler s'expriment ainsi:

$$h\cos\frac{\pi}{2n},\ h\cos\frac{3\pi}{2n},\ldots h\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}. \tag{9}$$

L'avantage de ces valeurs de $x_1,\ x_2,\ldots x_n$ sur celles équidistantes qu'on emploie ordinairement dans l'interpolation, se manifeste très clairement. En effet, d'après le § 23, dans le cas où

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_n)=\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^n+(x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{2^n},$$

le produit

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_n),$$

depuis $x=-h$ jusqu'à $x=+h$, n'atteint que le *double* de $\left(\frac{h}{2}\right)^n$, tandis que dans le cas de $x_1, x_2, \ldots. x_n$ équidistantes

$$x_1=h,\ x_2=\frac{n-3}{n-1}h,\ x_3=\frac{n-5}{n-1}h,\ \ldots.\ x_n=-h,$$

on trouve que le produit

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_n)$$

dans les mêmes limites $x=-h$, $x=+h$, ne reste pas inférieur au *triple* de $\left(\frac{h}{2}\right)^n$. Par exemple, pour

$$n=2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

on trouve qu'avec ces valeurs de $x_1, x_2, \ldots. x_n$ le produit

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_n),$$

dans les limites $x=-h$, $x=+h$, atteint les valeurs suivantes:

$$4\left(\frac{h}{2}\right)^2,\ \frac{16}{\sqrt{27}}\left(\frac{h}{2}\right)^3,\ \frac{256}{81}\left(\frac{h}{2}\right)^4,\ 2\sqrt{3}\left(\frac{h}{2}\right)^5.$$

De plus, en cherchant le *maximum maximorum* de cette fonction entre $x=-h$, $x=+h$, dans le cas de $n$ grand, on trouve pour sa valeur asymptotique l'expression

$$\frac{1}{\log n}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(\frac{4}{e}\right)^n\left(\frac{h}{2}\right)^n,$$

où le facteur de $\left(\frac{h}{2}\right)^n$ tend évidemment vers $\infty$, à mesure que le nombre $n$ augmente.

§ 28. Comme la valeur de $f^{(n)}(\alpha)$, dans l'expression de l'erreur d'interpolation

$$\frac{f^{(n)}(\alpha)}{1.2\ldots.n}(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_n),$$

reste inconnue, on ne peut se représenter nettement combien on diminue son *maximum maximorum,* entre $x = -h$ et $x = +h$, en remplaçant les valeurs équidistantes $x_1, x_2, \ldots . x_n$ par celles déterminées par les expressions (9). Mais il est facile de s'assurer que, outre le cas exceptionnel, où $f^{(n)}(0) = 0$, le rapport de *maximum maximorum* de l'expression

$$\frac{f^{(n)}(\alpha)}{1.2\ldots.n}(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_n)$$

et de son facteur

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_n),$$

qu'on trouve entre $x = -h$ et $x = +h$, en prenant les deux systèmes des valeurs de $x_1, x_2, \ldots . x_n$ dont nous avons parlé, tendent vers la même limite, à mesure que $h$ s'approche de zéro.

En effet, soient $E$, $M$ les plus grandes valeurs des expressions

$$\frac{f^{(n)}(\alpha)}{1.2\ldots.n}(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_n),$$
$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_n),$$

dans le cas où $x_1, x_2, \ldots . x_n$ sont déterminées par (9), et où $x$ reste entre les limites $-h$ et $+h$. Comme le rapport

$$\frac{E}{M}$$

sera compris entre la plus grande et la plus petite des valeurs que peut avoir l'expression

$$\frac{f^{n}(\alpha)}{1.2\ldots.n}$$

depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, et que $\alpha$ est une quantité restant dans les mêmes limites que $x, x_1, x_2, \ldots . x_n$, qui sont dans le cas actuel $-h$ et $+h$, nous trouvons

$$\frac{E}{M} = \frac{f^{(n)}(\theta h)}{1.2\ldots.n},$$

en désignant par $\theta$ une valeur comprise entre $-1$ et $+1$.

De la même manière nous obtenons

$$\frac{E'}{M'} = \frac{f^{(n)}(\theta_1 h)}{1.2\ldots.n},$$

en désignant par $E'$, $M'$ les plus grandes valeurs des expressions

$$\frac{f^{(n)}(\alpha)}{1.2\ldots.n}(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_n),$$
$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_n),$$

qu'on trouve entre $x = -h$ et $x = +h$, en prenant $x_1, x_2, \ldots . x_n$ équidistantes, et en désignant par $\theta_1$ une quantité comprise entre $-1$ et $+1$.

Or, en divisant l'une par l'autre les valeurs de

$$\frac{E}{M}, \quad \frac{E'}{M'},$$

on a

$$\frac{E}{E'} : \frac{M}{M'} = \frac{f^{(n)}(\theta h)}{f^{(n)}(\theta_1 h)},$$

ce qui prouve que le rapport des valeurs

$$\frac{E}{E'}, \quad \frac{M}{M'},$$

tend vers l'unité, quand $h$ s'approche de zéro et que $f^{(n)}(\theta h)$, $f^{(n)}(\theta_1 h)$, pour $h = 0$, ne s'annulent pas, ce qu'il s'agissait de montrer.

Nous avons vu que le rapport $\frac{M}{M'}$ reste inférieur à $\frac{2}{3}$. Donc, en vertu de ce que nous avons prouvé, il est certain que le rapport $\frac{E}{E'}$, outre le cas exceptionnel $f^{(n)}(0) = 0$, sera nécessairement au-dessous de 1, tant que $h$ sera assez petit.

## Sur la fraction qui, parmi toutes celles de la forme

$$\frac{x^n + p' x^{n-1} + \ldots . + p^{(n-1)} x + p^{(n)}}{A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots . + A_{n-l-1}}$$

## et avec le même dénominateur $A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots . + A_{n-l-1}$, s'écarte le moins possible de zéro entre les limites $x = -h$ et $x = +h$.

## IX.

§ 29. La fraction dont il s'agit peut être mise évidemment sous la forme

$$\frac{p' x^{n-1} + p'' x^{n-2} + \ldots . + p^{(n)}}{A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots . + A_{n-l-1}} - \frac{-x^n}{A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots . + A_{n-l-1}},$$

et comme cette expression n'est qu'un cas particulier de celle-ci:

$$\frac{p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots . + p_n}{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots . + A_m} - Y,$$

que nous avons traitée dans le § 15, nous concluons du théorème 3, que la fraction cherchée

$$\frac{x^n + p' x^{n-1} + \ldots . + p^{(n-1)} x + p^{(n)}}{A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots . + A_{n-l-1}}$$

que nous dénoterons pour abréger par $F(x)$, doit jouir de cette propriété:

*Dans les équations*

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2)\, F'(x) = 0$$

*on trouve au moins $n+1$ solutions communes, différentes entre elles et comprises dans les limites $x = -h$, $x = +h$.*

Conformément à ce que nous avons dit dans le § 15, nous supposons que le dénominateur

$$A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots . + A_{n-l-1}$$

ne s'annule pas entre $x = -h$ et $x = +h$.

§ 30. En faisant pour abréger

$$x^n + p' x^{n-1} + \ldots . + p^{(n-1)} x + p^{(n)} = U,$$
$$A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots . + A_{n-l-1} = v,$$

nous trouvons

$$F(x) = \frac{x^n + p' x^{n-1} + \ldots . + p^{(n-1)} x + p^{(n)}}{A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots . + A_{n-l-1}} = \frac{U}{v},$$

et par là les équations

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2)\, F'(x) = 0$$

se réduisent à celles-ci:

$$U^2 - L^2 v^2 = 0, \quad (x^2 - h^2)\, \frac{v \frac{dU}{dx} - U \frac{dv}{dx}}{v^2} = 0.$$

D'après cela on reconnaît aisément que, $x = x_0$ étant une solution commune des équations

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2)\, F'(x) = 0,$$

cette valeur de $x$ vérifie aussi les deux équations suivantes:

$$(x^2 - h^2)\,(U^2 - L^2 v^2) = 0,$$
$$\frac{d\,(x^2 - h^2)\,(U^2 - L^2 v^2)}{dx} = 0.$$

En effet, la première de ces équations est une conséquence immédiate de celle-ci:

$$U^2 - L^2 v^2 = 0.$$

Quant à la seconde, elle se réduit à la forme

$$2x\,(U^2 - L^2 v^2) + 2\,(x^2 - h^2)\left(U\frac{dU}{dx} - L^2 v\,\frac{dv}{dx}\right) = 0,$$

où, en vertu de l'équation

$$U^2 - L^2 v^2 = 0,$$

pour $x = x_0$, le premier terme s'évanouit, et le second, par la substitution de $\frac{U^2}{v}$ à la place de $L^2 v$, devient

$$\frac{2\,(x^2 - h^2)\,U}{v}\left(v\frac{dU}{dx} - U\frac{dv}{dx}\right),$$

ce qui sera 0 d'après l'équation

$$(x^2 - h^2)\,\frac{v\dfrac{dU}{dx} - U\dfrac{dv}{dx}}{v^2} = 0,$$

dont $x = x_0$ est une racine.

Mais tant que $x = x_0$ vérifie les deux équations

$$(x^2 - h^2)\,(U^2 - L^2 v^2) = 0,$$

$$\frac{d\,(x^2 - h^2)\,(U^2 - L^2 v^2)}{dx} = 0,$$

la fonction

$$(x^2 - h^2)\,(U^2 - L^2 v^2)$$

a nécessairement pour facteur $(x - x_0)^2$.

De ce que nous venons de montrer par rapport à la solution commune aux deux équations

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2)\,F'(x) = 0,$$

il résulte que la propriété de la fraction cherchée $\frac{U}{v} = F(x)$, énoncée plus haut, suppose que la fonction

$$(x^2 - h^2)\,(U^2 - L^2 v^2)$$

est divisible par les $n + 1$ facteurs

$$(x - x_0)^2,\ (x - x_1)^2,\ (x - x_2)^2,\ \ldots\ (x - x_n)^2,$$

où $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ sont des valeurs inégales et comprises entre $x = -h$ et $x = +h$. D'où il suit que cette fonction est divisible par le produit

$$(x - x_0)^2\,(x - x_1)^2\,(x - x_2)^2\ \ldots\ (x - x_n)^2,$$

et que ce diviseur n'a point de facteurs communs avec $v$; car la fonction $v$, par la supposition, ne s'annule pas entre $x = -h$ et $= +h$, et $x_0, x_1, x_2 \ldots . x_n$ sont comprises dans ces limites.

Mais comme les fonctions $U$ et $v$ sont respectivement de degrés $n$ et $n-l-1$, le degré de $(x^2-h^2)(U^2-L^2v^2)$ ne peut surpasser celui du produit

$$(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2 \ldots . (x-x_n)^2$$

et par là le quotient de la division de

$$(x^2-h^2)(U^2-L^2v^2)$$

par

$$(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2 \ldots . (x-x_n)^2$$

ne peut être qu'une quantité constante. Donc on aura

$$(x^2-h^2)(U^2-L^2v^2) = C_0(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2 \ldots . (x-x_n)^2.$$

Cette équation suppose que deux des facteurs

$$x-x_0, \ x-x_1, \ x-x_2, \ldots . x-x_n$$

sont respectivement égaux à

$$x+h, \ x-h.$$

Or si l'on fait

$$x-x_0 = x+h, \ x-x_1 = x-h,$$

cette équation devient

$$U^2-L^2v^2 = C_0(x+h)(x-h)(x-x_2)^2 \ldots . (x-x_n)^2,$$

et par là

$$U^2-L^2v^2 = (x^2-h^2)W^2,$$

ou

$$(10) \qquad U^2-W^2(x^2-h^2) = L^2v^2,$$

en faisant pour abréger

$$\sqrt{C_0}(x-x_2) \ldots . (x-x_n) = W.$$

§ 31. C'est d'après l'équation

$$U^2-W^2(x^2-h^2) = L^2v^2$$

que nous chercherons la fonction $U$, désignant, comme nous l'avons vu, le numérateur de la fraction

$$\frac{U}{v} = \frac{x^n + p' x^{n-1} + \ldots + p^{(n-1)} x + p^{(n)}}{A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-1}},$$

qui, parmi toutes les autres de même forme, s'écarte le moins de zéro, depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$. Nous supposerons qu'après la décomposition de la fonction

$$v = A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-1}$$

en facteurs linéaires on trouve

$$v = A_0 (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \ldots,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont des valeurs différentes entre elles. Comme la fonction $v$, par la supposition, ne s'évanouit pas entre $x = -h$ et $x = +h$, les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ne peuvent avoir d'autres valeurs réelles, que celles qui ne sont pas comprises dans les limites $x = -h$, $x = +h$. D'autre part, puisque la fonction $v$ est de degré $n - l - 1$ et que $v$ est égale à $A_0 (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \ldots$, on aura

$$l_1 + l_2 + \ldots = n - l - 1. \tag{11}$$

Enfin, comme

$$(x^2 - h^2)\, W = \sqrt{C_0}\, (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

et que $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ sont des valeurs comprises entre $x = -h$ et $x = +h$, la fonction $(x^2 - h^2) W$ ne pourra s'annuler pour $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$

## X.

§ 32. En passant à la détermination de $U$ d'après l'équation

$$U^2 - W^2 (x^2 - h^2) = L^2 v^2,$$

nous commencerons par chercher toutes les solutions de l'équation

$$X^2 - Y^2 (x^2 - h^2) = C^{(0)} v^2,$$

où $(x^2 - h^2)\, Y$ ne s'annule pas pour $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, la fonction $v$ étant décomposable en facteurs linéaires de la manière suivante:

$$v = A_0 (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \ldots$$

Pour y parvenir convenons de désigner par $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2 \ldots .$ l'unité prise avec l'un de deux signes $\pm$, par $P$ la partie rationnelle de l'expression

$$\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}}+\varepsilon_1\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}\right)^{2l_1}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}}+\varepsilon_2\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}\right)^{2l_2}\cdots\cdot$$

ou, ce qui revient au même, de celle-ci:

$$\left(\frac{x-h}{\alpha_1-h}+\frac{x+h}{\alpha_1+h}+2\,\varepsilon_1\sqrt{\frac{x^2-h^2}{\alpha_1{}^2-h^2}}\right)^{l_1}\left(\frac{x-h}{\alpha_2-h}+\frac{x+h}{\alpha_2+h}+2\,\varepsilon_2\sqrt{\frac{x^2-h^2}{\alpha_2{}^2-h^2}}\right)^{l_2}\cdots\cdot$$

et par $Q\sqrt{x^2-h^2}$ sa partie affectée du facteur irrationnel $\sqrt{x^2-h^2}$.

D'après cela on trouve

$$(12)\begin{cases} P+Q\sqrt{x^2-h^2}=\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}}+\varepsilon_1\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}\right)^{2l_1}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}}+\varepsilon_2\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}\right)^{2l_2}\cdots\cdot \\ P-Q\sqrt{x^2-h^2}=\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}}-\varepsilon_1\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}\right)^{2l_1}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}}-\varepsilon_2\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}\right)^{2l_2}\cdots\cdot, \end{cases}$$

et ces formules, multipliées entre elles, nous donnent

$$\begin{aligned} P^2-Q^2\,(x^2-h^2) &= \left(\frac{x-h}{\alpha_1-h}-\frac{x+h}{\alpha_1+h}\right)^{2l_1}\left(\frac{x-h}{\alpha_2-h}-\frac{x+h}{\alpha_2+h}\right)^{2l_2}\cdots\cdot \\ &= \left(\frac{2\,h}{\alpha_1{}^2-h^2}\right)^{2l_1}\left(\frac{2\,h}{\alpha_2{}^2-h^2}\right)^{2l_2}\cdots\cdot(x-\alpha_1)^{2l_1}\,(x-\alpha_2)^{2l_2}\cdots\cdot \end{aligned}$$

D'où, en remarquant que le produit

$$(x-\alpha_1)^{2l_1}\,(x-\alpha_2)^{2l_2}\cdots\cdot$$

est égal à $v^2$, à un facteur constant près, nous concluons que les fonctions $P$ et $Q$ ainsi déterminées vérifient cette équation

$$(13)\qquad P^2-Q^2\,(x^2-h^2)=C^{(1)}\,v^2.$$

De plus, on reconnaît aisément que les fonctions $P$ et $Q\sqrt{x^2-h^2}$ ne s'annulent pas pour $x=\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots.,$ et que leur rapport $\frac{P}{Q\sqrt{x^2-h^2}}$, pour ces valeurs de $x$, se réduit respectivement à $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2 \ldots .$

Pour le mettre en évidence, remarquons que $x=\alpha_1$ réduit à zéro ou l'expression

$$\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}}-\varepsilon_1\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}},$$

ou l'expression

$$\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}}+\varepsilon_1\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}},$$

selon que $\varepsilon_1 = +1$ ou $\varepsilon_1 = -1$, et que pour cette valeur de $x$, aucune des expressions

$$\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}, \quad \sqrt{\frac{x-h}{\alpha_3-h}} + \varepsilon_3 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_3+h}}, \ldots.$$

$$\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} - \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}, \quad \sqrt{\frac{x-h}{\alpha_3-h}} - \varepsilon_3 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_3+h}}, \ldots.$$

ne peut s'annuler, les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots.$ étant inégales entre elles.

D'après cela, les formules (12) pour $x = \alpha_1$ donnent ou

$$P - Q\sqrt{x^2-h^2} = 0, \qquad P + Q\sqrt{x^2-h^2} = \textit{valeur finie},$$

ou

$$P + Q\sqrt{x^2-h^2} = 0, \qquad P - Q\sqrt{x^2-h^2} = \textit{valeur finie},$$

selon que $\varepsilon_1 = +1$ ou $-1$. Donc, toujours

$$P - \varepsilon_1\, Q\sqrt{x^2-h^2} = 0, \qquad P + \varepsilon_1\, Q\sqrt{x^2-h^2} = \textit{valeur finie}.$$

Mais d'après ces équations on trouve, évidemment, des valeurs finies pour $P$ et $Q\sqrt{x^2-h^2}$, et la première d'elles donne $\frac{P}{Q\sqrt{x^2-h^2}} = \varepsilon_1$, ce qu'il s'agissait de montrer.

§ 33. Il est facile maintenant de trouver toutes les solutions possible de l'équation

$$X^2 - Y^2\,(x^2-h^2) = C^{(0)} v^2,$$

où $Y\sqrt{x^2-h^2}$ ne s'annule pas pour $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots.$

En premier lieu, remarquons que cette équation, où

$$v = A_0\,(x-\alpha_1)^{l_1}\,(x-\alpha_2)^{l_2}\ldots.,$$

pour $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots.$ donne

$$X^2 - Y^2\,(x^2-h^2) = 0$$

et par là

$$X = \pm Y\sqrt{x^2-h^2},$$

et, comme la fonction $Y\sqrt{x^2-h^2}$ ne s'annule pas pour $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots.,$ cela suppose que le rapport $\frac{X}{Y\sqrt{x^2-h^2}}$, pour $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots.$, doit se réduire à 1 avec l'un des deux signes $\pm$. D'où il suit qu'on n'omettra aucune solution, en supposant que $\frac{X}{Y\sqrt{x^2-h^2}}$, pour $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots,$ se réduit respectivement à $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots.$, qui sont égaux à $\pm 1$. Cela posé, nous allons montrer que les solutions cherchées de l'équation

$$X^2 - Y^2 (x^2 - h^2) = C^{(0)} v^2 \tag{14}$$

et les fonctions $P$ et $Q$, déterminées par (12), sont liées entre elles de la manière suivante:

1) *Les expressions* $PX - QY(x^2 - h^2)$, $PY - QX$ *sont divisibles par* $v^2$.

2) *Les fonctions*

$$X_0 = \frac{PX - QY(x^2 - h^2)}{v^2}, \quad Y_0 = \frac{PY - QX}{v^2}$$

***vérifient l'équation***

$$X_0^2 - Y_0^2 (x^2 - h^2) = \textit{constante}.$$

En effet, par les équations (13) et (14) on trouve

$$X^2 = Y^2 (x^2 - h^2) + C^{(0)} v^2, \quad P^2 = Q^2 (x^2 - h^2) + C^{(\mathrm{I})} v^2,$$

et en vertu de ces valeurs de $X^2$ et $Y^2$, le produit

$$\big(PX - QY(x^2 - h^2)\big) \big(PX + QY(x^2 - h^2)\big) = P^2 X^2 - Q^2 Y^2 (x^2 - h^2)^2$$

se réduit à

$$\big(Y^2 (x^2 - h^2) + C^{(0)} v^2\big) \big(Q^2 (x^2 - h^2) + C^{(\mathrm{I})} v^2\big) - Q^2 Y^2 (x^2 - h^2)^2$$
$$= C^{(0)} Q^2 (x^2 - h^2) v^2 + C^{(\mathrm{I})} Y^2 (x^2 - h^2) v^2 + C^{(0)} C^{(\mathrm{I})} v^4.$$

D'où il est clair que le produit

$$\big(PX - QY(x^2 - h^2)\big) \big(PX + QY(x^2 - h^2)\big)$$

est divisible par $v^2$.

D'autre part, on reconnaît aisément que le facteur

$$PX + QY(x^2 - h^2)$$

ne s'annule pas pour $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots.$

Pour s'en assurer, remarquons que les fonctions

$$Q\sqrt{x^2 - h^2}, \qquad Y\sqrt{x^2 - h^2}$$

ne s'annulent pas pour ces valeurs de $x$, et tant qu'elles restent différentes de 0, l'expression

$$PX + QY(x^2 - h^2)$$

ne peut s'évanouir, à moins qu'on n'ait

$$\frac{PX}{QY(x^2-h^2)} + 1 = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{P}{Q\sqrt{x^2-h^2}} \cdot \frac{X}{Y\sqrt{x^2-h^2}} = -1.$$

Or, cela ne peut avoir lieu pour $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots.$, car nous avons vu que, pour ces valeurs de $x$, les rapports

$$\frac{P}{Q\sqrt{x^2-h^2}}, \qquad \frac{X}{Y\sqrt{x^2-h^2}}$$

se réduisent à $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots.$, et, par là leur produit devient $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \ldots.$ valeurs égales à 1.

Ainsi on parvient à s'assurer que l'expression

$$PX + QY(x^2 - h^2)$$

ne s'annule pas pour $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots..$ et, par conséquent, qu'elle n'a point de facteur commun avec la fonction

$$v = A_0 (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \ldots.$$

Mais comme nous venons de trouver que le produit

$$\left(PX - QY(x^2-h^2)\right)\left(PX + QY(x^2-h^2)\right)$$

est divisible par $v^2$, il en résulte que $v^2$ divise le facteur $PX - QY(x^2 - h^2)$.

Il nous reste à montrer que les fonctions

$$X_0 = \frac{PX - QY(x^2-h^2)}{v^2},$$

$$Y_0 = \frac{PY - QX}{v^2}$$

vérifient l'équation

$$X_0^2 - Y_0^2 (x^2 - h^2) = \textit{constante}.$$

Or on y parvient très aisément, en remarquant que le produit des équations (13) et (14) peut être mis sous cette forme:

$$(PX - QY(x^2 - h^2))^2 - (PY - QX)^2 (x^2 - h^2) = C^{(0)} C^{(I)} v^4;$$

d'où, en divisant par $v^4$, on obtient

$$\left(\frac{PX - QY(x^2 - h^2)}{v^2}\right)^2 - \left(\frac{PY - QX}{v^2}\right)^2 (x^2 - h^2) = C^{(0)} C^{(I)},$$

et par là

$$X_0^2 - Y_0^2 (x^2 - h^2) = C^{(0)} C^{(I)},$$

en dénotant par $X_0$, $Y_0$ les quotients de la division des fonctions

$$PX - QY(x^2 - h^2), \quad PY - QX$$

par $v^2$.

§ 34. De ce que nous savons sur la relation des fonctions $P$ et $Q$, déterminées par les formules (12), et les solutions cherchées de l'équation

$$X^2 - Y^2 (x^2 - h^2) = C^{(0)} v^2,$$

il est clair qu'on tirera toutes ces solutions des formules

$$X_0 = \frac{PX - QY(x^2 - h^2)}{v^2},$$
$$Y_0 = \frac{PY - QX}{v^2},$$

en prenant pour $X_0$ et $Y_0$ toutes les fonctions entières propres à vérifier l'équation

$$X_0^2 - Y_0^2 (x^2 - h^2) = \textit{constante}.$$

Or, d'après ce que nous avons vu dans le § 22 par rapport à l'équation

$$F^2(x) - \Phi^2(x)(x^2 - h^2) = L^2,$$

on ne pourra vérifier l'équation

$$X_0^2 - Y_0^2 (x^2 - h^2) = \textit{constante},$$

en prenant $X_0$ du degré $n$, que par les valeurs de $X_0$, $Y_0$ déterminées ainsi:

$$X_0 = C_0 P_n, \quad Y_0 = C_0 Q_n,$$
$$P_n + Q_n \sqrt{x^2 - h^2} = \left(x + \sqrt{x^2 - h^2}\right)^n,$$
$$P_n - Q_n \sqrt{x^2 - h^2} = \left(x - \sqrt{x^2 - h^2}\right)^n,$$

ou, ce qui revient au même,

$$X_0 + Y_0\sqrt{x^2-h^2} = C_0\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^n,$$
$$X_0 - Y_0\sqrt{x^2-h^2} = C_0\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^n.$$

D'où il suit qu'on trouvera toutes les solutions possibles de cette équation d'après les formules

$$X_0 + Y_0\sqrt{x^2-h^2} = C_0\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^\lambda,$$
$$X_0 - Y_0\sqrt{x^2-h^2} = C_0\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^\lambda,$$

en prenant pour l'exposant $\lambda$ un nombre entier quelconque.

Nous concluons de là que toutes les solutions cherchées de l'équation

$$X^2 - Y^2(x^2-h^2) = C^{(0)}v^2$$

se déterminent par ce système d'équations:

$$X_0 = \frac{PX - QY(x^2-h^2)}{v^2}, \quad Y_0 = \frac{PY - QX}{v^2},$$
$$X_0 + Y_0\sqrt{x^2-h^2} = C_0\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^\lambda,$$
$$X_0 - Y_0\sqrt{x^2-h^2} = C_0\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^\lambda,$$

où $P$, $Q$ sont des fonctions entières qu'on trouve au moyen des formules (12).

§ 35. En passant à la recherche des valeurs de $X$ et $Y$, nous remarquerons que les deux premières équations donnent

$$X_0 + Y_0\sqrt{x^2-h^2} = \frac{(P - Q\sqrt{x^2-h^2})(X + Y\sqrt{x^2-h^2})}{v^2},$$
$$X_0 - Y_0\sqrt{x^2-h^2} = \frac{(P + Q\sqrt{x^2-h^2})(X - Y\sqrt{x^2-h^2})}{v^2},$$

et, en vertu des deux dernières, ces formules deviennent

$$C_0\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^\lambda = \frac{(P - Q\sqrt{x^2-h^2})(X + Y\sqrt{x^2-h^2})}{v^2},$$
$$C_0\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^\lambda = \frac{(P + Q\sqrt{x^2-h^2})(X - Y\sqrt{x^2-h^2})}{v^2}.$$

En remplaçant ici, d'après (13), $v^2$ par $\frac{P^2 - Q^2(x^2-h^2)}{C^{(I)}}$, nous obtenons

$$C_0\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^\lambda = C^{(I)}\frac{(P-Q\sqrt{x^2-h^2})\,(X+Y\sqrt{x^2-h^2})}{P^2-Q^2(x^2-h^2)} = C^{(I)}\frac{X+Y\sqrt{x^2-h^2}}{P+Q\sqrt{x^2-h^2}},$$

$$C_0\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^\lambda = C^{(I)}\frac{(P+Q\sqrt{x^2-h^2})\,(X-Y\sqrt{x^2-h^2})}{P^2-Q^2(x^2-h^2)} = C^{(I)}\frac{X-Y\sqrt{x^2-h^2}}{P-Q\sqrt{x^2-h^2}}.$$

D'où résultent ces valeurs de $X+Y\sqrt{x^2-h^2}$ et $X-Y\sqrt{x^2-h^2}$:

$$X+Y\sqrt{x^2-h^2} = \frac{C_0}{C^{(I)}}\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^\lambda\left(P+Q\sqrt{x^2-h^2}\right),$$

$$X-Y\sqrt{x^2-h^2} = \frac{C_0}{C^{(I)}}\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^\lambda\left(P-Q\sqrt{x^2-h^2}\right),$$

qui, après la substitution des valeurs (12) de $P+Q\sqrt{x^2-h^2}$, $P-Q\sqrt{x^2-h^2}$, et faisant

$$\frac{C_0}{C^{(I)}} = C_{\mathrm{I}},$$

deviennent

$$X+Y\sqrt{x^2-h^2} = C_{\mathrm{I}}\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^\lambda\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}}+\varepsilon_1\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}\right)^{2l_1}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}}+\varepsilon_2\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}\right)^{2l_2}\cdots$$

$$X-Y\sqrt{x^2-h^2} = C_{\mathrm{I}}\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^\lambda\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}}-\varepsilon_1\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}\right)^{2l_1}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}}-\varepsilon_2\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}\right)^{2l_2}\cdots$$

Ainsi nous parvenons à déterminer toutes les solutions de l'équation

$$X^2 - Y^2(x^2-h^2) = C^{(0)}v^2$$

où $Y\sqrt{x^2-h^2}$ ne s'annule pas pour $x=\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. La quantité $C_{\mathrm{I}}$ et le et le nombre $\lambda$ sont des constantes arbitraires; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ désignent $\pm 1$.

## XI.

§ 36. D'après les solutions trouvées de l'équation

$$X^2 - Y^2(x^2-h^2) = C^{(0)}v^2,$$

nous voyons que l'équation

$$U^2 - W^2(x^2-h^2) = L^2v^2.$$

établie par rapport à la fonction cherchée $U$ (§ 30), suppose

$$U+W\sqrt{x^2-h^2}=C_{\mathrm{I}}\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\lambda}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}}+\varepsilon_1\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}\right)^{2l_1}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}}+\varepsilon_2\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}\right)^{2l_2}\cdots$$

$$U-W\sqrt{x^2-h^2}=C_{\mathrm{I}}\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\lambda}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}}-\varepsilon_1\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}\right)^{2l_1}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}}-\varepsilon_2\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}\right)^{2l_2}\cdots$$

et par là

$$U=\frac{C_{\mathrm{I}}}{2}\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\lambda}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}}+\varepsilon_1\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}\right)^{2l_1}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}}+\varepsilon_2\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}\right)^{2l_2}\cdots$$
$$+\frac{C_{\mathrm{I}}}{2}\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\lambda}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}}-\varepsilon_1\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}\right)^{2l_1}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}}-\varepsilon_2\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}\right)^{2l_2}\cdots,$$

$$W=\frac{C_{\mathrm{I}}}{2}\frac{\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\lambda}}{\sqrt{x^2-h^2}}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}}+\varepsilon_1\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}\right)^{2l_1}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}}+\varepsilon_2\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}\right)^{2l_2}\cdots$$
$$-\frac{C_{\mathrm{I}}}{2}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\lambda}}{\sqrt{x^2-h^2}}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}}-\varepsilon_1\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}\right)^{2l_1}\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}}-\varepsilon_2\sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}\right)^{2l_2}\cdots$$

Pour déterminer les valeurs de $\lambda$ et de $C_{\mathrm{I}}$ observons que l'expression trouvée de $U$, étant développée suivant les puissances descendantes de $x$, donne pour premier terme

$$2^{\lambda-1}C_{\mathrm{I}}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1-h}}+\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_1+h}}\right)^{2l_1}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_2-h}}+\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_2+h}}\right)^{2l_2}\cdots\, x^{\lambda+l_1+l_2+\cdots},$$

et comme la fonction cherchée $U$ est de la forme

$$x^n+p'x^{n-1}+\cdots+p^{(n-1)}x+p^{(n)},$$

il en résulte

$$\lambda+l_1+l_2+\cdots=n,$$

$$2^{\lambda-1}C_{\mathrm{I}}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1-h}}+\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_1+h}}\right)^{2l_1}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_2-h}}+\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_2+h}}\right)^{2l_2}\cdots=1.$$

La première de ces équations, en vertu de (11), nous donne

$$\lambda=n-(n-l-1)=l+1,$$

et en portant cette valeur de $\lambda$ dans la dernière, on en tire

$$C_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2^l}\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1-h}}+\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_1+h}}\right)^{2l_1}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_2-h}}+\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_2+h}}\right)^{2l_2}\cdots}.$$

D'après cela les expressions précédentes de $U$ et $W$ deviennent

$$U = \left(\frac{x+\sqrt{x^2-h^2}}{2}\right)^{l+1} \left[\frac{\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1-h}} + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_1+h}}}\right]^{2l_1} \left[\frac{\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2-h}} + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_2+h}}}\right]^{2l_2} \cdots$$

$$+ \left(\frac{x-\sqrt{x^2-h^2}}{2}\right)^{l+1} \left[\frac{\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1-h}} + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_1+h}}}\right]^{2l_1} \left[\frac{\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} - \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2-h}} + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_2+h}}}\right]^{2l_2} \cdots$$

$$W = \frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{l+1}}{2^{l+1}\sqrt{x^2-h^2}} \left[\frac{\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1-h}} + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_1+h}}}\right]^{2l_1} \left[\frac{\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2-h}} + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_2+h}}}\right]^{2l_2} \cdots$$

$$+ \frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{l+1}}{2^{l+1}\sqrt{x^2-h^2}} \left[\frac{\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1-h}} + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_1+h}}}\right]^{2l_1} \left[\frac{\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} - \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2-h}} + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_2+h}}}\right]^{2l_2} \cdots$$

§ 37. Pour trouver la valeur de $L$, remarquons que pour $x = h$ l'équation

$$U^2 - W^2(x^2-h^2) = L^2 v^2$$

donne

$$U^2 = L^2 v^2, \quad U = \pm L v,$$

ce qui prouve que la quantité $L$, au signe près, est égale à la valeur de $\frac{U}{v}$ pour $x = h$, et comme les expressions précédentes de $U$ et de $v$, dans le cas de $x = h$, fournissent

$$U = 2\left(\frac{h}{2}\right)^{l+1} \left[\frac{\varepsilon_1 \sqrt{\frac{2h}{\alpha_1+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1-h}} + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_1+h}}}\right]^{2l_1} \left[\frac{\varepsilon_2 \sqrt{\frac{2h}{\alpha_2+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2-h}} + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_2+h}}}\right]^{2l_2} \cdots$$

$$= \frac{(\alpha_1-h)^{l_1}(\alpha_2-h)^{l_2}\cdots h^{l+l_1+l_2+\cdots+1}}{2^l(\alpha_1+\varepsilon_1\sqrt{\alpha_1^2-h^2})^{l_1}(\alpha_2+\varepsilon_2\sqrt{\alpha_2^2-h^2})^{l_2}\cdots},$$

$$v = \pm A_0(\alpha_1-h)^{l_1}(\alpha_2-h)^{l_2}\cdots,$$

et que d'après (11)

$$l_1 + l_2 + \cdots = n - l - 1,$$

il en résulte cette valeur de $L$:

$$L = \pm \frac{h^n}{2^l A_0(\alpha_1+\varepsilon_1\sqrt{\alpha_1^2-h^2})^{l_1}(\alpha_2+\varepsilon_2\sqrt{\alpha_2^2-h^2})^{l_2}\cdots},$$

ou, ce qui revient au même,

$$L = \pm \frac{h^n}{2^l A_0 \alpha_1^{l_1} \alpha_2^{l_2} \ldots \left(1 + \varepsilon_1 \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}\right)^{l_1} \left(1 + \varepsilon_2 \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}\right)^{l_2} \ldots}.$$

Mais comme on a

$$v = A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-1} = A_0 (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \ldots,$$

on trouve

$$\alpha_1^{l_1} \alpha_2^{l_2} \ldots = \pm \frac{A_{n-l-1}}{A_0},$$

et par là l'expression trouvée de $L$ se réduit à celle-ci:

$$L = \pm \frac{h^n}{2^l A_{n-l-1} \left(1 + \varepsilon_1 \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}\right)^{l_1} \left(1 + \varepsilon_2 \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}\right)^{l_2} \ldots}. \tag{15}$$

§ 38. Dans les expressions de la fonction cherchée $U$ et de la quantité $L$ il ne reste d'inconnu que les signes de $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1 \ldots$

Nous allons montrer maintenant qu'on doit prendre

$$\varepsilon_1 = +1, \quad \varepsilon_2 = +1, \ldots,$$

si l'on désigne simplement par des radicaux

$$\sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}, \quad \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}, \ldots,$$

celles des racines des équations

$$x^2 = 1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}, \quad x^2 = 1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}, \ldots,$$

dont la partie réelle est positive.

D'après l'expression de $L$ on voit que son module, pour $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = +1, \ldots$, a la plus petite valeur de celles qu'on trouve dans toutes les hypothèses possibles sur les signes de $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1, \ldots$; car, les parties réelles des quantités

$$\sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}, \quad \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}, \ldots$$

étant positives, les modules de

$$1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}, \quad 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}, \ldots$$

sont respectivement au-dessus de ceux de

$$1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}, \quad 1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}, \ldots.$$

D'autre part, on reconnaît aisément que la valeur de $L$, qu'on trouve en prenant $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = +1, \ldots.$, est réelle. En effet, les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots.$ ne peuvent avoir, comme nous l'avons vu (§ 31), de valeurs réelles comprises entre $x = -h$ et $x = +h$, et par là on voit que les expressions

$$\sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}, \quad \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}, \ldots.$$

ne sauraient être imaginaires que dans le cas où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots.$ le sont.

Mais comme les facteurs imaginaires de la fonction réelle

$$v = A_0 (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \ldots.$$

sont conjugués deux à deux, il suit que la même chose aura lieu par rapport aux facteurs imaginaires du produit

$$\left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}\right)^{l_1} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}\right)^{l_2} \ldots.$$

et alors notre formule donne pour $U$ une valeur réelle.

En vertu de ce que nous avons montré sur la valeur de $L$ dans le cas de $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = +1, \ldots.$, on voit qu'elle sera la plus petite parmi les valeurs réelles de $L$, qu'on peut trouver d'après notre formule. Or, comme $L$ désigne la limite des valeurs de la fonction cherchée $\frac{U}{v}$ entre $x = -h$ et $x = +h$, et que, suivant notre problème, il s'agit de rendre cette valeur aussi proche de zéro que possible, il en résulte que la supposition

$$\varepsilon_1 = +1, \quad \varepsilon_2 = +1, \ldots.,$$

donne la solution cherchée, si toutefois, en prenant ces valeurs de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots.$ dans nos formules, on trouve que la fraction $\frac{U}{v}$, depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, reste effectivement comprise entre $-L$ et $+L$. C'est ce qu'on reconnait très aisément, comme nous allons le montrer.

En posant $\varepsilon_1 = + 1$, $\varepsilon_2 = + 1, \ldots\ldots$ dans les valeurs trouvées de $U$ et $W$, nous remarquons qu'elles se réduisent à cette forme:

$$
\begin{aligned}
(16)\quad U = {} & \left(\frac{x+\sqrt{x^2-h^2}}{2}\right)^{l+1} \left[\frac{\dfrac{\alpha_1 x-h^2}{\alpha_1} + \sqrt{1-\dfrac{h^2}{\alpha_1^2}}\sqrt{x^2-h^2}}{1+\sqrt{1-\dfrac{h^2}{\alpha_1^2}}}\right]^{l_1} \left[\frac{\dfrac{\alpha_2 x-h^2}{\alpha_2} + \sqrt{1-\dfrac{h^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{x^2-h^2}}{1+\sqrt{1-\dfrac{h^2}{\alpha_2^2}}}\right]^{l_2} \ldots\ldots \\
& + \left(\frac{x-\sqrt{x^2-h^2}}{2}\right)^{l+1} \left[\frac{\dfrac{\alpha_1 x-h^2}{\alpha_1} - \sqrt{1-\dfrac{h^2}{\alpha_1^2}}\sqrt{x^2-h^2}}{1+\sqrt{1-\dfrac{h^2}{\alpha_1^2}}}\right]^{l_1} \left[\frac{\dfrac{\alpha_2 x-h^2}{\alpha_2} - \sqrt{1-\dfrac{h^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{x^2-h^2}}{1+\sqrt{1-\dfrac{h^2}{\alpha_2^2}}}\right]^{l_2} \ldots\ldots \\
W = {} & \frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{l+1}}{2^{l+1}\sqrt{x^2-h^2}} \left[\frac{\dfrac{\alpha_1 x-h^2}{\alpha_1} + \sqrt{1-\dfrac{h^2}{\alpha_1^2}}\sqrt{x^2-h^2}}{1+\sqrt{1-\dfrac{h^2}{\alpha_1^2}}}\right]^{l_1} \left[\frac{\dfrac{\alpha_2 x-h^2}{\alpha_2} + \sqrt{1-\dfrac{h^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{x^2-h^2}}{1+\sqrt{1-\dfrac{h^2}{\alpha_2^2}}}\right]^{l_2} \ldots\ldots \\
& - \frac{(x-\sqrt{x^2-h^2})^{l+1}}{2^{l+1}\sqrt{x^2-h^2}} \left[\frac{\dfrac{\alpha_1 x-h^2}{\alpha_1} - \sqrt{1-\dfrac{h^2}{\alpha_1^2}}\sqrt{x^2-h^2}}{1+\sqrt{1-\dfrac{h^2}{\alpha_1^2}}}\right]^{l_1} \left[\frac{\dfrac{\alpha_2 x-h^2}{\alpha_2} - \sqrt{1-\dfrac{h^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{x^2-h^2}}{1+\sqrt{1-\dfrac{h^2}{\alpha_2^2}}}\right]^{l_2} \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

et comme les facteurs des produits

$$\left(1 + \sqrt{1-\frac{h^2}{\alpha_1^2}}\right)^{l_1} \left(1 + \sqrt{1-\frac{h^2}{\alpha_2^2}}\right)^{l_2} \ldots\ldots,$$

$$\left(\frac{\alpha_1 x - h^2}{\alpha_1} + \sqrt{1-\frac{h^2}{\alpha_1^2}}\sqrt{x^2-h^2}\right)^{l_1} \left(\frac{\alpha_2 x - h^2}{\alpha_2} + \sqrt{1-\frac{h^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{x^2-h^2}\right)^{l_2} \ldots\ldots,$$

$$\left(\frac{\alpha_1 x - h^2}{\alpha_1} - \sqrt{1-\frac{h^2}{\alpha_1^2}}\sqrt{x^2-h^2}\right)^{l_1} \left(\frac{\alpha_2 x - h^2}{\alpha_2} - \sqrt{1-\frac{h^2}{\alpha_2^2}}\sqrt{x^2-h^2}\right)^{l_2} \ldots\ldots,$$

en vertu de ce que nous avons vu par rapport aux quantités $\sqrt{1-\frac{h^2}{\alpha_1^2}}$, $\sqrt{1-\frac{h^2}{\alpha_2^2}}, \ldots\ldots$, sont ou réels ou imaginaires, conjugués deux à deux, on voit que les valeurs $U$ et $W$ sont nécessairement réelles. Mais tant que les fonctions $U$, $W$ et la quantité $L$ sont réelles, l'équation

$$U^2 - W^2\,(x^2 - h^2) = L^2 v^2$$

suppose que, depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, la fonction $U^2$ ne surpasse pas $L^2 v^2$, et par conséquent, la fonction $\frac{U}{v}$ reste comprise entre $-L$ et $+L$, ce qu'il s'agissait de prouver. Ainsi nous parvenons à reconnaitre que, la fonction $U$ étant déterminée d'après la formule (16), la fraction $\frac{U}{v}$ sera celle qui, parmi toutes les autres de la forme

$$\frac{x^n + p' x^{n-1} + \ldots + p^{(n-1)} x + p^{(n)}}{A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-1}}$$

et avec le même dénominateur

$$A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-1},$$

s'écarte le moins de zéro entre $x = -h$ et $x = +h$. Quant à $L$, limite des valeurs de cette fraction entre $x = -h$ et $x = +h$, nous trouvons, en prenant dans la formule (15) $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 1, \ldots$, qu'elle s'exprime ainsi:

$$L = \pm \frac{h^n}{2^l A_{n-l-1}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}\right)^{l_1} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}\right)^{l_2} \ldots}.$$

Comme toutes les autres fractions avec le dénominateur

$$A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-1}$$

et le numérateur

$$x^n + p' x^{n-1} + \ldots + p^{(n-1)} x + p^{(n)},$$

entre $x = -h$ et $x = +h$, s'écarteront de zéro plus que celle dont nous venons de parler, il en résulte que, dans cet intervalle, leur valeur ne pourra pas être au-dessous de la valeur trouvée de $L$.

## XII.

§ 39. Indiquons maintenant le parti que l'on peut tirer pour l'Algèbre des résultats donnés sur les fractions de la forme

$$\frac{x^n + p' x^{n-1} + \ldots + p^{(n-1)} x + p^{(n)}}{A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-1}}.$$

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont réelles, les quantités

$$1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}, \quad 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}, \ldots$$

comme nous l'avons vu, le sont aussi, et leurs valeurs sont évidemment au-dessous de 2. D'autre part, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont des valeurs imaginaires et que $\rho$ soit la limite inférieure de leurs modules, on voit que les modules des quantités

$$1+\sqrt{1-\frac{h^2}{\alpha_1^2}},\quad 1+\sqrt{1-\frac{h^2}{\alpha_2^2}},\dots$$

ne surpassent pas $1+\sqrt{1+\frac{h^2}{\rho^2}}$ et, par conséquent, restent au-dessous de $2+\frac{h}{\rho}$; car $\sqrt{1+\frac{h^2}{\rho^2}}<1+\frac{h}{\rho}$. D'après cela, en supposant que l'équation

$$A_0x^{n-l-1}+A_1x^{n-l-2}+\dots+A_{n-l-1}=A_0(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\dots=0,$$

a $\mu$ racines imaginaires et $n-l-\mu-1$ racines réelles, nous trouvons que le produit

$$\left(1+\sqrt{1-\frac{h^2}{\alpha_1^2}}\right)^{l_1}\left(1+\sqrt{1-\frac{h^2}{\alpha_2^2}}\right)^{l_2}\dots$$

est plus petit que $2^{n-l-\mu-1}\left(2+\frac{h}{\rho}\right)^{\mu}=2^{n-l-1}\left(\frac{2\rho+h}{2\rho}\right)^{\mu}$, et par là

$$\frac{h^n}{2^l\left(1+\sqrt{1-\frac{h^2}{\alpha_1^2}}\right)^{l_1}\left(1+\sqrt{1-\frac{h^2}{\alpha_2^2}}\right)^{l_2}\dots}>2\left(\frac{h}{2}\right)^n\left(\frac{2\rho}{2\rho+h}\right)^{\mu}.$$

D'où, en vertu de la valeur de

$$L=\pm\frac{h^n}{2^lA_{n-l-1}\left(1+\sqrt{1-\frac{h^2}{\alpha_1^2}}\right)^{l_1}\left(1+\sqrt{1-\frac{h^2}{\alpha_2^2}}\right)^{l_2}\dots},$$

résulte, dans le cas de $A_{n-l-1}=1$, ce théorème:

## Théorème 12.

*Si le dénominateur de la fraction*

$$\frac{x^n+p'x^{n-1}+\dots+p^{(n-1)}x+p^{(n)}}{A_0x^{n-l-1}+A_1x^{n-l-2}+\dots+A_{n-l-2}x+1}$$

*ne s'annule pas entre $x=-h$ et $x=+h$, la valeur numérique de cette fraction, depuis $x=-h$ jusqu'à $x=+h$, ne peut rester au-dessous de $2\left(\frac{h}{2}\right)^n\left(\frac{2\rho}{2\rho+h}\right)^{\mu}$, où $\mu$ est le nombre des racines imaginaires de l'équation*

$$A_0x^{n-l-1}+A_1x^{n-l-2}+\dots+A_{n-l-2}x+1=0$$

*et $\rho$ la limite inférieure de leurs modules.*

Si la fonction $A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + A_{n-l-2} x + 1$ s'annule entre $x = -h$ et $x = +h$, dans ces limites la fraction

$$\frac{x^n + p' x^{n-1} + \ldots + p^{(n-1)} x + p^{(n)}}{A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-2} x + 1}$$

ne peut rester finie, à moins que son numérateur ne s'annule en même temps que le dénominateur. D'après cela le théorème actuel entraîne celui-ci:

## Théorème 13.

*Dans les limites $x = -h$ et $x = +h$, où la fraction*

$$\frac{x^n + p' x^{n-1} + \ldots + p^{(n-1)} x + p^{(n)}}{A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-2} x + 1}$$

*ne devient $\frac{0}{0}$, sa valeur numérique ne peut rester au-dessous de $2\left(\frac{h}{2}\right)^n \left(\frac{2\rho}{2\rho+h}\right)^\mu$, $\mu$ étant le nombre des racines imaginaires de l'équation $A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-2} x + 1 = 0$ et $\rho$ la limite inférieure de leurs modules.*

Dans le cas, où le dénominateur

$$A_0 x^{n-l-1} + A_1{}^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-2} x + 1$$

ne contient que des facteurs réels, le nombre $\mu$ se réduit à zéro, et le théorème précédent se change en cet autre:

## Théorème 14.

*Si la fraction*

$$\frac{x^n + p' x^{n-1} + \ldots + p^{(n-1)} x + p^{(n)}}{A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \ldots + A_{n-l-2} x + 1}$$

*dont le dénominateur est composé de facteurs linéaires réels, ne devient $\frac{0}{0}$ entre $x = -h$ et $x = +h$, sa valeur numérique dans ces limites ne peut rester au-dessous de $2\left(\frac{h}{2}\right)^n$.*

§ 40. D'après ces théorèmes on démontre plusieurs propositions très simples par rapport à la résolution des équations. En voici quelques-unes:

## Théorème 15.

*Si l'équation* $Ax^{2\lambda} + Cx^{2\lambda-2} + \ldots + Hx^2 + K = 0$ *a* $\mu$ *racines imaginaires et que leurs modules ne soient pas inférieurs à* $\rho$, *on trouve au moins une racine de l'équation*

$$x^{2\lambda+1} + Ax^{2\lambda} + Bx^{2\lambda-1} + Cx^{2\lambda-2} + \ldots\ldots + Hx^2 + Jx + K = 0$$

*entre* $x = -h$ *et* $x = +h$, *tant que la valeur numérique de* $K$ *ne surpasse pas* $2\left(\frac{h}{2}\right)^{2\lambda+1}\left(\frac{2\rho}{2\rho+h}\right)^{\mu}$.

En effet, si l'équation

$$x^{2\lambda+1} + Ax^{2\lambda} + Bx^{2\lambda-1} + Cx^{2\lambda-2} + \ldots\ldots + Hx^2 + Jx + K = 0$$

n'avait point de solutions entre $x = -h$ et $x = +h$, la même chose aurait lieu par rapport à celle-ci:

$$x^{2\lambda+1} - Ax^{2\lambda} + Bx^{2\lambda-1} - Cx^{2\lambda-2} + \ldots\ldots - Hx^2 + Jx - K = 0,$$

qu'on trouve en changeant $x$ en $-x$ dans l'équation

$$x^{2\lambda+1} + Ax^{2\lambda} + Bx^{2\lambda-1} + Cx^{2\lambda-2} + \ldots\ldots + Hx^2 + Jx + K = 0,$$

et par là il faudrait conclure que, dans les limites $x = -h$ et $= +h$, on ne peut satisfaire à cette équation

$$(x^{2\lambda+1} + Bx^{2\lambda-1} + \ldots\ldots + Jx)^2 - (Ax^{2\lambda} + Cx^{2\lambda-2} + \ldots\ldots + Hx^2 + K)^2 = 0,$$

obtenue en multipliant entre elles les deux équations précédentes. Or cela est inadmissible, comme nous allons le montrer.

Cette équation a évidemment une solution entre $x = -h$ et $x = +h$, si dans ces limites les deux fonctions

$$x^{2\lambda+1} + Bx^{2\lambda-1} + \ldots\ldots + Jx,$$

$$Ax^{2\lambda} + Cx^{2\lambda-2} + \ldots\ldots + Hx^2 + K$$

s'annulent ensemble. Dans le cas contraire la fraction

$$\frac{x^{2\lambda+1} + Bx^{2\lambda-1} + \ldots\ldots + Jx}{\frac{A}{K}x^{2\lambda} + \frac{C}{K}x^{2\lambda-2} + \ldots\ldots + \frac{H}{K}x^2 + 1},$$

entre $x = -h$ et $x = +h$, ne devient pas $\frac{0}{0}$, et alors, d'après le théorème 13, sa valeur numérique ne peut rester au-dessous de $2\left(\frac{h}{2}\right)^{2\lambda+1}\left(\frac{2\rho}{2\rho+h}\right)^{\mu}$, et par conséquent au-dessous de la valeur numérique de $K$, cette valeur étant, par hypothèse, tout au plus égale à $2\left(\frac{h}{2}\right)^{2\lambda+1}\left(\frac{2\rho}{2\rho+h}\right)^{\mu}$. Mais en mettant l'équation

$$(x^{2\lambda+1}+Bx^{2\lambda-1}+\ldots\ldots+Jx)^2-(Ax^{2\lambda}+Cx^{2\lambda-2}+\ldots\ldots+Hx^2+K)^2=0$$

sous la forme

$$\left(\frac{x^{2\lambda+1}+Bx^{2\lambda-1}+\ldots\ldots+Jx}{\frac{A}{K}x^{2\lambda}+\frac{C}{K}x^{2\lambda-2}+\ldots\ldots+\frac{H}{K}x^2+1}\right)^2-K^2=0,$$

on s'assure aisément qu'elle a au moins une racine entre $x=-h$ et $x=+h$, tant que la fraction

$$\frac{x^{2\lambda+1}+Bx^{2\lambda-1}+\ldots\ldots+Jx}{\frac{A}{K}x^{2\lambda}+\frac{C}{K}x^{2\lambda-2}+\ldots\ldots+\frac{H}{K}x^2+1}$$

qui s'annule pour $x=0$, ne reste pas dans ces limites numériquement au-déssous de $K$, ce qui prouve le théorème énoncé.

A l'aide de ce théorème on trouvera toujours les limites $-h$ et $+h$ où l'équation

$$x^{2\lambda+1}+Ax^{2\lambda}+Bx^{2\lambda-1}+Cx^{2\lambda-2}+\ldots\ldots+Hx^2+Jx+K=0$$

a au moins une racine, en prenant pour $h$ une valeur positive qui remplisse la condition

$$(17)\qquad 4\left(\frac{h}{2}\right)^{4\lambda+2}\left(\frac{2\rho}{2\rho+h}\right)^{2\mu}\geqq K^2.$$

Or si l'équation

$$Ax^{2\lambda}+Cx^{2\lambda-2}+\ldots\ldots+Hx^2+K=0$$

n'a que des racines réelles, le nombre $\mu$ se réduit à zéro, et alors cette condition devient

$$4\left(\frac{h}{2}\right)^{4\lambda+2}\geqq K^2,$$

ou

$$h\geqq 2\sqrt[4\lambda+2]{\tfrac{1}{4}K^2},$$

ce qu'on vérifiera en prenant pour $h$ celle des deux valeurs $+2\sqrt[2\lambda+1]{\frac{1}{2}K}$, $-2\sqrt[2\lambda+1]{\frac{1}{2}K}$ qui est positive. D'où résulte le théorème suivant:

## Théorème 16.

*Dans les limites* $-2\sqrt[2\lambda+1]{\frac{1}{2}K}$, $+2\sqrt[2\lambda+1]{\frac{1}{2}K}$ *on trouve au moins une racine de l'équation*

$$x^{2\lambda+1}+Ax^{2\lambda}+B^{2\lambda-1}+Cx^{2\lambda-2}+\ldots\ldots+Hx^2+Jx+K=0$$

*si l'équation* $Ax^{2\lambda}+Cx^{2\lambda-2}+\ldots\ldots K=0$ *n'a que des racines réelles.*

§ 41. En remarquant que la condition (17) peut être mise sous la forme

$$4\left(\frac{h}{2}\right)^{4\lambda-2\mu+2}\geqq K^2\left(\frac{2}{h}+\frac{1}{\rho}\right)^{2\mu},$$

on voit aisément qu'on la vérifie par une valeur positive de $h$, en prenant

$$h=2\sqrt[4\lambda+2]{\frac{1}{4}K^2}\left[1+\frac{1}{\rho}\sqrt[4\lambda+2]{\frac{1}{4}K^2}\right]^{\frac{\mu}{2\lambda+1-\mu}}.$$

Pour s'en assurer, on n'a qu'à remarquer que, pour cette valeur de $h$, on trouve d'une part

$$4\left(\frac{h}{2}\right)^{4\lambda-2\mu+2}=4\left(\frac{1}{4}K^2\right)^{\frac{4\lambda-2\mu+2}{4\lambda+2}}\left[1+\frac{1}{\rho}\sqrt[4\lambda+2]{\frac{1}{4}K^2}\right]^{2\mu}=K^2\left[\sqrt[4\lambda+2]{\frac{4}{K^2}}+\frac{1}{\rho}\right]^{2\mu},$$

et de l'autre $\left(\text{à cause de } h>2\sqrt[4\lambda+2]{\frac{1}{4}K^2}\right)$

$$K^2\left[\frac{2}{h}+\frac{1}{\rho}\right]^{2\mu}<K^2\left[\sqrt[4\lambda+2]{\frac{4}{K^2}}+\frac{1}{\rho}\right]^{2\mu}.$$

D'où resulte l'inégalité

$$4\left(\frac{h}{2}\right)^{4\lambda-2\mu+2}>K^2\left[\frac{2}{h}+\frac{1}{\rho}\right]^{2\mu},$$

qu'il s'agissait de vérifier.

En observant que, d'après l'expression ci-dessus de $h$, cette valeur propre à remplir la condition (17) est égale à

$$\pm 2\sqrt[2\lambda+1]{\frac{1}{2}K}\left[1+\frac{1}{\rho}\sqrt[4\lambda+2]{\frac{1}{4}K^2}\right]^{\frac{\mu}{2\lambda-\mu+1}}$$

avec l'un des deux signes $\pm$, nous déduissons du théorème 15 celui-ci:

## Théorème 17:

*On trouve toujours au moins une racine de l'équation*

$$x^{2\lambda+1}+Ax^{2\lambda}+Bx^{2\lambda-1}+Cx^{2\lambda-2}+\ldots.+Hx^2+Jx+K=0$$

*entre les limites*

$$-2\sqrt[2\lambda+1]{\frac{1}{2}K}\left[1+\frac{1}{\rho}\sqrt[4\lambda+2]{\frac{1}{4}K^2}\right]^{\frac{\mu}{2\lambda-\mu+1}},$$

$$+2\sqrt[2\lambda+1]{\frac{1}{2}K}\left[1+\frac{1}{\rho}\sqrt[4\lambda+2]{\frac{1}{4}K^2}\right]^{\frac{\mu}{2\lambda-\mu+1}},$$

*où* $\mu$ *est le nombre des racines imaginaires de l'équation*

$$Ax^{2\lambda}+Cx^{2\lambda-2}+\ldots.+Hx^2+K=0$$

*et* $\rho$ *la limite inférieure de leurs modules.*

Si $\mu$ ne surpasse pas $\lambda$, la fraction $\frac{\mu}{2\lambda-\mu+1}$ reste plus petite que 1, et alors *)

$$\left[1+\frac{1}{\rho}\sqrt[4\lambda+2]{\frac{1}{4}K^2}\right]^{\frac{\mu}{2\lambda-\mu+1}}<1+\rho^{\frac{-\mu}{2\lambda-\mu+1}}\left(\frac{1}{4}K^2\right)^{\frac{\mu}{(4\lambda+2)(2\lambda-\mu+1)}};$$

d'où il résulte

$$2\sqrt[2\lambda+1]{\frac{1}{2}K}\left[1+\frac{1}{\rho}\sqrt[4\lambda+2]{\frac{1}{4}K^2}\right]^{2\lambda+1-\mu}<2\sqrt[2\lambda+1]{\frac{1}{2}K}+2\sqrt[2\lambda-\mu+1]{\frac{K}{2\rho^{\mu}}},$$

et le théorème précédent entraîne celui-ci:

---

*) On reconnait aisément que dans le cas de $z>0$, $m<1$ et $>0$, la quantité $(1+z)^m$ est plus petite que $1+z^m$, en remarquant que la fonction $(1+z)^m-1-z^m$, dont la première dérivée est $m\,[(1+z)^{m-1}-z^{m-1}]$, reste décroissante pour toutes les valeurs positives de $z$ et s'annule pour $z=0$.

## Théorème 18.

*Si* $\mu$, *le nombre des racines imaginaires de l'équation*

$$Ax^{2\lambda} + Cx^{2\lambda-2} + \ldots\ldots + Hx^2 + K = 0,$$

*ne surpasse pas* $\lambda$ *et leurs modules ne sont pas inférieurs à* $\rho$, *on trouve toujours au moins une racine de l'équation*

$$x^{2\lambda+1} + Ax^{2\lambda} + Bx^{2\lambda-1} + Cx^{2\lambda-2} + \ldots\ldots + Hx^2 + Jx + K = 0$$

*entre les limites*

$$+ 2\sqrt[2\lambda+1]{\tfrac{1}{2}K} + 2\sqrt[2\lambda-\mu+1]{\frac{K}{2\rho^{\mu}}},$$

$$- 2\sqrt[2\lambda+1]{\tfrac{1}{2}K} - 2\sqrt[2\lambda-\mu+1]{\frac{K}{2\rho^{\mu}}}.$$

Dans le cas où l'équation

$$Ax^{2\lambda} + Cx^{2\lambda-2} + \ldots\ldots + Hx^2 + K = 0$$

se réduit à

$$K_0 x^{2\lambda_0} + K = 0,$$

les quantités $K_0$, $K$ étant de même signe, on trouve que $\mu$, le nombre de ses racines imaginaires, est égal à $2\lambda_0$, et toutes ces racines ont pour module $\sqrt[2\lambda_0]{\frac{K}{K_0}}$. Or, en prenant cette valeur pour $\rho$ et posant $\mu = 2\lambda_0$, on obtient

$$2\sqrt[2\lambda+1]{\tfrac{1}{2}K} + 2\sqrt[2\lambda-\mu+1]{\frac{K}{2\rho^{\mu}}} = 2\sqrt[2\lambda+1]{\tfrac{1}{2}K} + 2\sqrt[2(\lambda-\lambda_0)+1]{\tfrac{1}{2}K_0}.$$

D'où, en vertu du théorème précédent, résulte le suivant:

## Thérème 19.

*Si l'équation*

$$x^{2\lambda+1} + Cx^{2\lambda-1} + \ldots\ldots + K_0 x^{2\lambda_0} + \ldots\ldots + Jx + K = 0$$

*ne contient qu'un terme* $K_0\, x^{2\lambda_0}$ *avec la puissance paire de* $x$ *et que le coefficient de ce terme soit de même signe que le terme connu* $K$ *et l'exposant ne* *surpasse pas* $\lambda$, *cette équation a au moins une racine, comprise entre les limites*

$$-2\sqrt[2\lambda+1]{\tfrac{1}{2}K}-2\sqrt[2(\lambda-\lambda_0)+1]{\tfrac{1}{2}K_0},$$

$$+2\sqrt[2\lambda+1]{\tfrac{1}{2}K}+2\sqrt[2(\lambda-\lambda_0)+1]{\tfrac{1}{2}K_0}.$$

Si les termes $K_0x^{2\lambda_0}$ et $K$ sont de signes contraires, on trouvera, d'après le théorème 11, au moins une des racines de l'équation

$$x^{2\lambda+1}+Cx^{2\lambda-1}+\ldots.+K_0x^{2\lambda_0}+\ldots.+Jx+K=0$$

dans ces limites plus rapprochées:

$$-2\sqrt[2\lambda+1]{\tfrac{1}{2}K},\quad +2\sqrt[2\lambda+1]{\tfrac{1}{2}K}.$$

Donc, si l'on désigne par $K_0$, $K$ des valeurs positives, les limites

$$-2\sqrt[2\lambda+1]{\tfrac{1}{2}K}-2\sqrt[2(\lambda-\lambda_0)+1]{\tfrac{1}{2}K_0},$$

$$+2\sqrt[2\lambda+1]{\tfrac{1}{2}K}+2\sqrt[2(\lambda-\lambda_0)+1]{\tfrac{1}{2}K_0}$$

contiennent nécessairement au moins une racine de l'équation

$$x^{2\lambda+1}+Cx^{2\lambda-1}+\ldots.\pm K_0x^{2\lambda_0}+\ldots.+Jx\pm K=0,$$

quels que soient les signes des termes $K_0x^{2\lambda_0}$ et $K$.

## XIII.

## Sur la fraction qui, parmi toutes les autres de la forme

$$\frac{p'x^{n-l-1}+p''x^{n-l-2}+\ldots.+p^{(n-l-1)}x+p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)}x^l+p^{(n-l+2)}x^{l-1}+\ldots.+p^{(n)}x+p^{(n+1)}},$$

## entre $x=-h$ et $x=+h$, s'écarte le moins d'un polynôme donné

$$x^{n-l}+Ax^{n-l-1}+Bx^{n-l-2}+\ldots.$$

§ 42. Il est clair que cette fraction ne doit pas devenir infinie pour $x=0$ et cela suppose que, dans son expression

$$\frac{p'x^{n-l-1}+p''x^{n-l-2}+\ldots.+p^{(n-l-1)}x+p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)}x^l+p^{(n-l+2)}x^{l-1}+\ldots.+p^{(n)}x+p^{(n+1)}},$$

le terme $p^{(n+1)}$ ne se réduit pas à zéro. Mais tant que $p^{(n+1)}$ n'est pas zéro, cette fonction peut être évidemment mise sous la forme

$$\frac{p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \ldots + p_{n-l-1} x + p_{n-l}}{p_{n-l+1} x^l + p_{n-l+2} x^{l-1} + \ldots + p_n x + 1},$$

en dénotant

$$\frac{p'}{p^{(n+1)}},\ \frac{p''}{p^{(n+1)}}, \ldots \frac{p^{(n-l-1)}}{p^{(n+1)}},\ \frac{p^{(n-l)}}{p^{(n+1)}},\ \frac{p^{(n-l+1)}}{p^{(n+1)}}, \ldots \frac{p^{(n)}}{p^{(n+1)}}$$

par

$$p_1,\ p_2, \ldots p_{n-l-1},\ p_{n-l},\ p_{n-l+1}, \ldots p_n.$$

C'est sous cette forme que nous chercherons la fraction dont il s'agit.

En désignant par $F(x)$ la différence du polynôme donné

$$x^{n-l} + A x^{n-l-1} + B x^{n-l-2} + \ldots$$

et de la fraction cherchée

$$\frac{p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \ldots + p_{n-l-1} x + p_{n-l}}{p_{n-l+1} x^l + p_{n-l+2} x^{l-1} + \ldots + p_n x + 1},$$

nous concluons du théorème 4 (§ 16), que le nombre des solutions communes aux deux équations

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2)\, F'(x) = 0$$

et différentes entre elles ne peut s'abaisser jusqu'à $n + 1 - d$, à moins que la fraction cherchée

$$\frac{p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \ldots + p_{n-l-1} x + p_{n-l}}{p_{n-l+1} x^l + p_{n-l+2} x^{l-1} + \ldots + p_n x + 1}$$

ne se réduise à la forme

$$\frac{p_{d+1} x^{n-l-d-1} + \ldots + p_{n-l-1} x + p_{n-l}}{p_{n-l+d+1} x^{l-d} + \ldots + p_n x + 1}.$$

Or, en faisant pour abréger

$$x^{n-l} + A x^{n-l-1} + B x^{n-l-2} + \ldots = u,$$

$$p_{d+1} x^{n-l-d-1} + \ldots + p_{n-l-1} x + p_{n-l} = U,$$

$$p_{n-l+d+1} x^{l-d} + \ldots + p_n x + 1 = V,$$

on trouve

$$F(x) = u - \frac{U}{V} = \frac{uV - U}{V},$$

et par là les équations dont nous venons de parler deviennent

$$(uV - U)^2 - L^2 V^2 = 0,$$

$$(x^2 - h^2) \frac{d\frac{uV - U}{V}}{dx} = 0.$$

§ 43. En suivant la même marche que dans le § 30, on reconnaît aisément que, $x = x_0$ étant une solution commune à ces équations, l'expression

$$(x^2 - h^2) \left[(uV - U)^2 - L^2 V^2\right]$$

est divisible par $(x - x_0)^2$, et comme le nombre de ces racines, différentes entre elles, est au moins $n + 1 - d$, nous concluons que l'expression

$$(x^2 - h^2) \left[(uV - U)^2 - L^2 V^2\right]$$

est divisible par les $n + 1 - d$ différents facteurs

$$(x - x_0)^2,\ (x - x_1)^2,\ (x - x_2)^2, \ldots . (x - x_{n-d})^2.$$

D'où nous déduisons l'équation

$$(x^2 - h^2)\left[(uV - U)^2 - L^2 V^2\right] = C(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \ldots . (x - x_{n-d})^2,$$

en remarquant que la fonction $(x^2 - h^2)$ $[(uV - U)^2 - L^2 V^2]$, où

$$u = x^{n-l} + A x^{n-l-1} + B x^{n-l-2} \ldots .,$$

$$V = p_{n-l+d+1} x^{l-d} + \ldots . + p_n x + 1,$$

$$U = p_{d+1} x^{n-l-d-1} + \ldots . + p_{n-l-1} x + p_{n-l},$$

ne peut être de degré plus élevé que son diviseur

$$(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \ldots . (x - x_{n-d})^2.$$

Mais cette équation ne peut avoir lieu, évidemment, à moins qu'on ne trouve $x - h$ et $x + h$ parmi les facteurs

$$x - x_0,\ x - x_1,\ x - x_2, \ldots . x - x_{n-d},$$

et si nous supposons, pour fixer les idées, qu'on ait

$$x-x_0=x-h,\quad x-x_1=x+h,$$

elle devient

$$(x^2-h^2)\left[(uV-U)^2-L^2V^2\right]=C(x-h)^2(x+h)^2(x-x_2)^2\ldots.(x-x_{n-d})^2,$$

et par là

$$(uV-U)^2-L^2V^2=C(x^2-h^2)\,(x-x_2)^2\ldots.(x-x_{n-d})^2.$$

D'où nous tirons l'équation

$$(uV-U)^2-L^2V^2=W^2\,(x^2-h^2), \tag{18}$$

en désignant par $W$ la fonction entière

$$\sqrt{C}(x-x_2)\ldots.(x-x_{n-d}).$$

Comme les fonctions $U$ et $V$ sont de la forme

$$p_{d+1}\,x^{n-l-d-1}+\ldots.+p_{n-l-1}\,x+p_{n-l},$$
$$p_{n-l+d+1}\,x^{l-d}+\ldots.+p_n\,x+1,$$

leurs degrés ne surpasseront pas $n-l-d-1$, $l-d$. De plus, on voit facilement que le degré de $V$ ne peut être au-dessous de $l-d$; car autrement la fonction

$$(uV-U)^2-L^2V^2$$

serait de degré inférieur à $2(n-d)$, et par conséquent l'équation (18) où

$$W^2(x^2-h^2)=C(x-x_2)^2\ldots.(x-x_{n-d})^2(x^2-h^2)$$

ne pourrait avoir lieu. Donc, la fonction $V$ sera nécessairement du degré $l-d$.

§ 44. Conformément à ce que nous avons dit dans le § 16, la fraction

$$\frac{U}{V}=\frac{p_{d+1}\,x^{n-l-d-1}+\ldots.+p_{n-l-1}\,x+p_{n-l}}{p_{n-l+d+1}\,x^{l-d}+\ldots.+p_n\,x+1}$$

est la valeur de la fraction cherchée réduite à sa forme la plus simple, et, par conséquent, les fonctions $U$ et $V$ sont premières entre elles. Cette valeur de la fraction cherchée peut présenter deux cas; savoir: celui où $d$ est un nombre pair, et celui où $d$ est impair. Mais nous réduirons le dernier cas au premier, en supposant que, dans le cas de $d$ impair, on introduise dans les fonctions $U$, $V$, $W$ un facteur commun, tel que $1+\frac{x}{h}$ ou $1-\frac{x}{h}$, ce qui n'altère ni la forme de l'équation (18) ni la valeur de la fraction $\frac{U}{V}$, seulement ses termes deviennent divisibles par une même fonction $x+h$ ou $x-h$. En vertu de quoi nous supposerons désormais que $d$ est un nombre pair et que les fonctions $U$ et $V$ peuvent avoir un commun diviseur $x \pm h$, diviseur qui ne présente aucun embarras dans nos recherches, comme on le verra ensuite.

§ 45. En passant à la détermination des fonctions $U$ et $V$, nous remarquerons que l'équation (18) peut être mise sous cette forme:

$$(uV-U+LV)(uV-U-LV)=(x^2-h^2)W^2,$$

ce qui prouve que la fonction $(x^2-h^2)W^2$ est décomposable en ces deux facteurs:

$$uV-U+LV, \quad uV-U-LV.$$

Comme ces facteurs, multipliés respectivement par $L-u$, $L+u$, donnent en somme $-2LU$, et que leur différence se réduit à $2LV$, il est clair que leur commun diviseur doit diviser aussi les deux fonctions

$$U, \ V,$$

et, par conséquent, qu'il ne peut être que de la forme $x \pm h$, car les fonctions $U$ et $V$, comme nous l'avons vu (§ 44), ne peuvent avoir un commun diviseur de l'autre forme. En vertu de cela et en remarquant que la fonction $(x^2-h^2)W^2$ ne peut être décomposée en deux facteurs soit premiers entre eux, soit avec un commun diviseur de la forme $x \pm h$, que de ces deux manières:

$$W_0^2 . (x^2-h^2)W_1^2,$$
$$(x-h)W_0^2 . (x+h)W_1^2,$$

nous concluons que l'équation

$$(uV-U+LV)(uV-U-LV)=(x^2-h^2)W^2$$

entraîne nécessairement l'une de ces quatre paires d'équations:

$$uV-U+LV=W_0^2, \qquad uV-U-LV=(x^2-h^2)W_1^2;$$
$$uV-U+LV=(x-h)W_0^2, \qquad uV-U-LV=(x+h)W_1^2;$$
$$uV-U+LV=(x^2-h^2)W_0^2, \qquad uV-U-LV=W_1^2;$$
$$uV-U+LV=(x+h)W_0^2, \qquad uV-U-LV=(x-h)W_1^2.$$

De ces quatre systèmes d'équations nous n'aurons qu'à considérer les deux premiers

$$uV - U + LV = W_0^2, \qquad uV - U - LV = (x^2 - h^2)\,W_1^2,$$
$$uV - U + LV = (x - h)\,W_0^2, \quad uV - U - LV = (x + h)\,W_1^2;$$

car les autres s'en déduisent par le changement du signe de la quantité $L$. De plus, comme les fonctions $u$, $V$ sont respectivement de degrés $n - l$, $l - d$, et que le degré de $U$ ne surpasse pas $n - l - d - 1$, on trouve que l'expression

$$uV - U + LV$$

est de degré $n - d$, et, par conséquent, $d$ étant un nombre pair, cette expression sera de degré pair ou impair, selon que le nombre $n$ lui-même est pair ou impair. D'après cela et en observant que des deux systèmes d'équations

$$uV - U + LV = W_0^2, \qquad uV - U - LV = (x^2 - h^2)\,W_1^2,$$
$$uV - U + LV = (x - h)\,W_0^2, \quad uV - U - LV = (x + h)\,W_1^2,$$

le premier suppose que la fonction

$$uV - U + LV$$

est de degré pair, et le second qu'elle est de degré impair, nous concluons que le premier aura lieu dans le cas de $n$ pair et le second dans le cas de $n$ impair.

Nous allons traiter à part chacun de ces cas.

## XIV.

### Le nombre $n$ est pair.

§ 46. Dans ce cas on aura ces deux équations:

$$(19) \qquad uV - U + LV = W_0^2, \quad uV - U - LV = (x^2 - h^2)\,W_1^2,$$

qui étant résolues par rapport à $U$ et $V$ donnent

$$(20) \qquad 2LV = W_0^2 - (x^2 - h^2)\,W_1^2,$$

$$(21) \qquad 2LU = (u - L)\,W_0^2 - (u + L)\,(x^2 - h^2)\,W_1^2.$$

Comme les fonctions $u$, $V$ sont respectivement de degrés $n-l$, $l-d$, et que le degré de $U$ ne surpasse pas $n-l-d-1$, les équations (19) nous montrent que les fonctions $W_0$, $W_1$ sont respectivement de degrés $\frac{n-d}{2}$, $\frac{n-d}{2}-1$.

D'autre part, l'équation (21), étant mise sous la forme

$$2LU=\left[W_0\sqrt{u-L}-W_1\sqrt{(u+L)(x^2-h^2)}\right]\left[W_0\sqrt{u-L}+W_1\sqrt{(u+L)(x^2-h^2)}\right],$$

nous donne

$$\frac{W_0}{W_1}-\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}=\frac{2LU}{W_1\left[W_0(u-L)+W_1\sqrt{(u^2-L^2)(x^2-h^2)}\right]},$$

ce qui prouve que la fraction $\frac{W_0}{W_1}$ est la valeur de $\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$, exacte jusqu'aux termes de même ordre que

$$\frac{2LU}{W_1\left[W_0(u-L)+W_1\sqrt{(u^2-L^2)(x^2-h^2)}\right]}.$$

Or, comme les fonctions $W_0$, $W_1$, $u$, par ce que nous avons vu plus haut, sont respectivement de degrés $\frac{n-d}{2}$, $\frac{n-d}{2}-1$, $n-l$, et que le degré de $U$ ne surpasse pas $n-l-d-1$, on trouve que l'expression

$$\frac{2LU}{W_1\left[W_0(u-L)+W_1\sqrt{(u^2-L^2)(x^2-h^2)}\right]}$$

n'est pas de degré plus élevé que $\frac{x^{n-l-d-1}}{x^{\frac{n-d}{2}-1}.x^{\frac{n-d}{2}}.x^{n-l}}=\frac{1}{x^n}$. Donc, la fraction $\frac{W_0}{W_1}$, d'après l'équation dont nous venons de parler, est la valeur de $\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$ exacte au moins jusqu'aux termes de l'ordre $\frac{1}{x^n}$. Mais comme $W_1$, le dénominateur de la fraction $\frac{W_0}{W_1}$, n'est que de degré $\frac{n-d}{2}-1<\frac{n}{2}$, cela ne peut avoir lieu, à moins qu'elle ne soit l'une des fractions convergentes de l'expression

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}},$$

qu'on trouve par son développement en fraction continue.

De plus, comme le dénominateur de la fraction $\frac{W_0}{W_1}$ est de degré $\frac{n-d}{2}-1$, elle ne peut donner la valeur de $\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$, exacte jusqu'aux termes $\frac{1}{x^n}$, à moins que la fraction convergente de $\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$, qui vient immédiatement après elle, n'ait pour dénominateur une fonction au moins de degré $\frac{n+d}{2}+1$. D'où l'on voit, d'une part, que $\frac{W_0}{W_1}$, dans la suite des fractions convergentes de $\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$, est la dernière avec le dénominateur de degré au-dessous de $\frac{n}{2}$, et de l'autre, que parmi ces fractions aucune n'a pour dénominateur une fonction de degré $\frac{n}{2}$. Le premier point nous montre que les fonctions $W_1$ et $W_0$, et conséquemment la fraction cherchée $\frac{U}{V}$ sont tout-à-fait déterminées par la valeur de $L$; le second nous servira pour trouver la constante $L$, et d'après elle on aura facilement la valeur de la fraction $\frac{U}{V}$.

§ 47. Pour y parvenir, supposons que

$$q_0 - \cfrac{h^2}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \ddots}}$$

soit le développement de $\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$ en fraction continue, et que

$$q_\sigma + \frac{G_\sigma}{x} + \frac{H_\sigma}{x^2} + \cdots$$

soit la valeur du quotient complet qu'on trouve en s'arrêtant au dénominateur $q_\sigma$. Dans cette supposition on a

$$(22)\qquad \sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}} = q_0 - \cfrac{h^2}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \ddots - \cfrac{h^2}{q_\sigma + \frac{G_\sigma}{x} + \frac{H_\sigma}{x^2} + \cdots}}}$$

$$(23)\qquad q_{\sigma+1} + \frac{G_{\sigma+1}}{x} + \frac{H_{\sigma+1}}{x^2} + \cdots = -\frac{h^2 x}{G_\sigma + \frac{H_\sigma}{x} + \cdots}.$$

La dernière de ces formules nous montre que les dénominateurs

$$q_1,\ q_2, \ldots q_{\frac{n}{2}}$$

sont des fonctions du premier degré, si les quantités

$$G_0,\ G_1, \ldots G_{\frac{n}{2}-1}$$

restent différentes de zéro. Mais tant que $q_1, q_2, \ldots q_{\frac{n}{2}}$ sont des fonctions du premier degré, le développement de

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$$

en fraction continue

$$q_0 - \cfrac{h^2}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \ldots}}$$

arrêté au dénominateur $q_{\frac{n}{2}}$, donne évidemment une fraction convergente avec le dénominateur de degré $\frac{n}{2}$. Or, en vertu de l'équation (21), où $L$ désigne la limite des valeurs de $u - \frac{U}{V}$ entre $x = -h$ et $x = +h$, cela ne doit pas avoir lieu, comme nous l'avons vu; donc, pour cette valeur de $L$, au moins l'une de ces équations:

$$G_0 = 0, \; G_1 = 0, \ldots G_{\frac{n}{2}-1} = 0$$

aura lieu nécessairement.

§ 48. Supposons maintenant que parmi toutes les valeurs dont $L$ est susceptible dans le cas où cette condition est remplie, celle qui est numériquement la plus petite soit $L_0$. Comme $-L$ et $+L$ déterminent les limites où, depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, reste comprise la différence de la fraction cherchée

$$\frac{U}{V} = \frac{p_{d+1} x^{n-l-d-1} + \ldots + p_{n-l-1} x + p_{n-l}}{p_{n-l+d+1} x^{l-d} + \ldots + p_n x + 1},$$

ou ce qui revient au même (§ 41)

$$\frac{U}{V} = \frac{p' x^{n-l-1} + p'' x^{n-l-2} + \ldots + p^{(n-l-1)} x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)} x^l + p^{(n-l+2)} x^{l-1} + \ldots + p^{(n)} x + p^{(n+1)}},$$

et du polynôme

$$u = x^{n-l} + A x^{n-l-1} + B x^{n-l-2} + \ldots,$$

et que, d'après le sens de notre problème, il s'agit de rendre ces limites les plus proches possible de zéro, il est clair que dans sa solution on aura

$$L = L_0,$$

si toutefois il est possible d'obtenir une fraction

$$\frac{U}{V}=\frac{p' x^{n-l-1}+p'' x^{n-l-2}+\ldots+p^{(n-l-1)} x+p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)} x^l+p^{(n-l+2)} x^{l-1}+\ldots+p^{(n)} x+p^{(n+1)}}$$

dont la différence avec $u$, depuis $x=-h$ jusqu'à $x=+h$, reste comprise entre les limites aussi rapprochées que $-L_0$ et $+L_0$.

Nous allons montrer maintenant que cela est possible et qu'on trouve une telle fraction d'après nos formules (20), (21), en prenant

$$L=L_0, \quad W_0=M, \quad W_1=N,$$

où $\frac{M}{N}$ est la fraction convergente de

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}=q_0-\cfrac{h^2}{q_1-\cfrac{h^2}{q_2-\ldots}}$$

qui correspond au dénominateur $q_\sigma$, la première des équations

$$G_0=0, \; G_1=0, \ldots . G_{\frac{n}{2}-1}=0,$$

qui a lieu, dans le cas de $L=L_0$, étant

$$G_\sigma=0.$$

§ 49. Pour y parvenir, remarquons, en premier lieu, que pour ces valeurs de $L_0$, $W_0$, $W_1$ les équations (20), (21) deviennent

$$2 L_0 V=M^2-(x^2-h^2) N^2,$$
$$2 L_0 U=(u-L_0) M^2-(u+L_0)(x^2-h^2) N^2;$$

d'où résulte cette valeur de la fraction $\frac{U}{V}$:

$$\frac{U}{V}=\frac{(u-L_0) M^2-(u+L_0)(x^2-h^2) N^2}{M^2-(x^2-h^2) N^2}. \tag{24}$$

D'autre part, comme

$$G_\sigma=0$$

est la première des équations

$$G_0=0, \; G_1=0, \ldots . G_{\frac{n}{2}-1}=0,$$

qui a lieu dans le cas de $L = L_0$, on voit d'après (22) que pour cette valeur de $L$ les fonctions

$$q_1, \; q_2, \ldots . q_\sigma$$

sont du premier degré, et $q_{\sigma+1}$ de degré plus élevé. D'où il suit qu'en s'arrêtant dans le développement de

$$\sqrt{\frac{(u+L_0)(x^2-h^2)}{u-L_0}}$$

en fraction continue

$$q_0 - \cfrac{h^2}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \ldots}}$$

au dénominateur $q_\sigma$, on trouve une fraction convergente dont les termes sont respectivement de degrés $\sigma+1$, $\sigma$, et dont la valeur ne diffère de

$$\sqrt{\frac{(u+L_0)(x^2-h^2)}{u-L_0}}$$

que par des termes de degrés inférieurs à celui de $\frac{1}{x^{2\sigma+1}}$. Donc, comme $\frac{M}{N}$ est la fraction convergente de $\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$, qui correspond au dénominateur $q_\sigma$, les fonctions $M$, $N$ sont respectivement de degrés $\sigma+1$, $\sigma$, et la différence

$$\frac{M}{N} - \sqrt{\frac{(u+L_0)(x^2-h^2)}{u-L_0}}$$

est une fonction de degré inférieur à $-(2\sigma+1)$.

En vertu de ce que nous venons de montrer sur les fonctions

$$M, \; N, \; \frac{M}{N} - \sqrt{\frac{(u+L_0)(x^2-h^2)}{u-L_0}},$$

il est facile de voir que la fraction

$$\frac{U}{V},$$

déterminée par la formule (24), se réduit à la forme

$$\frac{p' x^{n-l-1} + p'' x^{n-l-2} + \ldots . + p^{(n-l-1)} x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)} x^l + p^{(n-l+2)} x^{l-1} + \ldots . + p^{(n)} x + p^{(n+1)}}.$$

En effet, son numérateur

$$(u - L_0) M^2 - (u + L_0)(x^2 - h^2) N^2$$

peut être mis sous la forme

$$(u - L_0) N^2 \left[\frac{M}{N} + \sqrt{\frac{(u + L_0)(x^2 - h^2)}{u - L_0}}\right]\left[\frac{M}{N} - \sqrt{\frac{(u + L_0)(x^2 - h^2)}{u - L_0}}\right],$$

et comme les fonctions

$$u,\ M,\ N,\ \sqrt{\frac{(u + L_0)(x^2 - h^2)}{u - L_0}}$$

sont respectivement de degrés

$$n - l,\ \sigma + 1,\ \sigma,\ 1,$$

et que le degré de la différence

$$\frac{M}{N} - \sqrt{\frac{(u + L_0)(x^2 - h^2)}{u - L_0}}$$

est plus petit que $-(2\sigma + 1)$, on trouve pour cette expression un degré inférieur à $n - l$, et, par conséquent, elle sera de la forme

$$p' x^{n-l-1} + p'' x^{n-l-2} + \ldots . + p^{(n-l-1)} x + p^{(n-l)}.$$

En passant à son dénominateur

$$M^2 - (x^2 - h^2) N^2,$$

remarquons qu'il peut être mis sous la forme

$$\frac{(u - L_0) M^2 - (u + L_0)(x^2 - h^2) N^2}{u} + L_0 \frac{M^2 + (x^2 - h^2) N^2}{u},$$

et comme les fonctions

$$M,\ N,\ u$$

sont respectivement de degrés

$$\sigma + 1,\ \sigma,\ n - l,$$

et que

$$(u - L_0) M^2 - (u + L_0)(x^2 - h^2) N^2,$$

en vertu de ce que nous venons de voir, est d'un degré plus petit que $n-l$, on trouve que le degré de cette expression est égal à $2\sigma + 2 - (n - l)$. Mais $\sigma$ étant l'un des nombres

$$0,\ 1,\ 2, \ldots . \frac{n}{2} - 1,$$

le nombre $2\sigma + 2 - (n - l)$ ne peut surpasser $l$. D'où il suit que la fonction

$$M^2 - (x^2 - h^2) N^2$$

est de la forme

$$p^{(n-l+1)} x^l + p^{(n-l+2)} x^{l-1} + \ldots + p^{(n)} x + p^{(n+1)}.$$

Ainsi nous parvenons à nous assurer, que la fraction $\frac{U}{V}$ qu'on trouve d'après (24) est de la forme

$$\frac{p' x^{n-l-1} + p'' x^{n-l-2} + \ldots + p^{(n-l-1)} x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)} x^l + p^{(n-l+2)} x^{l-1} + \ldots + p^{(n)} x + p^{(n+1)}}.$$

Il nous reste à montrer que sa différence avec $u$, entre $x = -h$ et $x = +h$, est comprise dans les limites $-L_0$ et $+L_0$. Pour y parvenir, nous remarquerons que d'après (24) on a

$$\left(u - \frac{U}{V}\right)^2 - L_0^2 = \frac{4 L_0^2 M^2 N^2}{[M^2 - N^2 (x^2 - h^2)]^2} (x^2 - h^2),$$

et comme $M$, $N$ sont des fonctions réelles, et, que partant l'expression

$$\frac{4 L_0^2 M^2 N^2}{[M^2 - (x^2 - h^2) N^2]^2}$$

ne peut devenir négative, cette équation montre que, depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, la fonction

$$\left(u - \frac{U}{V}\right)^2$$

ne surpasse pas $L_0^2$, ce qui prouve que la différence

$$u - \frac{U}{V},$$

depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, reste comprise dans les limites $-L_0$ et $+L_0$.

§ 50. Ainsi nous nous assurons que la fraction $\frac{U}{V}$ qu'on trouve d'après (24) est de la forme

$$\frac{p' x^{n-l-1} + p'' x^{n-l-2} + \ldots + p^{(n-l-1)} x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)} x^l + p^{(n-l+2)} x^{l-1} + \ldots + p^{(n)} x + p^{(n+1)}},$$

et que sa différence avec $u$, depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, reste comprise dans les limites $-L_0$ et $+L_0$. D'où il suit, en vertu du § 48, que

$$L = L_0$$

est effectivement la valeur de $L$ qui répond à notre problème, et, par conséquent, qui détermine les limites des valeurs de $u - \frac{U}{V}$ les plus proches de zéro.

En remarquant que $-L_0$ et $+L_0$ sont les limites de la différence

$$u - \frac{U}{V},$$

entre $x = -h$ et $x = +h$, les plus proches de zéro, on voit, d'après ce que nous venons de montrer par rapport à la fraction $\frac{U}{V}$, déterminée par (24), qu'elle donne la solution de notre problème, où il s'agit de trouver la fraction $\frac{U}{V}$ de la forme

$$\frac{p' x^{n-l-1} + p'' x^{n-l-2} + \ldots + p^{(n-l-1)} x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)} x^l + p^{(n-l+2)} x^{l-1} + \ldots + p^{(n)} x + p^{(n+1)}},$$

qui, depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, s'écarte le moins de $u$.

De plus, on reconnaît aisément que c'est la seule solution possible de notre problème (sauf le cas, où l'on obtient pour $L_0$ deux valeurs de signes contraires, dont chacune, d'après (24), peut donner la solution); car en vertu de ce que nous avons montré (§ 46) sur l'équation (21), les fonctions $W_0$ et $W_1$, et par conséquent la fraction $\frac{U}{V}$, sont complètement déterminées par la valeur de $L$.

Ainsi on ne trouvera la quantité $L = L_0$ et la fraction cherchée $\frac{U}{V}$ qu'à l'aide du développement de l'expression

$$\sqrt{\frac{(u + L)(x^2 - h^2)}{u - L}}$$

en fraction continue

$$q_0 - \cfrac{h^2}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \ldots}}$$

prolongée jusqu'au dénominateur $q_{\frac{n}{2}}$, ce qui demande des calculs très longs. Nous allons montrer maintenant comment on peut simplifier la détermination de $L_0$ et de $\frac{U}{V}$.

## XV.

§ 51. Comme la fonction $u$ est de degré $n-l$, l'expression

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}},$$

ne diffère évidemment de

$$\sqrt{x^2-h^2}$$

que par les termes de l'ordre $\frac{1}{x^{n-l-1}}$ ou moins élevés. D'où il suit qu'on trouvera la même formule par le développement des expressions

$$\sqrt{x^2-h^2}, \quad \sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}},$$

en fraction continue, si l'on ne pousse pas ce développement au-delà de la limite, pour laquelle les fractions continues donnent leurs valeurs exactes jusqu'aux termes de l'ordre $\frac{1}{x^{n-l-1}}$. D'après cela et en remarquant que $\sqrt{x^2-h^2}$ (§ 22) se développe en fraction continue

$$x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\dots}}$$

qui ne donne pas la valeur de $\sqrt{x^2-h^2}$ exacte jusqu'à $\frac{1}{x^{n-l-1}}$, si le nombre de ses dénominateurs ne surpasse pas

$$\frac{n-l-2}{2}=\frac{n}{2}-\frac{l+2}{2},$$

nous concluons que dans le développement de

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}=q_0-\cfrac{h^2}{q_1-\cfrac{h^2}{q_2-\dots}}$$

on trouvera

$$q_0=x,\ q_1=2x,\ q_2=2x, \dots . q_{\frac{n}{2}-k}=2x,$$

où $k$ est le plus grand nombre entier compris dans la valeur de $\frac{l+3}{2}$.

D'où il suit que les $\left(\frac{n}{2}-k+1\right)$ fractions convergentes de $\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$ sont égales à celles de $\sqrt{x^2-h^2}$ que nous avons dénotées (§ 22) par

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots,$$

et dont les termes, comme nous l'avons vu, se déterminent ainsi:

$$(25) \qquad \begin{cases} P_\lambda = \dfrac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^\lambda + (x-\sqrt{x^2-h^2})^\lambda}{2}, \\ Q_\lambda = \dfrac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^\lambda - (x-\sqrt{x^2-h^2})^\lambda}{2\sqrt{x^2-h^2}}. \end{cases}$$

§ 52. D'après cela il est facile de trouver une certaine fonction qui, par son développement, donne la partie de la fraction continue

$$q_0 - \cfrac{h^2}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \ddots}}$$

qui suit après le dénominateur $q_{\frac{n}{2}-k}$.

En effet, les fractions convergentes de

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}} = q_0 - \cfrac{h^2}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \ddots}}$$

qui correspondent aux dénominateurs $q_{\frac{n}{2}-k-1}$, $q_{\frac{n}{2}-k}$ étant

$$\frac{P_{\frac{n}{2}-k}}{Q_{\frac{n}{2}-k}}, \quad \frac{P_{\frac{n}{2}-k+1}}{Q_{\frac{n}{2}-k+1}},$$

nous trouvons

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}} = q_0 - \cfrac{h^2}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \ddots - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k} - Z}}} = \frac{P_{\frac{n}{2}-k+1} - ZP_{\frac{n}{2}-k}}{Q_{\frac{n}{2}-k+1} - ZQ_{\frac{n}{2}-k}},$$

en dénotant par $Z$ la valeur de la fraction continue

$$\cfrac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+1} - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+2} - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+3} - \ddots}}}$$

et par là

$$Z = \frac{\sqrt{(u+L)(x^2-h^2)}\, Q_{\frac{n}{2}-k+1} - \sqrt{u-L}\, P_{\frac{n}{2}-k+1}}{\sqrt{(u+L)(x^2-h^2)}\, Q_{\frac{n}{2}-k} - \sqrt{u-L}\, P_{\frac{n}{2}-k}}.$$

En substituant ici les valeurs de

$$P_{\frac{n}{2}-k}, \quad P_{\frac{n}{2}-k+1}, \quad Q_{\frac{n}{2}-k}, \quad Q_{\frac{n}{2}-k+1},$$

tirées des formules (25) que nous venons de mentionner, on a

$$Z = \frac{\left[(x+\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n}{2}-k+1} - (x-\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n}{2}-k+1}\right]\sqrt{u+L} - \left[(x+\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n}{2}-k+1} + (x+\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n}{2}-k+1}\right]\sqrt{u-}}{\left[(x+\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n}{2}-k} - (x-\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n}{2}-k}\right]\sqrt{u+L} - \left[(x+\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n}{2}-k} + (x+\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n}{2}-k}\right]\sqrt{u-L}}$$

et comme

$$\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right) = h^2,$$

$$x - \sqrt{x^2-h^2} = \frac{h^2}{x+\sqrt{x^2-h^2}},$$

cette valeur de $Z$ se réduit à celle-ci:

$$Z = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-h^2}} \cdot \frac{\left[(x+\sqrt{x^2-h^2})^{n-2k+2} - h^{n-2k+2}\right]\sqrt{u+L} - \left[(x+\sqrt{x^2-h^2})^{n-2k+2} + h^{n-2k+2}\right]\sqrt{u-L}}{\left[(x+\sqrt{x^2-h^2})^{n-2k} - h^{n-2k}\right]\sqrt{u+L} - \left[(x+\sqrt{x^2-h^2})^{n-2k} + h^{n-2k}\right]\sqrt{u-L}}.$$

En multipliant dans cette expression de $Z$ le numérateur et le dénominateur par

$$\sqrt{u+L} + \sqrt{u-L},$$

nous trouvons en définitive

$$Z = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-h^2}} \cdot \frac{L(x+\sqrt{x^2-h^2})^{n-2k+2} - h^{n-2k+2}(u+\sqrt{u^2-L^2})}{L(x+\sqrt{x^2-h^2})^{n-2k} - h^{n-2k}(u+\sqrt{u^2-L^2})}.$$

Ainsi nous trouvons la fonction $Z$ qui, par son développement, détermine la partie de la fraction continue

$$q_0 - \cfrac{h^2}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \cdots}} \; \cdots,$$

qui suit après le dénominateur $q_{\frac{n}{2}-k}$, et par là les valeurs de

$$G_{\frac{n}{2}-k}, \; G_{\frac{n}{2}-k+1}, \ldots . G_{\frac{n}{2}-1},$$

qui désignent les coefficients de $\frac{1}{x}$ dans les quotients complets de la fraction continue

$$q_0 - \cfrac{h^2}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \ddots}}$$

arrêtée aux dénominateurs

$$q_{\frac{n}{2}-k},\ q_{\frac{n}{2}-k+1},\dots q_{\frac{n}{2}-1}.$$

D'après cela on a

$$G_{\frac{n}{2}-k} = g_1,\ G_{\frac{n}{2}-k+1} = g_2,\dots G_{\frac{n}{2}-1} = g_k, \tag{26}$$

en dénotant par

$$g_1,\ g_2,\dots g_k$$

les coefficients de $\frac{1}{x}$ dans les $k$ premiers quotients complets du développement de $Z$ en fraction continue

$$\cfrac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+1} - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+2} - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+3} - \ddots}}}$$

Quant aux valeurs de

$$G_0,\ G_1,\dots G_{\frac{n}{2}-k-1},$$

en remarquant que les dénominateurs

$$q_1,\ q_2,\dots q_{\frac{n}{2}-k}$$

dans la fraction continue

$$q_0 - \cfrac{h^2}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \ddots}}$$

comme nous l'avons vu (§ 51), sont égaux à $2x$, nous trouvons

$$G_0 = -\frac{h^2}{2},\ G_1 = -\frac{h^2}{2},\dots G_{\frac{n}{2}-k-1} = -\frac{h^2}{2}. \tag{27}$$

§ 53. Au moyen de ce que nous avons vu par rapport au développement de

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$$

en fraction continue

$$q_0 - \cfrac{h^2}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \cdots}},$$

la détermination de la constante $L_0$ et de la fraction cherchée $\frac{U}{V}$ se simplifie notablement, comme nous allons le montrer.

D'après le § 48, on trouvera la valeur de $L_0$ en cherchant parmi les racines des équations

$$G_0 = 0,\ G_1 = 0, \ldots G_{\frac{n}{2}-1} = 0$$

la plus petite numériquement.

Or, comme nous avons trouvé (27)

$$G_0 = -\frac{h^2}{2},\ G_1 = -\frac{h^2}{2}, \ldots G_{\frac{n}{2}-k-1} = -\frac{h^2}{2},$$

il est clair que $L = L_0$ ne peut être qu'une racine des équations

$$G_{\frac{n}{2}-k} = 0,\ G_{\frac{n}{2}-k+1} = 0, \ldots G_{\frac{n}{2}-1} = 0,$$

ou, ce qui revient au même d'après (26), de celles-ci:

$$g_1 = 0,\ g_2 = 0, \ldots g_k = 0,$$

Ainsi nous parvenons pour la détermination de $L_0$ à cette conclusion définitive:

*On trouve la valeur de $L = L_0$, en cherchant parmi les racines des équations*

$$g_1 = 0,\ g_2 = 0,\ g_k = 0,$$

*celle qui est la plus pétite numériquement; où $g_1, g_2, \ldots g_k$ sont les coefficients de $\frac{1}{x}$ dans les $k$ premiers quotients complets du développement de*

$$Z = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-h^2}} \cdot \frac{L(x+\sqrt{x^2-h^2})^{n-2k+2} - h^{n-2k+2}(u+\sqrt{u^2-L^2})}{L(x+\sqrt{x^2-h^2})^{n-2k} - h^{n-2k}(u+\sqrt{u^2-L^2})}$$

*en fraction continue, et $k$ désigne le plus grand nombre entier que la quantité $\frac{l+3}{2}$ contient.*

Nous ne disons rien de la forme de la fraction continue, dans laquelle on développera $Z$, en cherchant les valeurs de $g_1, g_2, \ldots g_k$; car il est clair que les quotients complets, aux facteurs constants près, seront les mêmes, qu'on développe $Z$ en fraction continue de la forme

$$\cfrac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+1} - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+2} - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+3} - \ddots}}}$$

comme nous l'avons supposé jusqu'à présent, ou dans une de la forme

$$\cfrac{\alpha'}{q' + \cfrac{\alpha''}{q'' + \cfrac{\alpha'''}{q''' + \ddots}}}$$

où $\alpha'$, $\alpha''$, $\alpha'''$, .... sont des valeurs constantes quelconques.

Remarquons que la même chose se présente encore pour les termes des fractions convergentes que nous aurons à considérer plus tard.

§ 54. En passant à la détermination de la fraction cherchée

$$\frac{U}{V},$$

supposons que

$$g_i = 0$$

soit la première des équations

$$g_1 = 0, \; g_2 = 0, \ldots . g_k = 0,$$

qu'on vérifie en prenant

$$L = L_0 .$$

Comme nous avons trouvé (§ 52) que

$$G_0 = -\frac{h^2}{2}, \; G_1 = -\frac{h^2}{2}, \ldots . G_{\frac{n}{2}-k-1} = -\frac{h^2}{2},$$

$$G_{\frac{n}{2}-k} = g_1, \; G_{\frac{n}{2}-k+1} = g_2, \ldots . G_{\frac{n}{2}-1} = g_k,$$

il suit que, dans cette supposition, l'équation

$$G_{\frac{n}{2}-k+i-1} = 0$$

sera la première parmi

$$G_0 = 0, \; G_1 = 0, \ldots . G_{\frac{n}{2}-1} = 0,$$

qui a lieu pour $L = L_0$. D'où nous concluons, en vertu du § 48, que la fraction cherchée sera déterminnée par la formule (24), en prenant

$$\sigma = \frac{n}{2} - k + i - 1,$$

ce qui nous donne

$$\frac{U}{V} = \frac{(u - L_0)\, M^2 - (u + L_0)\,(x^2 - h^2)\, N^2}{M^2 - (x^2 - h^2)\, N^2},$$

où

$$\frac{M}{N} = q_0 - \cfrac{h^2}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \cdots \cdots - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n}{2} - k + i - 1}}}}.$$

Mais en dénotant par

$$\frac{M_1}{N_1}, \frac{M_2}{N_2}, \frac{M_3}{N_3}, \ldots .$$

la série des fractions convergentes de

$$Z = \cfrac{h^2}{q_{\frac{n}{2} - k + 1} - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n}{2} - k + 2} - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n}{2} - k + 3} - \cdots}}}$$

où

$$\frac{M_1}{N_1} = \frac{0}{1}, \; \frac{M_2}{N_2} = \frac{h^2}{q_{\frac{n}{2} - k + 1}}, \ldots .$$

on a

$$\frac{M}{N} = q_0 - \cfrac{h^2}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \cdots \cdots - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n}{2} - k} - \frac{M_i}{N_i}}}}.$$

D'où, en remarquant (§ 51) que les fractions convergentes de

$$q_0 - \cfrac{h^2}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \cdots}}$$

qui correspondent aux dénominateurs $q_{\frac{n}{2} - k}$, $q_{\frac{n}{2} - k - 1}$ sont

$$\frac{P_{\frac{n}{2} - k + 1}}{Q_{\frac{n}{2} - k + 1}}, \quad \frac{P_{\frac{n}{2} - k}}{Q_{\frac{n}{2} - k}},$$

nous concluons

$$\frac{M}{N}=\frac{P_{\frac{n}{2}-k+1}N_i-P_{\frac{n}{2}-k}M_i}{Q_{\frac{n}{2}-k+1}N_i-Q_{\frac{n}{2}-k}M_i},$$

et par là l'expression précédente de $\frac{U}{V}$ devient

$$\frac{(u-L_0)\left(P_{\frac{n}{2}-k+1}N_i-P_{\frac{n}{2}-k}M_i\right)^2-(u+L_0)(x^2-h^2)\left(Q_{\frac{n}{2}-k+1}N_i-Q_{\frac{n}{2}-k}M_i\right)^2}{\left(P_{\frac{n}{2}-k+1}N_i-P_{\frac{n}{2}-k}M_i\right)^2-(x^2-h^2)\left(Q_{\frac{n}{2}-k+1}N_i-Q_{\frac{n}{2}-k}M_i\right)^2};$$

où le numérateur se réduit à

$$\begin{aligned}&\left[\left(P^2_{\frac{n}{2}-k+1}-(x^2-h^2)\,Q^2_{\frac{n}{2}-k+1}\right)u-\left(P^2_{\frac{n}{2}-k+1}+Q^2_{\frac{n}{2}-k+1}(x^2-h^2)\right)L_0\right]N_i^2\\
-2&\left[\left(P_{\frac{n}{2}-k+1}P_{\frac{n}{2}-k}-Q_{\frac{n}{2}-k+1}Q_{\frac{n}{2}-k}(x^2-h^2)\right)u-\left(P_{\frac{n}{2}-k+1}P_{\frac{n}{2}-k}+Q_{\frac{n}{2}-k+1}Q_{\frac{n}{2}-k}(x^2-h^2)\right)L_0\right]N_iM_i\\
&+\left[\left(P^2_{\frac{n}{2}-k}-Q^2_{\frac{n}{2}-k}(x^2-h^2)\right)u-\left(P^2_{\frac{n}{2}-k}+Q^2_{\frac{n}{2}-k}(x^2-h^2)\right)L_0\right]M_i^2,\end{aligned}$$

et le dénominateur à

$$\begin{aligned}&\left(P^2_{\frac{n}{2}-k+1}-Q^2_{\frac{n}{2}-k+1}(x^2-h^2)\right)N_i^2+\left(P^2_{\frac{n}{2}-k}-Q^2_{\frac{n}{2}-k}(x^2-h^2)\right)M_i^2\\
&\qquad-2\left(P_{\frac{n}{2}-k+1}P_{\frac{n}{2}-k}-Q_{\frac{n}{2}-k+1}Q_{\frac{n}{2}-k}(x^2-h^2)\right)N_iM_i.\end{aligned}$$

Mais comme d'après (25) on trouve

$$\begin{aligned}&P_\lambda^2-Q_\lambda^2(x^2-h^2)=h^{2\lambda},\\
&P_\lambda^2+Q_\lambda^2(x^2-h^2)=\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{2\lambda}+(x-\sqrt{x^2-h^2})^{2\lambda}}{2},\\
&P_\lambda P_{\lambda-1}+Q_\lambda Q_{\lambda-1}(x^2-h^2)=\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{2\lambda-1}+(x-\sqrt{x^2-h^2})^{2\lambda-1}}{2}\\
&P_\lambda P_{\lambda-1}-Q_\lambda Q_{\lambda-1}(x^2-h^2)=h^{2\lambda-2}x,\end{aligned}$$

ces valeurs de $U$ et $V$ deviennent

$$\begin{aligned}U=&\left[h^{n-2k+2}u-L_0\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{n-2k+2}+(x-\sqrt{x^2-h^2})^{n-2k+2}}{2}\right]N_i^2\\
&-2\left[h^{n-2k}xu-L_0\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{n-2k+1}+(x-\sqrt{x^2-h^2})^{n-2k+1}}{2}\right]N_iM_i\\
&+\left[h^{n-2k}\,u-L_0\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{n-2k}+(x-\sqrt{x^2-h^2})^{n-2k}}{2}\right]M_i^2,\\
V=&\,h^{n-2k}\left[h^2N_i^2-2xN_iM_i+M_i^2\right].\end{aligned}$$

Ainsi nous parvenons pour la détermination de la fraction cherchée $\frac{U}{V}$ à cette conclusion définitive:

*Si $g_i = 0$ est la première des équations*

$$g_1 = 0,\ g_2 = 0, \ldots . g_k = 0$$

*qu'on vérifie en prenant $L = L_0$, les termes de la fraction $\frac{U}{V}$, qui parmi toutes les autres de la forme*

$$\frac{p'\,x^{n-l-1} + p''\,x^{n-l-2} + \ldots . + p^{(n-l-1)}\,x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)}\,x^l + p^{(n-l+2)}\,x^{l-1} + \ldots . + p^{(n)}\,x + p^{(n+1)}}$$

*s'écarte le moins de*

$$u = x^{n-l} + A\,x^{n-l-1} + B\,x^{n-l-2} + \ldots . ,$$

*entre $x = -h$ et $x = +h$, sont données par ces formules:*

$$\begin{aligned} U = & \left[h^{n-2k+2} u - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2}}{2}\right] N_i^2 \\ & - 2\left[h^{n-2k}\, x u - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+1} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+1}}{2}\right] N_i M_i \\ & + \left[h^{n-2k}\ u - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k}}{2}\right] M_i^2, \\ V = & \, h^{n-2k}\left[h^2 N_i^2 - 2\,x N_i M_i + M_i^2\right], \end{aligned}$$

*où $M_i$, $N_i$ sont les termes de la $i^{\text{ème}}$ fraction convergente de*

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - h^2}}\;\frac{L(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2} - h^{n-2k+2}(u + \sqrt{u^2 - L^2})}{L(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k} - h^{n-2k}(u + \sqrt{u^2 - L^2})}$$

*qu'on trouve par son développement en fraction continue et parmi lesquelles on compte $\frac{0}{1}$.*

## XVI.

### Le nombre $n$ est impair.

§ 55. La méthode que nous venons de donner pour la détermination de $L_0$ et de la fraction $\frac{U}{V}$ dans le cas de $n$ pair, peut être facilement appliquée au cas où $n$ est impair, comme nous allons le montrer.

Nous avons vu dans le § 45 que, le nombre $n$ étant impair, on a ce système d'équations:

$$(28)\qquad \begin{cases} uV - U + LV = (x-h)\,W_0^2, \\ uV - U - LV = (x+h)\,W_1^2, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(29)\qquad 2LV = (x-h)\,W_0^2 - (x+h)\,W_1^2,$$

$$(30)\qquad 2LU = (u-L)\,(x-h)\,W_0^2 - (u+L)\,(x+h)\,W_1^2.$$

Comme les fonctions $u$, $V$ sont respectivement de degrés $n-l$, $l-d$, et que le degré de $U$ ne surpasse pas $n-l-d-1$ (§ 43), les équations (28) prouvent que les fonctions

$$W_0,\ W_1$$

sont de degré $\frac{n-d-1}{2}$. Mais d'après l'équation (30) on trouve

$$\frac{W_0}{W_1} - \sqrt{\frac{(u+L)\,(x+h)}{(u-L)\,(x-h)}} = \frac{2LU}{W_1\left[W_0\,(u-L)\,(x-h) + W_1\sqrt{(u^2-L^2)\,(x^2-h^2)}\right]},$$

ce qui nous montre que la fraction

$$\frac{W_0}{W_1}$$

est la valeur de

$$\sqrt{\frac{(u+L)\,(x+h)}{(u-L)\,(x-h)}}$$

exacte jusqu'aux termes de l'ordre

$$\frac{2LU}{W_1\left[W_0\,(u-L)\,(x-h) + W_1\sqrt{(u^2-L^2)\,(x^2-h^2)}\right]},$$

et par conséquent, en vertu de ce que nous avons vu relativement aux degrés des fonctions $W_0$, $W_1$, $U$, $u$, exacte jusqu'à $\frac{1}{x^{n+1}}$. Or, comme $W_1$, le dénominateur de la fraction $\frac{W_0}{W_1}$, n'est que de degré $\frac{n-d-1}{2}$, cela ne peut avoir lieu, à moins que $\frac{W_0}{W_1}$ ne soit l'une des fractions convergentes de

$$\sqrt{\frac{(u+L)\,(x+h)}{(u-L)\,(x-h)}},$$

et que la fraction convergente qui suit celle égale à $\frac{W_0}{W_1}$ n'ait pour dénominateur une fonction de degré $\frac{n+d+3}{2}$. D'où l'on voit que parmi les fractions convergentes de l'expression

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}}$$

aucune n'aura pour dénominateur une fonction de degré $\frac{n+1}{2}$.

§ 56. D'après cela, en répétant sur le développement de

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}}$$

en fraction continue

$$q_0 + \cfrac{2h}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \cdots}}$$

ce que nous avons fait dans les paragraphes 47, 48, 49 avec le développement de

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$$

en fraction continue

$$q_0 - \cfrac{h^2}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \cdots}}$$

on reconnait aisément que la valeur $L$ doit vérifier au moins l'une de ces équations:

$$G_0 = 0,\ G_1 = 0, \ldots . G_{\frac{n-1}{2}} = 0,$$

où $G_0, G_1, \ldots . G_{\frac{n-1}{2}}$ sont les coefficients de $\frac{1}{x}$ dans les $\frac{n+1}{2}$ premiers quotients complets de

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}} = q_0 + \cfrac{2h}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \cdots}}$$

D'autre part, si l'équation

$$G_\sigma = 0$$

est la première parmi

$$G_0 = 0,\ G_1 = 0, \ldots . G_{\frac{n-1}{2}} = 0,$$

qui a lieu pour $L = L_0$, et qu'on fasse

$$\frac{M}{N} = q_0 + \cfrac{2h}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \cdots - \cfrac{h^2}{q_\sigma}}},$$

$$\frac{U}{V} = \frac{(u - L_0)(x - h) M^2 - (u + L_0)(x + h) N^2}{(x - h) M^2 - (x + h) N^2}, \tag{31}$$

en traitant cette valeur de $\frac{U}{V}$ de la même manière que celle donnée par la formule (24), on trouve qu'elle est de la forme

$$\frac{p' x^{n-l-1} + p'' x^{n-l-2} + \ldots + p^{(n-l-1)} x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)} x^l + p^{(n-l+2)} x^{l-1} + \ldots + p^{(n)} x + p^{(n+1)}}$$

et que sa différence avec $u$, depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, reste comprise dans les limites $-L_0$ et $+L_0$.

D'après cela on conclut, comme dans le cas de $n$ pair (§ 50), que la valeur cherchée de $L$ est numériquement la plus petite parmi celles qui vérifient au moins l'une des équations

$$G_0 = 0,\ G_1 = 0, \ldots G_{\frac{n-1}{2}} = 0,$$

et que cette valeur étant $L = L_0$, et

$$G_\sigma = 0$$

la première des équations

$$G_0 = 0,\ G_1 = 0, \ldots G_{\frac{n-1}{2}} = 0,$$

qu'elle vérifie, la fraction cherchée $\frac{U}{V}$ se détermine par la formule (31), en prenant pour $\frac{M}{N}$ celle des fractions convergentes de

$$\sqrt{\frac{(u + L_0)(x + h)}{(u - L_0)(x - h)}} = q_0 + \cfrac{2h}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \cdots}}$$

qui correspond au dénominateur $q_\sigma$.

C'est ainsi qu'on parvient à déterminer la valeur de la constante $L$ et de la fraction cherchée $\frac{U}{V}$ dans le cas de $n$ impair.

## XVII.

§ 57. Nous chercherons maintenant à simplifier la détermination de $L$ et de $\frac{U}{V}$ dans le cas de $n$ impair, comme nous l'avons fait (section XV) pour le cas de $n$ pair, et on verra qu'en définitive la détermination de $L$ et de $\frac{U}{V}$ dans ce cas ne diffère point de celle que nous avons trouvée pour le cas de $n$ pair.

La fonction $u$ étant de degré $n-l$, les expressions

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}},\quad \sqrt{\frac{x+h}{x-h}}$$

ne diffèrent entre elles que par les termes de l'ordre $\frac{1}{x^{n-l}}$ et moins élevés. D'où il suit que pour les développements de $\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}}$ et $\sqrt{\frac{x+h}{x-h}}$ on trouvera la même fraction continue, si l'on ne pousse leurs développements au-delà de la limite, pour laquelle elles s'expriment par les fractions continues avec l'exactitude jusqu'à $\frac{1}{x^{n-l}}$. Or, puisque l'on trouve

$$\sqrt{\frac{x+h}{x-h}} = 1 + \cfrac{2h}{2x - h - \cfrac{h^2}{2x - \cfrac{h^3}{2x - \cdots}}}$$

et que cette fraction continue ne donne pas la valeur de $\sqrt{\frac{x+h}{x-h}}$ exacte jusqu'à $\frac{1}{x^{n-l}}$, si l'on conserve $\frac{n+1}{2}-k$ de ses dénominateurs, $k$ étant la partie entière de $\frac{l+3}{2}$, il est clair que dans le développement

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}} = q_0 + \cfrac{2h}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \cdots}}$$

on aura

$$(32)\qquad q_0 = 1,\ q_1 = 2x - h,\ q_2 = 2x, \ldots q_{\frac{n+1}{2}-k} = 2x.$$

D'où nous concluons que les fractions convergentes de

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}} = q_0 + \cfrac{2h}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \cdots}}$$

qui correspondent aux dénominateurs

$$q_{\frac{n+1}{2}-k}, \quad q_{\frac{n+1}{2}-k-1}$$

seront

$$\frac{P^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)}}{Q^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)}}, \quad \frac{P^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)}}{Q^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)}},$$

si l'on dénote par

$$\frac{P^{(0)}}{Q^{(0)}}, \quad \frac{P^{(1)}}{Q^{(1)}}, \quad \frac{P^{(2)}}{Q^{(2)}}, \ldots.$$

la suite des fractions convergentes de

$$\sqrt{\frac{x+h}{x-h}} = q_0 + \cfrac{2h}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \ldots}},$$

pour la détermination desquelles on trouve aisément ces formules:

$$(33)\quad \begin{cases} P^{(\lambda)} = \dfrac{\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} + \sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{2\lambda+1} + \left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} - \sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{2\lambda+1}}{2\sqrt{\frac{x-h}{2}}}, \\[2ex] Q^{(\lambda)} = \dfrac{\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} + \sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{2\lambda+1} - \left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} - \sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{2\lambda+1}}{2\sqrt{\frac{x+h}{2}}} \text{ *)}. \end{cases}$$

§ 58. Suivant ce que nous avons montré sur les fractions convergentes de

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}}$$

qui correspondent aux dénominateurs

$$q_{\frac{n+1}{2}-k}, \quad q_{\frac{n+1}{2}-k-1},$$

et en faisant

$$Z = \cfrac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k+1} - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k+2} - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k+3} - \ldots}}}$$

---

*) On vérifie facilement ces expressions de $P^{(\lambda)}$, $Q^{(\lambda)}$, en remarquant qu'elles donnent des valeurs exactes dans le cas de $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, et qu'elles vérifient les équations $P^{(\lambda)} = 2x\,P^{(\lambda-1)} - h^2 P^{(\lambda-2)}$, $Q^{(\lambda)} = 2x\,Q^{(\lambda-1)} - h^2 Q^{(\lambda-2)}$, suivant la forme de la fraction continue $1 + \cfrac{2h}{2x - h - \cfrac{h^2}{2x - \cfrac{h^2}{2x - \ldots}}}$

nous trouvons cette expression de $\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}}$:

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}} = q_0 + \cfrac{2h}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \cdots \cfrac{}{\cdots - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k} - Z}}}} = \frac{P^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)} - ZP^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)}}{Q^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)} - ZQ^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)}}.$$

D'où résulte cette valeur de $Z$:

$$Z = \frac{Q^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)}\sqrt{(u+L)(x+h)} - P^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)}\sqrt{(u-L)(x-h)}}{Q^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)}\sqrt{(u+L)(x+h)} - P^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)}\sqrt{(u-L)(x-h)}},$$

qui, après la substitution des valeurs de

$$P^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)},\quad P^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)},\quad Q^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)},\quad Q^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)},$$

en vertu des formules (33), devient

$$\frac{\sqrt{u+L}\left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}}+\sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{n-2k+2} - \left(\sqrt{\frac{x-h}{2}}-\sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{n-2k+2}\right] - \sqrt{u-L}\left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}}+\sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{n-2k+2} + \left(\sqrt{\frac{x-h}{2}}-\sqrt{\frac{x+h}{2}}\right.\right.}{\sqrt{u+L}\left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}}+\sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{n-2k} - \left(\sqrt{\frac{x-h}{2}}-\sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{n-2k}\right] - \sqrt{u-L}\left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}}+\sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{n-2k} + \left(\sqrt{\frac{x-h}{2}}-\sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{n-}\right.}$$

En remarquant que $n$ est un nombre impair et que

$$\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}}+\sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{\lambda}\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}}-\sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{\lambda} = (-h)^{\lambda},$$

on reconnaît aisément que cette valeur de $Z$ peut être représentée ainsi:

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-h^2}}\,\frac{\sqrt{u+L}\left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}}+\sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{2n-4k+4} + h^{n-2k+2}\right] - \sqrt{u-L}\left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}}+\sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{2n-4k+4} - h^{n-2k+2}\right]}{\sqrt{u+L}\left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}}+\sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{2n-4k} + h^{n-2k}\right] - \sqrt{u-L}\left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}}+\sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{2n-4k} - h^{n-2k}\right]}$$

et comme

$$\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}}+\sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^2 = x+\sqrt{x^2-h^2},$$

cette expression de $Z$ se réduit à

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-h^2}}\,\frac{L\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{n-2k+2} + h^{n-2k+2}\left(u+\sqrt{u^2-L^2}\right)}{L\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{n-2k} + h^{n-2k}\left(u+\sqrt{u^2-L^2}\right)},$$

ce qui est identique, au signe de $L$ près, avec la valeur de $Z$ dans le cas de $n$ pair (§ 53).

§ 59. En dénotant par

$$g_1,\ g_2,\ g_3, \ldots .$$

les coefficients de $\frac{1}{x}$ dans les quotients complets de

$$Z = \cfrac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k+1} - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k+2} - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k+3} - \ldots}}}$$

nous trouvons qu'on aura

$$G_{\frac{n+1}{2}-k} = g_1,\ G_{\frac{n+1}{2}-k+1} = g_2, \ldots . G_{\frac{n-1}{2}} = g_k,$$

où

$$G_{\frac{n+1}{2}-k},\ G_{\frac{n+1}{2}-k+1}, \ldots . G_{\frac{n+1}{2}},$$

suivant la notation admise dans le § 56, désignent les coefficients de $\frac{1}{x}$ dans les quotients complets de

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}} = q_0 + \cfrac{2h}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \ldots}}$$

quand on s'arrête aux dénominateurs $q_{\frac{n+1}{2}-k},\ q_{\frac{n+1}{2}-k+1}, \ldots . q_{\frac{n+1}{2}}$.

De plus, en vertu des valeurs de

$$q_0,\ q_1,\ q_2, \ldots . q_{\frac{n+1}{2}-k},$$

trouvées plus haut (§ 57), on reconnaît aisément que $G_0, G_1, G_2, \ldots . G_{\frac{n-1}{2}-k}$, les coefficients de $\frac{1}{x}$ dans les $\frac{n+1}{2} - k$ premiers quotients complets de

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}} = q_0 + \cfrac{2h}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \ldots}}$$

ont ces valeurs:

$$G_0 = h,\ G_1 = -\frac{h^2}{2},\ G_1 = -\frac{h^2}{2}, \ldots . G_{\frac{n-1}{2}-k} = -\frac{h^2}{2}.$$

D'après cela il est clair que parmi les équations

$$G_0 = 0,\ G_1 = 0,\ G_2 = 0, \ldots . G_{\frac{n-1}{2}} = 0,$$

qui d'après le § 56 déterminent $L = L_0$, les $\frac{n+1}{2} - k$ premières ne peuvent être satisfaites, et les dernières se réduisent à

$$g_1 = 0, \; g_2 = 0, \ldots . g_k = 0,$$

comme dans le cas de $n$ pair; seulement $L$, en vertu de ce que nous avons vu sur l'expression de $Z$, sera remplacée par $\frac{n}{2} - L$.

§ 60. En passant à la détermination de la fraction cherchée $\frac{U}{V}$, supposons que

$$g_i = 0$$

soit la première des équations

$$g_1 = 0, \; g_2 = 0, \ldots . g_k = 0,$$

qu'on vérifie par $L = L_0$. Les quantités

$$G_0, \; G_1, \; G_2, \ldots . G_{\frac{n-1}{2} - k},$$

en vertu de ce que nous venons de voir, ne pouvant s'annuler, et puisque

$$G_{\frac{n+1}{2} - k} = g_1, \; G_{\frac{n+1}{2} - k + 1} = g_2, \ldots . G_{\frac{n-1}{2}} = g_k,$$

dans cette hypothèse l'équation

$$G_{\frac{n+1}{2} - k + i - 1} = 0$$

sera la première parmi

$$G_0 = 0, \; G_1 = 0, \; G_2 = 0, \ldots . G_{\frac{\ \ -1}{2}} = 0,$$

qui aura lieu pour $L = L_0$. Mais dans ce cas, en prenant

$$\sigma = \frac{n+1}{2} - k + i - 1 = \frac{n-1}{2} - k + i,$$

nous trouvons d'après (31) que la fraction cherchée $\frac{U}{V}$ se détermine ainsi:

$$\frac{U}{V} = \frac{(u - L_0)(x - h) M^2 - (u + L_0)(x + h) N^2}{(x - h) M^2 - (x + h) N^2},$$

où

$$\frac{M}{N} = q_0 + \cfrac{2h}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \cdots - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n-1}{2} - k + i}}}}.$$

D'autre part, comme les fractions convergentes de

$$q_0 + \cfrac{2h}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \ldots}}$$

qui correspondent aux dénominateurs

$$q_{\frac{n+1}{2}-k},\ q_{\frac{n+1}{2}-k-1}$$

sont

$$\frac{P^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)}}{Q^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)}},\quad \frac{P^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)}}{Q^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)}};$$

et que la valeur précédente de $\frac{M}{N}$ peut être mise sous la forme

$$\frac{M}{N} = q_0 + \cfrac{2h}{q_1 - \cfrac{h^2}{q_2 - \ldots \cfrac{}{\ldots - \cfrac{1}{q_{\frac{n+1}{2}-k} - \frac{M_i}{N_i}}}}},$$

en désignant par $\frac{M_i}{N_i}$ la $i^{\text{ème}}$ fraction convergente de

$$Z = \cfrac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k+1} - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k+2} - \cfrac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k+3} - \ldots}}}$$

nous concluons qu'on aura

$$M = P^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)} N_i - P^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)} M_i,$$
$$N = Q^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)} N_i - Q^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)} M_i.$$

Mais en vertu de ces valeurs de $M$ et $N$ l'expression précédente de $\frac{U}{V}$ devient

$$\frac{(u-L_0)(x-h)\left[P^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)} N_i - P^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)} M_i\right]^2 - (u+L_0)(x+h)\left[Q^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)} N_i - Q^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)} M_i\right]^2}{(x-h)\left[P^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)} N_i - P^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)} M_i\right]^2 - (x+h)\left[Q^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)} N_i - Q^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)} M_i\right]^2}$$

D'où, par la substitution des valeurs de

$$P^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)},\quad P^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)},\quad Q^{\left(\frac{n+1}{2}-k\right)},\quad Q^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)}$$

d'après (33), on obtient les mêmes expressions de $U$ et $V$, que dans le cas de $n$ pair (§ 54), et dans lesquelles, conformément à ce que nous avons vu (§ 59) sur les équations qui déterminent $L = L_0$, la quantité $L_0$ se trouve remplacée par $-L_0$.

Ainsi on parvient à reconnaître que les résultats définitifs, obtenus dans la section XV sur la détermination de la quantité $L_0$ et de la fraction $\frac{U}{V}$ pour le cas de *n pair*, sont applicables aussi au cas de *n impair*.

## XVIII.

§ 61. Pour montrer une application de ce que nous avons exposé, supposons qu'il s'agisse de trouver une fraction de la forme

$$\frac{p' x^{n-2} + p'' x^{n-3} + \ldots + p^{(n-2)} x + p^{(n-1)}}{p^{(n)} x + p^{(n+1)}}$$

qui, depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, s'écarte le moins possible du polynôme donné

$$x^{n-1} + A x^{n-2} + B x^{n-3} + \ldots.$$

Comme on a dans ce cas

$$l = 1,$$

on trouve que $k$, qui désigne la partie entière de $\frac{l+3}{2}$, est égal à 2. Pour cette valeur de $k$, et en prenant

$$u = x^{n-1} + A x^{n-2} + B x^{n-3} + \ldots,$$

nous trouvons par le développement en séries

$$u + \sqrt{u^2 - L^2} = 2 x^{n-1} + 2 A x^{n-2} + 2 B x^{n-3} + \ldots,$$

$$(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2} = (x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2} = 2^{n-2} \left(x^{n-2} - \frac{n-2}{4} h^2 x^{n-4} + \ldots\right),$$

$$(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k} = (x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-4} = 2^{n-4} \left(x^{n-4} - \frac{n-4}{4} h^2 x^{n-6} + \ldots\right).$$

En portant ces valeurs de

$$u + \sqrt{u^2 - L^2}, \quad (x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2}, \quad (x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k}$$

dans la formule

$$Z = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - h^2}} \, \frac{L (x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2} - h^{n-2k+2} (u + \sqrt{u^2 - L^2})}{L (x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k} - h^{n-2k} (u + \sqrt{u^2 - L^2})},$$

et en faisant

$$k = 2,$$

on a

$$Z = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - h^2}} \cdot \frac{2^{n-2} L \left[x^{n-2} - \frac{n-2}{4} h^2 x^{n-4} + \ldots\right] - h^{n-2} \left[2x^{n-1} + 2Ax^{n-2} + \ldots\right]}{2^{n-4} L \left[x^{n-4} - \frac{n-4}{4} h^2 x^{n-6} + \ldots\right] - h^{n-4} \left[2x^{n-1} + 2Ax^{n-2} + \ldots\right]}$$

$$= \frac{h^2 x^{n-1} + \left[h^2 A - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L\right] x^{n-2} + h^2 B x^{n-3} + \ldots}{2x^n + 2Ax^{n-1} - \frac{h^2}{2} x^{n-2} + 2Bx^{n-2} + \ldots}.$$

Cette valeur de $Z$, développée en fraction continue, nous donne

$$Z = \cfrac{h^2}{2x + \left(\frac{2}{h}\right)^{n-2} L + \cfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{h}\right)^{2n-4} L^2 - A\left(\frac{2}{h}\right)^{n-2} L - \frac{h^2}{2}}{x + \ldots}}.$$

D'où résultent ces fractions convergentes de $Z$:

$$\frac{M_1}{N_1} = \frac{0}{1}, \quad \frac{M_2}{N_2} = \frac{h^2}{2x + \left(\frac{2}{h}\right)^{n-2} L},$$

et en cherchant les valeurs de $g_1, g_2, \ldots$, qui désignent d'après notre notation les coefficients de $\frac{1}{x}$ dans les quotients complets de $Z$, nous trouvons

$$g_1 = \frac{h^2}{2}, \quad g_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{h}\right)^{2n-4} L^2 - A\left(\frac{2}{h}\right)^{n-2} L - \frac{h^2}{2}.$$

En passant à la détermination de $L = L_0$, remarquons que, d'après le § 53, dans le cas dont il s'agit, le nombre $k$ étant égal à 2, la valeur de $L = L_0$ doit vérifier au moins l'une de ces équations:

$$g_1 = \frac{h^2}{2} = 0, \quad g_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{h}\right)^{2n-4} L^2 - A\left(\frac{2}{h}\right)^{n-2} L - \frac{h^2}{2} = 0.$$

La première de ces équations est impossible; on n'a qu'à chercher les solutions de la dernière. Or, en résolvant l'équation

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{h}\right)^{2n-4} L^2 - A\left(\frac{2}{h}\right)^{n-2} L - \frac{h^2}{2} = 0$$

on trouve ces deux valeurs de $L$:

$$L = \left(\frac{h}{2}\right)^{n-2} \left(A + \sqrt{A^2 + h^2}\right),$$

$$L = \left(\frac{h}{2}\right)^{n-2} \left(A - \sqrt{A^2 + h^2}\right).$$

De ces valeurs de $L$ celle qui a le radical $\sqrt{A^2+h^2}$ avec le signe contraire à celui de $A$ sera la plus petite numériquement. Donc, en vertu de ce que nous avons montré dans le § 53 sur la détermination de $L=L_0$, on aura

$$L_0=\left(\frac{h}{2}\right)^{n-2}\left(A\pm\sqrt{A^2+h^2}\right),$$

en supposant qu'on prend le radical avec le signe contraire à celui de $A$.

Puisque cette valeur de $L_0$ ne vérifie que la seconde des deux équations

$$g_1=\frac{h^2}{2}=0,$$

$$g_2=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{h}\right)^{2n-4}L^2-A\left(\frac{2}{h}\right)^{n-2}L-\frac{h^2}{2}=0,$$

on prendra

$$i=2,$$

et parceque

$$\frac{M_2}{N_2},$$

la seconde fraction convergente de $Z$, est égale à

$$\frac{h^2}{2x+\left(\frac{2}{h}\right)^{n-2}L},$$

on conclut que

$$M_i=h^2;\quad N_i=2x+\left(\frac{2}{h}\right)^{n-2}L.$$

D'où, en vertu de ce que nous avons montré dans le § 54 sur la détermination de $\frac{U}{V}$, et en remarquant que $k=2$, nous parvenons à ces valeurs de $U$ et $V$:

$$\begin{aligned}U= &\left[h^{n-2}u-L_0\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{n-2}+(x-\sqrt{x^2-h^2})^{n-2}}{2}\right]\left[2x+\left(\frac{2}{h}\right)^{n-2}L_0\right]^2\\ &-2\left[h^{n-4}xu-L_0\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{n-3}+(x-\sqrt{x^2-h^2})^{n-3}}{2}\right]\left[2x+\left(\frac{2}{h}\right)^{n-2}L_0\right]h^2\\ &+\left[h^{n-4}u-L_0\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{n-4}+(x-\sqrt{x^2-h^2})^{n-4}}{2}\right]h^4,\\ V= &\,h^{n-4}\left[h^2\left(2x+\left(\frac{2}{h}\right)^{n-2}L_0\right)^2-2h^2x\left(2x+\left(\frac{2}{h}\right)^{n-2}L_0\right)+h^4\right]\\ = &\,2^{n-1}L_0x+h^n+\frac{2^{2n-4}L_0^2}{h^{n-2}};\end{aligned}$$

où

$$u=x^{n-1}+Ax^{n-2}+Bx^{n-3}+\ldots.,$$

$$L_0=\left(\frac{h}{2}\right)^{n-2}\left(A\pm\sqrt{A^2+h^2}\right).$$

Tels sont les termes de la fraction

$$\frac{U}{V} = \frac{p' x^{n-2} + p'' x^{n-3} + \ldots + p^{(n-2)} x + p^{(n-1)}}{p^{(n)} x + p^{(n+1)}},$$

qui, parmi toutes les autres de la même forme, depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, s'écarte le moins de $u = x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \ldots\ldots$

§ 62. La valeur de $L_0$ montre que pour la fraction $\frac{U}{V}$, ainsi déterminée, les limites des valeurs de la différence

$$u - \frac{U}{V},$$

depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, sont

$$-\left(\frac{h}{2}\right)^{n-2}\left(A \pm \sqrt{A^2 + h^2}\right), \quad +\left(\frac{h}{2}\right)^{n-2}\left(A \pm \sqrt{A^2 + h^2}\right),$$

en prenant le radical avec le signe contraire à celui de $A$. Comme ces limites pour toutes les autres fractions $\frac{V}{U}$ de la forme

$$\frac{p' x^{n-2} + p'' x^{n-3} + \ldots + p^{(n-2)} x + p^{(n-1)}}{p^{(n)} x + p^{(n+1)}}$$

sont plus étendues, et que la différence

$$u - \frac{U}{V} = x^{n-1} + Ax^{n-2} + \ldots - \frac{p' x^{n-2} + p'' x^{n-3} + \ldots + p^{(n-2)} x + p^{(n-1)}}{p^{(n)} x + p^{(n+1)}},$$

où $p', p'' \ldots p^{(n-2)}, p^{(n-1)}, p^{(n)}, p^{(n+1)}$ sont des quantités arbitraires, peut représenter toutes les fonctions de la forme

$$x^{n-1} + A x^{n-2} + A' x^{n-3} + \ldots + A^{(n-2)} + \frac{A^{(n-1)}}{x - \alpha},$$

il en résulte ce théorème:

## Théorème 20.

*La fonction*

$$x^{n-1} + A x^{n-2} + A' x^{n-3} + \ldots + A^{(n-2)} + \frac{A^{(n-1)}}{x - \alpha},$$

*depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, ne peut rester numériquement au-dessous de*

$$\left(\frac{h}{2}\right)^{n-2}\left(A \pm \sqrt{A^2 + h^2}\right),$$

*où l'on prend le radical avec le signe contraire à celui de $A$.*

§ 63. En cherchant de la même manière la fraction

$$\frac{p' x^{n-3} + p'' x^{n-4} + \ldots + p^{(n-3)} x + p^{(n-2)}}{p^{(n-1)} x^2 + p^{(n)} x + p^{(n+1)}},$$

qui, parmi toutes les autres de la même forme, s'écarte le moins de

$$u = x^{n-2} + B x^{n-4} + C x^{n-5} + \ldots,$$

entre $x = -h$ et $x = +h$, on prendra

$$l = 2,$$

et comme pour cette valeur de $l$ la quantité $\frac{l+3}{2}$ est égale à $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, on fera

$$k = 2.$$

Or, en prenant

$$u = x^{n-2} + B x^{n-4} + C x^{n-5} + \ldots,$$
$$k = 2,$$

dans l'expression de $Z$ (§ 53), on trouve

$$Z = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - h^2}} \, \frac{2^{n-2} L\left(x^{n-2} - \frac{n-2}{4} h^2 x^{n-4} + \ldots\right) - 2 h^{n-2} (x^{n-2} + B x^{n-4} + \ldots)}{2^{n-4} L\left(x^{n-4} - \frac{n-4}{4} h^2 x^{n-6} + \ldots\right) - 2 h^{n-4} (x^{n-2} + B x^{n-4} + \ldots)}$$

$$= \frac{\left[h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L\right] x^{n-2} + h^2 \left[B + \frac{n-2}{2}\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L\right] x^{n-4} + \ldots}{2 x^{n-1} + \left(2B - \frac{h^2}{2} - \left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L\right) x^{n-3} + \ldots}.$$

Cette valeur de $Z$, développée en fraction continue, nous donne

$$Z = \cfrac{1}{\cfrac{2x}{h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L} + \cfrac{2\left(\frac{2}{h}\right)^{2n-8} L^2 - \left(4B + (n-2) h^2\right)\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L - \frac{h^4}{2}}{\left(h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L\right)^2 x + \ldots}}$$

D'où résulte cette suite des fractions convergentes de $Z$:

$$\frac{M_1}{N_1} = \frac{0}{1}, \quad \frac{M_2}{N_2} = \frac{h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L}{2x}, \ldots.$$

et ces valeurs de $g_1$, $g_2$, ....:

$$g_1 = h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L,$$

$$g_2 = \frac{2\left(\frac{2}{h}\right)^{2n-8} L^2 - \left(4B + (n-2)h^2\right)\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L - \frac{h^4}{2}}{\left(h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L\right)^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

qui désignent pour nous les coefficients de $\frac{1}{x}$ dans les quotients complets.

Comme $k = 2$, on cherchera la valeur $L = L_0$ parmi les racines de ces deux équations:

$$g_1 = h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L = 0,$$

$$g_2 = \frac{2\left(\frac{2}{h}\right)^{2n-8} L^2 - \left(4B + (n-2)h^2\right)\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L - \frac{h^4}{2}}{\left(h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L\right)^2} = 0.$$

La première de ces deux équations donne

$$L = 2\left(\frac{h}{2}\right)^{n-2},$$

la seconde

$$L = \left(\frac{h}{2}\right)^{n-4}\left[B + \frac{n-2}{4}h^2 + \sqrt{\left(B + \frac{n-2}{4}h^2\right)^2 + \frac{h^4}{4}}\right],$$

$$L = \left(\frac{h}{2}\right)^{n-4}\left[B + \frac{n-2}{4}h^2 - \sqrt{\left(B + \frac{n-2}{4}h^2\right)^2 + \frac{h^2}{4}}\right].$$

Dans le cas particulier de $B = -\frac{n-2}{4}h^2$, ces trois valeurs, au signe près, sont égales. Mais en faisant abstraction de ce cas, nous trouvons que la plus petite numériquement est celle qu'on trouve d'après la formule

$$L = \left(\frac{h}{2}\right)^{n-4}\left[B + \frac{n-2}{4}h^2 \pm \sqrt{\left(B + \frac{n-2}{4}h^2\right)^2 + \frac{h^4}{4}}\right],$$

en prenant le radical avec le signe contraire à celui de $B + \frac{n-2}{4}h^2$.

D'où, d'après le § 53, nous concluons

$$L_0 = \left(\frac{h}{2}\right)^{n-4}\left[B + \frac{n+2}{4}h^2 \pm \sqrt{\left(B + \frac{n-2}{4}h^2\right)^2 + \frac{h^4}{4}}\right].$$

Cette valeur de $L_0$, sauf le cas de $B = -\frac{n-2}{4}h^2$, ne vérifie que la seconde des équations

$$g_1 = h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L = 0,$$

$$g_2 = \frac{2\left(\frac{2}{h}\right)^{2n-8} L^2 - \left(4B + (n-2)h^2\right)\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L - \frac{h^4}{2}}{\left(h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L\right)^2} = 0.$$

Donc, on prendra

$$i = 2, \quad \frac{M_i}{N_i} = \frac{M_2}{N_2},$$

et comme nous venons de trouver

$$\frac{M_2}{N_2} = \frac{h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L}{2x},$$

on aura

$$M_i = h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L,$$

$$N_i = 2x.$$

Pour ces valeurs de $M_i$, $N_i$, et en remarquant que $k = 2$, les expressions de $U$ et $V$ que nous avons trouvées dans le § 54 donnent

$$\begin{aligned}
U = & \left[h^{n-2} u - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2}}{2}\right] \cdot 4x^2 \\
& -2\left[h^{n-4} xu - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-3} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-3}}{2}\right] \cdot 2x\left(h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L_0\right) \\
& + \left[h^{n-4} u - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-4} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-4}}{2}\right] \left(h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L_0\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V = & \; h^{n-4}\left[4h^2x^2 - 4\left(h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L_0\right)x^2 + \left(h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L_0\right)^2\right] \\
= & \; h^{n-4}\left[8\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L_0 x^2 + \left(h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L_0\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Tels sont les termes de la fraction

$$\frac{U}{V}$$

qui, parmi toutes celles de la forme

$$\frac{p' x^{n-3} + p'' x^{n-4} + \ldots + p^{(n-3)} x + p^{(n-2)}}{p^{(n-1)} x^2 + p^{(n)} x + p^{(n+1)}},$$

depuis $x = -h$ jusqu'à $x = +h$, s'écarte le moins de

$$u = x^{n-2} + Bx^{n-4} + Cx^{n-5} + \ldots.$$

Nous allons examiner maintenant le cas de

$$B = -\frac{n-2}{4} h^2,$$

que nous avons laissé de côté.

D'après les valeurs de $g_1$, $g_2$, trouvées plus haut, on a, dans le cas de $B = -\frac{n-2}{4} h^2$,

$$g_1 = h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L,$$

$$g_2 = -\frac{1}{2} \frac{h^2 + 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L}{h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L}.$$

Comme les racines des équations

$$g_1 = h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L = 0,$$

$$g_2 = -\frac{1}{2} \frac{h^2 + 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L}{h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L} = 0$$

sont

$$L = 2\left(\frac{h}{2}\right)^{n-2},$$

$$L = -2\left(\frac{h}{2}\right)^{n-2},$$

valeurs, au signe près, égales, nous trouvons deux valeurs de $L = L_0$:

$$L_0 = -2\left(\frac{h}{2}\right)^{n-2},$$

$$L_0 = 2\left(\frac{h}{2}\right)^{n-2}.$$

En prenant la première valeur de $L_0$, nous remarquons qu'elle ne vérifie que la seconde des équations

$$g_1 = h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L = 0,$$

$$g_2 = -\frac{1}{2} \frac{h^2 + 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L}{h^2 - 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L} = 0.$$

Donc, on aura

$$i = 2, \quad \frac{M_i}{N_i} = \frac{M_2}{N_2},$$

et par là on trouve pour $U$ et $V$ les mêmes expressions que dans le cas général où l'on a aussi $i = 2$.

En passant à l'autre valeur de $L = L_0$, nous remarquons qu'elle vérifie la première des équations

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0,$$

d'où il suit

$$i=1,\quad \frac{M_i}{N_i}=\frac{M_1}{N_1},$$

et comme

$$\frac{M_1}{N_1}=\frac{0}{1},$$

on trouve

$$M_i=0,\quad N_i=1.$$

Pour ces valeurs de $M_i$, $N_i$, et en observant que

$$k=2,$$

nous trouvons, d'après les expressions de $U$ et $V$ données dans le § 54,

$$U=h^{n-2}u=L_0\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{n-2}+(x-\sqrt{x^2-h^2})^{n-2}}{2},$$
$$V=h^{n-2}.$$

D'où résulte la même valeur de $\frac{U}{V}$, qu'on trouve d'après les formules du cas général, en prenant $L_0=-2\left(\frac{h}{2}\right)^{n-2}$.

§ 64. En vertu de ce que nous avons vu relativement à $L_0$ qui détermine les limites des valeurs de la différence

$$u-\frac{U}{V}$$

entre $x=-h$ et $x=+h$ et en remarquant que

$$u-\frac{U}{V}=x^{n-2}+Bx^{n-4}+Cx^{n-5}+\ldots-\frac{p'x^{n-3}+p''x^{n-4}+\ldots+p^{(n-3)}x+p^{(n-2)}}{p^{(n-1)}x^2+p^{(n)}x+p^{(n+1)}}$$

peut représenter toutes les fonctions de la forme

$$x^{n-2}+Bx^{n-4}+B'x^{n-5}+\ldots+B^{(n-4)}+\frac{B^{(n-3)}}{x-\alpha}+\frac{B^{(n-2)}}{x-\beta},$$

nous parvenons à ce théorème:

## Théorème 21.

*La fonction*

$$x^{n-2}+Bx^{n-4}+B'x^{n-5}+\ldots+B^{(n-4)}+\frac{B^{(n-3)}}{x-\alpha}+\frac{B^{(n-2)}}{x-\beta},$$

*depuis* $x=-h$ *jusqu'à* $x=+h$, *ne peut rester numériquement au-dessous de*

$$\left(\frac{h}{2}\right)^{n-4}\left[B+\frac{n-2}{4}h^2\pm\sqrt{\left(B+\frac{n-2}{4}h^2\right)^2+\frac{h^4}{4}}\right],$$

*où l'on prend le radical avec le signe contraire à celui de la quantité* $B+\frac{n-2}{4}h^2$.