Grünwald Géza élete és matematikai munkássága.[1]

Írta: Turán Pál

Grünwald Gézáról először még 1943-ban kezdtem írni, kevéssel azután, hogy megtudtam, hogy nincs többé. Nehéz volt elhinnem, hogy mikor 1942 áprilisában egy társulati előadóülésen találkoztunk és búcsúzásnál megemlítette, hogy munkaszolgálati behívót kapott, ez utolsó találkozásunk volt. A fiatalabb embert megdöbbenti a halál, de igazán nem tudja realizálni azt; magam is így voltam akkor, azt is reméltem, talán tévedés az egész, az írás hamar el is akadt. Azóta legalábbis Budapest ostrománál, a halál mindnyájunk személyes ismerőse lett; az idő múltával a bizonyság jelei is meggyőző erejűekké szaporodtak. Megtudtuk, hogy a század, melybe behívták, büntetőszázad volt, egy állítólagos győri szabotázs retorziójaként állították össze ártatlanokból, baloldali gondolkozásuk miatt nyilvántartottakból. A teljes hadilétszámú fegyvertelen századból pár hónapon belül 5 ember maradt meg, közöttük Kossa István, aki személy szerint is jóbarátságban volt Grünwald Gézával és vele volt haláláig. Szerinte és a hivatalos értesítés szerint szeptember 7.-én halt meg Grünwald Géza nem egész 32 éves korában. Elbeszélése borzasztóan hatott rám; valahányszor csak eszembe jutott a megemlékező cikk, ezen rémképek oly intenzíven tolultak elém, hogy alig tudtam elhajtani őket tudatomból. E részleteket itt ne érje szó; csak felháborodás és megvetés illetheti azokat, akik haláláért felelősek.

Grünwald Géza 1910. október 18.-án született Budapesten. Apja szobafestő volt, aki szűkös keresetéből úgy őt, mint Gyula öccsét taníttatta. Ugyanabba a gimnáziumba járt, melybe Erdős Pál és hamarosan összebarátkoztak egymással. Sokat sétáltak együtt a Városligetben, versenyezve egymással a fejszámolásban és sakkozásban, melyhez Grünwaldnak különös érzéke volt, későbbi szegedi tanulóévei egyikében legyőzte Szeged akkori sakkbajnokát. Erdős kitűnő pedagógus édesapja, Erdős Lajos, aki ugyanezen gimnáziumban tanított, hamar figyelmes lett Grünwaldra és a szellemi segítés mellett anyagilag is támogatta őt, amire szülei eléggé rászorultak. 1927-ben tüdőbeteg lett, Erdős Lajos juttatta be egy tüdőbeteg szanatóriumba, ahol egy évig feküdt. Így csak 1929-ben érettségizett, elégséges eredménnyel. Az egyetemre nem nyervén felvételt, Olaszországban próbált tanulni nagy nélkülözések közepette. 1931-ben Erdős Lajos felhívta rá Haar Alfréd figyelmét, aki fogadta őt

[1] Előadva a Bolyai János Mat. Társulat 1955. ápr. 1-i ülésén.

Grünwald Géza

és a beszélgetés után felvették a szegedi egyetemre. Itt másodéves kora óta, 1933-tól kezdve, négy éven át minden évben elnyerte a matematikai pályatételre kitűzött egyetemi pályadíjat, utolsó évben Nagy Bélával együtt, az interpolációról írott pályamunkáival. 1932—33 tanévi pályamunkájának jeligéje, azévben elhalt tanárának, Haar Alfrédnek emlékére „Haar“ volt; a többieké rendre „Beta“, „Gamma“ ill. „Delta“. Az utolsó pályamunkája egyben doktori disszertációja is volt; doktori szigorlatát gyakorlóéve alatt 1935. december 4.-én tette le. 1936 szeptemberében mat.-fiz.-szakos tanári diplomát szerzett. Utána katonai kiképzésben vett részt; később több alkalommal vonult be hadgyakorlatra, 1941-től kezdve már csak fegyvernélküli szolgálatra. 1938-ban megnősült; felesége, Szilágyi Anna hallgatótársa volt. Egyetlen gyermek maradt utána, Éva lánya. 1937 szeptemberében Bay Zoltán mellett az Egyesült Izzóban kutatómatematikusi állást kapott; a biztosítási matematikusok mellett talán ő volt hazánkban az első üzemben alkalmazott matematikus. Tragikus sors, hogy épp ezen alkalmaztatás, mely a sok nélkülözésteli év után egy nyugodtabb élet lehetőségét megadni látszott, vált végzetévé.

Grünwald Géza matematikai érdeklődése igen széleskörű volt; a szegedi egyetem sokirányú előadásairól sokat mesélt itt pesti baráti körének, tele lelkesedéssel és érdeklődéssel. Mégis *aktív* érdeklődési köre egy olyan témakör volt, melyet Szegeden nem műveltek; ez a ma S. Bernstein kezdeményezése nyomán konstruktív függvénytannak nevezett irány volt. Ehhez itt Pesten mi Fejér dolgozatain átjutottunk, lelkes ifjú kör, melyből Gallai Tiborral elsiratóknak maradtunk itt. Ki tudja, hány más lelkes ifjú kör tele érdeklődéssel és ideákkal, pattan szét a világ minden részén, ha az őrültség és gonoszság újra diadalt ül az értelem felett! Sok érdekes kérdésünk merült fel és a fiatal matematikusok mindig és mindenkor örömmel kapcsolódnak egy *körhöz*. Grünwald Géza sem volt kivétel, az egyik levelében explicite áll is; nyaranta eljárt rendszeres heti összejöveteleinkre, melyeket az erszények lapos voltára való tekintettel a városligeti Anonymus szobornál rendeztünk. Szegeden ilyen kör nem volt; ez érthetővé teszi tehát érdeklődési körének ilyen kialakulását. Így még próbálkozásaink egy igen korai stádiumában, a Banach—Steinhaus-féle módszerek ismerete előtt vetődött fel az a kérdés, van-e oly $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$ függvény, hogy ennek a T-matrixhoz tartozó Lagrange-interpolációs polinomjai egy *megszámlálható* ponthalmazon korlátlanok legyenek.[2] Akkoriban előadó talált egy ügyetlen megoldást,

[2] A $[-1, +1]$-ben értelmezett $f(x)$-nek a T-matrixhoz tartozó n-ik Lagrange-interpolációs polinomja azon legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom, mely az $x_{\nu n} = \cos\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ helyeken rendre megegyezik $f(x)$-el. Az $x_{\nu n}$ számok a $T_n(x) = 0$ gyökei, ahol $T_n(\cos\vartheta) = \cos n\vartheta$.

mely a következő bizonyítatlan segédtételen alapult. Ha a $[0, 1]$ köz minden x pontjához e köz véges sok *más* pontja van hozzárendelve, (röviden véges sok, tőle különböző képpont) akkor $[0, 1]$-ben van végtelen sok P_ν pont, melyek egyike sem képe egy másikának. E segédtételt Erdős, Grünwald [6], és Lázár hamar bebizonyították[3]; a kérdés irodalma, mint Fodor Géza szép kandidátusi értekezése mutatja, azóta nagyon kiterjedt, világosan mutatván, hogy nincs oly ügyetlen matematikai megoldás, melyből értő kezek érdekeset ne tudnának kihozni. Grünwaldot ezek vezették azon sokkal nehezebb kérdéshez, vajon van-e oly $[-1, +1]$-ben folytonos $g(x)$ függvény, melynek T-matrixhoz tartozó Lagrange-interpolációs polinomjai *mindenütt* divergensek. A kérdés helyes megvilágításához tudnunk kell a következőket. Mint könnyen verifikálható, a szóban forgó n-ik interpolációs polinom

$$L_n(f)_{x=\cos\vartheta} = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \cos\nu\vartheta$$

alakba írható, ahol $\nu = 1, 2, \ldots, n$-re

$$c_\nu = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cos\nu\frac{2k-1}{2n}\pi,$$

$$c_0 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right).$$

Hasonlítsuk össze ezt $f(\cos\vartheta)$ cosinus-sorának $(n-1)$-ik részletösszegével; ez $\sum_{\nu=0}^{n-1} d_\nu \cos\nu\vartheta$ alakú, ahol

$$d_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\cos\alpha)\,d\alpha \quad \text{és} \quad d_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\cos\alpha)\cos\nu\alpha\,d\alpha$$

$\nu = 1, 2, \ldots, (n-1)$-re. Az együtthatóformulák teljesen analógok, és így felületes szemléletre úgy látszik, hogy az $L_n(f)$ polinomok konvergencia szempontjából úgy viselkednek, mint $f(\cos\vartheta)$ Fourier-cosinussora. Márpedig azon kérdés, hogy egy mindenütt folytonos függvény Fourier-sora divergálhat-e mindenütt, közismerten rendkívül nehéz; Kolmogorov ismert brilliáns példája csak egy L-integrálható függvény létezését biztosítja a kívánt divergenciatulajdonsággal. Annál meglepőbb volt 1935-ben Grünwald azon tétele, hogy a fenti $L_n(f)$ interpolációs polinomok egy folytonos függvény

[3] A név után zárójelzett szám Grünwald dolgozatainak hátul megadott sorszámára vonatkozik.

esetén is lehetnek *mindenütt* divergensek. Az eredmény meglepő voltát az is mutatja, hogy a Zentralblattban maga S. Bernstein referálta a dolgozatot, kinek a Lagrange-interpoláció divergenciaelmélete szintén sokat köszönhet. Referátumát a következőképp kezdi: "Le présent travail apporte une contribution importante a la question de divergence possible des polynomes interpolateurs de Lagrange relatifs a une fonction continue pour les noeuds $x_k = \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$ de Tchebycheff...". A konstrukció több fázison ment át ([1], [2], [3]), egyszerűsödött és a kezdeti majdnem mindenütt-divergencia mindenütt-divergencia lett: a végső forma már meglepően egyszerű. Alapja három egyszerűen igazolható észrevétel. Az első az, hogy ha $[-1, +1]$-et m egyenlő részre osztjuk, akkor, hacsak $\frac{2}{1+x} < m \leqq \frac{n}{3}$,

$$\lambda_n(x, m) \equiv \sum{}' |l_{2k+1}(x)| > \frac{1}{2\pi}|T_n(x)| \log m - c_1(x),$$

ahol $l_{2k+1}(x)$ a $\cos\frac{2(2k+1)-1}{2n}\pi$-hez tartozó n-ik alapfüggvény, Σ' fix x, n és m mellett azon k-kra vonatkozik, melyekre, ha

$$\frac{l}{m} < x \leqq \frac{l+1}{m} \qquad -(m-1) \leqq l \leqq m-1,$$

akkor

$$\cos\frac{2(2k+1)-1}{2n}\pi \leqq \frac{l}{m};$$

$c_1(x)$ se m-től, sem n-től nem függő pozitív érték. A második Weierstrass approximációs tételének azon könnyen látható kis általánosítása, mely szerint az $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$ egyenletesen approximálható itt polinommal azon további megkötés mellett is, hogy az approximáló polinom véges sok előreadott helyen $[-1, +1]$-ben $f(x)$-el direkt megegyezzék. A harmadik megjegyzés megint interpolációra vonatkozik, de ez már nincs a T-matrixhoz kötve. Ha $l_\nu(x)$ egy tetszőleges alapmatrixú Lagrange-interpoláció alapfüggvényei, melynek alappontjaira

$$1 \geqq x_1 > x_2 > \cdots > x_n \geqq -1,$$

továbbá egy x_0-ra

$$x_\nu > x_0 > x_{\nu+1},$$

akkor az

$$l_j(x_0) \qquad \nu+1 \leqq j \leqq n$$

sorozat szomszédos tagjai ellenkező előjelűek. Ezek figyelembevételével a Grünwald-féle konstrukció a következőképp írható le. Tetszőleges pozitív egész $m \geqq 4$-el legyenek adva az

$$3m < n_1 < n_2 < \cdots < n_{m-1}$$

pozitív páronkint relatív prím páratlan egész számok. Ekkor könnyen látható, hogy a $T_{n_1}(x), \ldots, T_{n_{m-1}}(x)$ polinomok páronkint közös gyöke csak 0 lehet. Nem ellentmondó tehát az, hogy tekintsük azon $\psi(x)$ függvényt, mely $x=0$-ra 0, továbbá $T_{n_1}(x)$-nek $-1 < x \leqq 1-\frac{2}{m}$-be eső páratlan indexű gyökeire 1 (az esetleg ezek közé eső 0 gyököt nem számítva), $T_{n_1}(x)$ többi gyökhelyein 0, továbbá $T_{n_2}(x)$-nek $-1 < x \leqq 1-\frac{4}{m}$-be eső páratlan indexű gyökeire 1 (az esetleges 0 gyököt nem véve), $T_{n_2}(x)$ többi gyökein 0 ... végül $T_{n_{m-1}}(x)$-nek $-1 < x \leqq 1-\frac{2(m-1)}{m}$-be eső páratlan indexű gyökeire 1 (az esetleges 0 gyököt kivéve), $T_{n_{m-1}}(x)$ többi gyökein 0, és két szomszédos ilyen pont között lineáris; ezt két vízszintessel $[-1, +1]$-ben definiált függvénnyé terjeszthetjük ki. A második észrevétel segélyével $\psi(x)$ approximálható úgy egy (elég magas fokú) $\varphi(x)$ polinommal, hogy $[-1, +1]$-ben

$$|\varphi(x)| \leqq 2$$

és $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ szögpontjain átmenjen. Ekkor a harmadik észrevétel rögtön adja, hogy $1-\frac{2}{m} < x \leqq +1$-re, x_{2j+1}-el $T_{n_1}(x)$ páratlan indexű gyökeit jelölve,

$$|L_{n_1}(\varphi)| = \Big|\sum_{x_{2j+1} \leqq 1-\frac{2}{m}} l_{2j+1}(x)\Big| = \sum_{x_{2j+1} \leqq 1-\frac{2}{m}} |l_j(x)| = \lambda_{n_1}(x, m)$$

azaz az első észrevétel szerint itt

$$|L_{n_1}(\varphi)| > \frac{1}{2\pi}|T_{n_1}(x)| \log m - c_1(x)$$

és így φ-nek n_1-ik interpolációs polinomja az egész $1-\frac{2}{m} < x \leqq 1$-re máris „nagy", hacsak az $|T_{n_1}(x)|$ faktor és az $x=0$ alappont elhagyása el nem rontják a dolgot. Hasonlóképp $1-\frac{4}{m} < x \leqq 1-\frac{2}{m}$-re

$$|L_{n_2}(\varphi)| \geqq \frac{1}{2\pi}|T_{n_2}(x)| \log m - c_1(x),$$

azaz φ-nek n_2-ik interpolációs polinomja az egész $1-\frac{4}{m}<x\leq 1-\frac{2}{m}$-re máris „nagy", hacsak az $|T_{n_2}(x)|$ faktor és az $x=0$ elhagyása el nem rontják a dolgot. S.i.t. $1-\frac{2(m-1)}{m}<x\leq 1-\frac{2(m-2)}{m}$-re φ-nek n_{m-1}-ik interpolációs polinomja lesz „nagy", hacsak $|T_{n_{m-1}}(x)|$ és az $x=0$ elhagyása el nem rontja a dolgot. Mivel Fejér egy megjegyzése miatt az alapfüggvények mindegyike abszolút értékben $\sqrt{2}$ az egész $[-1,+1]$ közben, tehát a 0 esetleges elhagyása előbbieken lényegileg semmitse változtat. Miként lehet azonban biztosítani azt, hogy $|T_{n_1}(x)|,\ldots,|T_{n_{m-1}}(x)|$ nem lesznek akár mind „kicsik"? Evégből Grünwald szellemesen a következőképp jár el, $\varphi(x)$ fenti definícióját módosítva, megjegyezvén, hogy, ha m és n páratlan relatív prímek, akkor $T_m(x)$ és $T_{2n}(x)$ ill. $T_{2m}(x)$ és $T_{2n}(x)$ közös gyökei csak $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ lehetnek. $|T_{n_1}(x)|$ akkor „kicsi", ha arc cos x „közel" $\frac{2j-1}{2n_1}\pi$ alakú; de ekkor $|T_{2n_1}(x)|$ értéke nyilván „közel" 1. Tehát az elég magas fokú $\varphi(x)$ polinom legyen olyan, hogy $[-1,+1]$-ben

$$|\varphi(x)|\leq 2,$$

továbbá $\varphi(x)$ értéke legyen 1 a $T_{n_1}(x)$-nek *és* $T_{2n_1}(x)$-*nek* $-1<x\leq 1-\frac{2}{m}$-be eső páratlan indexű gyökein, 0 a többin, ovábbá legyen $\varphi(x)$ értéke 1 a $T_{n_2}(x)$-nek *és* $T_{2n_2}(x)$-*nek* $-1<x\leq 1-\frac{4}{m}$-be eső páratlan indexű gyökein, 0 a többin, s. i. t., az esetleg előjövő 0, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ alaphelyeken legyen 0. Ekkor közös gyökökkel nincs baj megint és az egész változás az lesz, hogy $1-\frac{2}{m}<x\leq 1$-ben

$$|L_{n_1}(\varphi)|>\frac{1}{2\pi}|T_{n_1}(x)|\log m-c_1(x)$$

$$|L_{2n_1}(\varphi)|>\frac{1}{2\pi}|T_{2n_1}(x)|\log m-c_1(x),$$

azaz előbbi megjegyzés szerint $1-\frac{2}{m}<x\leq +1$ minden pontjában $|L_{n_1}(\varphi)|$ vagy $|L_{2n_1}(\varphi)|$ valamelyike már biztosan „nagy". Hasonlóan

adódik, hogy $1-\frac{4}{m}<x\leq 1-\frac{2}{m}$-ben

$$|L_{n_2}(\varphi)|>\frac{1}{2\pi}|T_{n_2}(x)|\log m-c_1(x),$$

$$|L_{2n_2}(\varphi)|>\frac{1}{2\pi}|T_{2n_2}(x)|\log m-c_1(x),$$

azaz $1-\frac{4}{m}<x\leq 1-\frac{2}{m}$ minden pontjában $|L_{n_2}(\varphi)|$ és $|L_{2n_2}(\varphi)|$ valamelyike biztosan „nagy", s. i. t. Tehát a mi új $\varphi(x)$-ünk olyan, hogy $-1+\frac{2}{m}<x\leq +1$ minden pontjához van *legalább egy* oly k index, hogy $L_k(\varphi)$ „nagy"; azaz Fejér egy kifejezésével élve $\varphi(x)$ „csírájában" már mutatja a divergenciát. Pontosabban minden pozitív egész N-hez van oly elég magas fokú $\varphi_N(x)$ polinom és elég nagy m egész, hogy $-1+\frac{2}{m}<x\leq 1$-hez *minden* pontjára alkalmas $k=k(x)$-el $|L_k(\varphi_N)|\geq N$. A divergenciához azonban minden x-helyen *végtelen sok* ilyen index kell. Annak azonban semmi akadálya, hogy a jólismert Lebesgue-féle rezonancia-elvet alkalmazva a kívánt tulajdonságú, $[-1,+1]$-ben folytonos függvényt

$$\Phi(x)=\sum_{\nu}c_{\nu}\varphi_{N_{\nu}}(x)$$

alakban keressük, ha az N_ν-k elég ritkán vannak; ez már járt utakon célhoz vezet. Az egyetlen megmaradt kis szépséghiba az, hogy ilyen módon a divergencia csak a $-1<x\leq +1$ balról nyílt intervallumra van igazolva. Ezen egy további ötlettel úgy segít, hogy csinál oly $[-1,+1]$-ben folytonos $\psi(x)$-et, melynek T-matrixhoz tartozó interpolációs polinomjai *csak* $x=-1$-re korlátlanok, másutt nem; ha $\Phi(x)$ interpolációs polinomjai $x=-1$-re korlátosak volnának, akkor $\Phi(x)+\psi(x)$ adja a probléma teljes megoldását.

A konstrukció igen szellemes és a hozzáfűzött kis analízis világosan mutatja, milyen nehézségeket kellett legyőznie. Vele egyidőben a lengyel Marczinkievicz is foglalkozott a kérdéssel és valamivel később, de nyilván Grünwaldtól függetlenül megoldotta azt. Megoldása reprodukálva van Natanszon konstruktív függvénytani könyvében[4]; nekem Grünwald konstrukciója lényegesen áttetszőbbnek tűnik. Érdekes módon Marczinkiewicznél e tétel szintén doktori disszertációjában szerepel; életük abban is parallel ha-

[4] I. P. Natanszon: Konstruktív függvénytan. Akad. Kiadó 1952. p. 393.

ladt, hogy mindkettőjüket a hitleri Németország által kirobbantott háború kergette a korai halálba, Marczinkiewiczet még előbb.

E sikeren felbuzdulva Grünwald sokat foglalkozott a Fourier-sor megfelelő divergencia problémájával. E próbálkozásait azonban nem koronázta siker, még az L_2-függvényosztály körében sem. Az azonban nem lehetetlen, hogy módszere a lineáris függvényoperációk körében olyan általános tételre vezet, mint H. Hahn-nak 1918-ban az interpolációról írott dolgozata[5] egyenes úton vezetett Banach—Steinhaus általános tételeihez.[6]

Az első jel arra vonatkozólag, hogy a T-matrixhoz tartozó interpolációs polinomok és Fourier-sor közötti analógia nem teljes, Fabertól való, még 1910-ből.[7] E dolgozatában Faber oly $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$ függvény létezését mutatta ki, hogy $f(\cos \vartheta)$ Fourier-sora egyenletesen konvergál $[0, \pi]$-ben, míg a szóban forgó interpolációs polinomok végtelen sok helyen divergensek. Grünwald, egy Erdőssel írott cikkében ([8]), módszerének továbbfejlesztésével ezen lényegesen túlmegy; kimutatták ebben oly $f(x)$ létezését, hogy, $f(\cos \vartheta)$ Fourier-sora $[0, \pi]$-ben egyenletesen konvergál és $f(x)$ szóban forgó interpolációs polinomjai *mindenütt* divergálnak. Megjegyzem, hogy a duális kérdés, oly $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$ konstrukciója, melynél a T-matrixhoz tartozó interpolációs polinomok konvergálnak egyenletesen $f(x)$-hez és $f(\cos \vartheta)$ Fourier-sora divergens pl. $\vartheta = 0$-ra, tudomásom szerint az irodalomban még nincs tárgyalva.

A T-matrixhoz tartozó interpolációs polinomok és Fourier-sor közötti formális analógia alapján azt lehetne gondolni, hogy miként a Fourier-sornál, az interpolációs polinomok számtani középei egy folytonossági helyen konvergálnak a függvényértékhez. Előadó még 1932-ben vette észre — ez egy Erdőssel írott, 1937-ben megjelent dolgozatukban szerepel[8] — hogy van oly $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$, melyre ezen interpolációs polinomok számtani középei $x = 0$-ra korlátlanok. Marczinkiewicz disszertációjában felvetette azon kérdést is, vajon ezen arithmetikai közepek divergálhatnak-e *mindenütt?* Egy Grünwaldhoz intézett levele szerint[9] ezen divergenciajelenséget egy megszámlálható halmazra ki tudja mutatni. Grünwald egy Erdőssel írott dolgozatában ([4]) módszerének további fejlesztésével e nehéz kérdést is tudták tárgyalni. Ha megoldásuk, mint Erdős utólag észrevette, nem is teljesen helyes,

[5] „Über das Interpolationsproblem". Math. Zeitschr. 1. (1918) p. 115—142.

[6] Sur le principe de la condensation de singularités. Fund. Math. 9. (1927) p. 50—61.

[7] Math. Ann. 69. p. 372—443.

[8] On Interpolation I. Annals of Math. Vol. 38 (1937) p. 142—155. különösen p. 144.

[9] L. [4] p. 83.

annyi igaz marad, hogy e számtani közepek *majdnem mindenütt* divergálnak alkalmas, $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$-re. E tény csak alátámasztja azon előbbi megjegyzésemet, melyet Grünwald és Marczinkiewicz konstrukcióinak összehasonlítására tettem.

Egy másik nevezetes eredménye Fejér egy sejtésére vonatkozik. (L. [13], [18].) G. Faber egy nevezetes eredménye szerint[10] nemcsak a T-matrixhoz, hanem a $[-1, +1]$-ben adott interpolációs alaphelyek *bármely* A-matrixához van oly $[-1, +1]$-ben folytonos $g(x)$, melynek A-matrixhoz tartozó Lagrange-interpolációs polinomjai korlátlanok. Fejér vette észre, hogy a helyzet javul, ha Lagrange-interpolációs polinomok helyett, melynél az n-ik polinom foka $\leq (n-1)$, azon polinomok sorozatát tekintjük, melyeknél az n-ik polinomnál az adott n helyen a polinom értéke megegyezik a függvényértékkel és deriváltja e helyeken 0; e polinom foka $\leq 2n-1$ és őt az A-matrixhoz tartozó n-ik Hermite—Fejér-féle lépcsőparabolának nevezzük. Mármost Fejér 1916-ban azt mutatta ki,[11] hogy ha a T-matrixszal fenti Hermite—Fejér polinomok sorozatát képezzük, akkor ezek $[-1, +1]$-ben egyenletesen konvergálnak $f(x)$-hez, ha $f(x)$ itt folytonos. Előzőleg[12] analóg tételt talált azon esetre is, mikor az alappontok matrixának n-ik sorát az n-ik Legendre-polinom gyökei adják. Bizonyításai mindkét esetben mint később kifejtette azon észrevételén múltak, hogy az alapmatrix „normális".[13] Ez alatt a következőt értette. A Hermite—Fejér interpolációs polinomok általános A-matrix esetén

$$H_n(f) = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_{\nu n}) h_{\nu n}(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} v_{jn}(x) l_{jn}(x)^2 \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{n} f(x_{jn}) \left\{ 1 - \frac{\omega_n''(x_{jn})}{\omega_n'(x_{jn})}(x - x_{jn}) \right\} l_{jn}(x)^2$$

alakba írhatók, ahol az x_{jn}-ek az A-matrix n-ik sorának pontjai, $l_{jn}(x)$ a Langrange-interpoláció alapfüggvényei,

$$\omega_n(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_{jn}).$$

Mármost az A-matrixot normálisnak akkor nevezte, ha a fellépő

[10] L. [7]. Egy különösen egyszerű bizonyítást adott Fejér „Die Abschätzung eines Polynoms etc." c. dolgozatának függelékében, Math. Zeitschr. XXXII. (1930) p. 426—457.

[11] Über Interpolation. Gött. Nachr. (1916) p. 66—91.

[12] „Interpolációról". Mat. és Term. Értesitő XXXII. köt. (1915) p. 53—82.

[13] L. Fejér: „On the characterisation of some remarkable systems of points of interpolation by means of conjugate points. Math. Monthly 41. (1934) p. 1—14.

lineárfaktorok nem tűnnek el $[-1,+1]$-ben, azaz itt

$$v_{jn}(x) \geqq 0$$
$$j=1,2,\ldots,n \qquad n=1,2,\ldots,$$

vagyis ezen j és n-ekre

$$\left| x_{jn} + \frac{\omega_n'(x_{jn})}{\omega_n''(x_{jn})} \right| > 1,$$

„szigorúan normális"-nak, ha többet követőleg van oly pozitív n-től független pozitív δ, hogy $-1 \leqq x \leqq 1$-re

$$v_{jn}(x) \geqq \delta$$
$$j=1,\ldots,n \qquad n=1,2,\ldots.$$

Fejér szóban forgó sejtése mármost az volt, hogy minden szigorúan normális A-matrix esetén igaz az, hogy a $H_n(f)$-polinomok sorozata egyenletesen konvergál $f(x)$-hez, ha ez $[-1,+1]$-ben folytonos. Ha a kérdés kézenfekvő is volt, a felelet távolról sem volt az. Ami könnyű, az csak az hogy, ha $f(x)$ folytonosan deriválható $[-1,+1]$-ben és a normális A-matrixon nem a $H_n(f)$ lépcsőparabolák sorozatát, hanem a $G_n(f)$ ún. símuló parabolákét nézzük, akkor ezek sorozata egyenletesen konvergál $f(x)$-hez $[-1,+1]$-ben. ($G_n(F)$ azon legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinom, mely $j=1,2,\ldots,n$-re x_{jn} helyeken függvényértékben és első deriváltban megegyezik $F(x)$-el. Verifikálható, hogy

$$G_n(F) = \sum_{j=1}^{n} F(x_{jn}) v_{jn}(x) l_{jn}(x)^2 + \sum_{j=1}^{n} F'(x_{jn})(x-x_{jn}) l_{jn}(x)^2.).$$

A könnyűség oka az, hogy, ha $P_k(x)$ tetszőleges k-adfokú polinom, akkor

$$G_n(P_k) \equiv P_k(x),$$

hacsak $2n-1 \geqq k$. Ha $f(x)$-ről csupán azt tételezzük fel, hogy $[-1,+1]$-ben folytonos, akkor Fejér sejtésének bizonyítására a következő elindulás teljesen kézenfekvő. Legyen $\varepsilon > 0$ adott és $Q_k(x)$ k-adfokú polinom, melyre $-1 \leqq x \leqq +1$-ben

$$|f(x) - Q_k(x)| \leqq \varepsilon.$$

Ekkor $2n-1 \geqq k$-ra

$$H_n(f) - f = (H_n(f) - Q_k) - (f - Q_k) = (H_n(f) - G_n(Q_k)) - (f - Q_k)$$

azaz, mivel $G_n(F)$ előbbi explicit alakjából

$$G_n(Q_k) = H(Q_k) + \sum_{j=1}^{n} Q_k'(x_{jn})(x-x_{jn}) l_{jn}(x)^2,$$

tehát $-1 \leqq x \leqq +1$-ben

$$|H_n(f) - f| \leqq \varepsilon + |H_n(f - Q_k)| + \left| \sum_{j=1}^{n} Q_k'(x_{jn})(x - x_{jn}) l_{jn}(x)^2 \right|.$$

Mivel $P_k(x) \equiv 1$-re $G_n(P_k) \equiv P_k$-ból

$$\sum_{j=1}^{n} v_{jn}(x) l_{jn}(x)^2 \equiv 1$$

és a normálisság miatt

$$\sum_{j=1}^{n} |v_{jn}(x)| l_{jn}(x)^2 \equiv 1,$$

tehát $[-1, +1]$-ben

$$|H_n(f - Q_k)| \leqq \varepsilon$$

és így, ha $[-1, +1]$-ben $|Q_k'(x)| \leqq K$, akkor

$$|H_n(f) - f| \leqq 2\varepsilon + K \sum_{j=1}^{n} |x - x_{jn}| l_{jn}(x)^2.$$

Ami tehát az egész nehézség, az annak kimutatása, hogy szigorúan normális A-matrix esetén

$$\sum_{j=1}^{n} |x - x_{jn}| l_{jn}(x)^2 \leqq \eta,$$

ha $n > n_0(\eta)$; az eddigiekben csak a normalitás volt kihasználva. Nyilván elég rögzített $[-1, +1]$-beli a mellett $n > n_0(\eta)$-ra

$$\sum_{x_{jn} \geqq a} (x_{jn} - a) l_{jn}(a)^2 \leqq \eta$$

egyenlőtlenséget igazolni. E főnehézség elegáns áthidalására Grünwald Géza azt vette észre, hogy az előbbi a-val a speciális

$$f_0(x) = \begin{matrix} (x-a)^{\frac{\delta}{2}} \\ 0 \end{matrix}, \quad \text{ha} \quad \begin{matrix} a \leqq x \leqq 1 \\ -1 \leqq x \leqq a \end{matrix}$$

függvényre az n-ik símulóparabola

$$G_n(f_0) = \sum_{x_{jn} \geqq a} (x_{jn} - a)^{\frac{\delta}{2}} l_{jn}(x)^2 \left\{ v_{jn}(x) - \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Ha tehát e speciális $f_0(x)$-re be tudnánk bizonyítani, hogy $G_n(f_0)$ egyenletesen tart $f_0(x)$-hez éspedig a-ban egyenletesen, akkor

$x=a$-ra adódnék $n\to\infty$-re a-ban egyenletesen

$$\sum_{x_{jn}\geq a}(x_{jn}-a)^{\frac{\delta}{2}} l_{jn}(a)^2\left(v_{jn}(a)-\frac{\delta}{2}\right)\to 0$$

azaz, kihasználva a *szigorúan* normálisság kikötését $n\to\infty$-re

$$\sum_{x_{jn}\geq a}(x_{jn}-a)^{\frac{\delta}{2}} l_{jn}(a)^2\to 0$$

és ebből már a kritikus állítás könnyen adódnék, tekintve, hogy a szigorú normáltságból $-1\leq x\leq +1$-ben

$$\sum_{j=1}^{n} l_{jn}(x)^2\leq\frac{1}{\delta}.$$

De $f_0(x)$ csak az $x=a$ kivételével folytonosan deriválható; így tehát a bevezetőleg említett könnyű approximációs tétel minden további nélkül nem alkalmazható. Ezen újabb kis nehézségen Grünwald kézenfekvően úgy segített, hogy $f_0(x)$ „sarkát" $x=a$-nál „letompította" alkalmas folytonosan deriválható függvénnyel helyettesítve azt.

Grünwald [16] és [18] dolgozataiban a tételt több irányban kimélyítette. Mindmáig eldöntetlen azonban az a további kérdés, hogy van-e szigorúan normális matrix esetén *lokális* konvergencia-tétel, azaz egy x_0 helyen való folytonosságból következik-e a lépcső-parabolák konvergenciája e helyen?

A Lagrange-interpoláció konvergenciaelméletével foglalkozik egy, az előadóval írott közös dolgozata ([7]). Ebben oly $A=A(p)$ matrixok esetével foglalkoznak, mikor az n-ik sort egy $p(x)$ súlyra a $[-1,+1]$-ben ortogonális polinomsorozat n-ik polinomjának gyökei alkotják; ezek, mint jólismert, mind $[-1,+1]$-be esnek és egyszeresek, ha $[-1,+1]$-re $p(x)\geq 0$. Ilyen általánosságban semmitse sikerült kimutatni; különböző egyszerű megkötéseket téve azonban $p(x)$-re, több általános tételt nyertek. Egy ilyen premissza volt az, hogy $-1\leq x\leq +1$-re

$$p(x)\geq m$$

egy pozitív m állandóval. Ez esetben kimutatták, hogy ha $f(x)$ $\frac{1}{2}$-nél nagyobb Lipschitz feltételt teljesít, egyenletesen $[-1,+1]$-ben, akkor tetszőleges kis pozitív ε mellett az $A(p)$ matrixhoz tartozó Lagrange-interpolációs polinomok $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban egyenletesen konvergálnak $f(x)$-hez. Ez könnyen következik, ha igazolva van, hogy $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban

$$\sum_{j=1}^{n}|l_{jn}(x)|\leq c_1(m)\sqrt{n}$$

és erre két egyszerű bizonyítást is adtak. Mint közvetlenül a már megírt dolgozat elküldése előtt a szerzők Feldheim Ervintől megtudták, e tételt előzőleg Shohat is bebizonyította, jóval komplikáltabban; Natanszon[4] és Szegő[14] könyvei e tételre a [7] dolgozat egyik bizonyítását adják. Igen valószínű, hogy $\sqrt{n}$ az előbbi egyenlőtlenségben $\log(n+1)$-el helyettesíthető; erre vonatkozólag eddig csupán Freud Géza[15] egy szép részeredménye ismeretes. Alexits György[16] a tétel egy lokalizált formáját találta meg.

Az interpolációról szóló további érdekes dolgozatainak ismertetését ([9], [14], [17]) időhiány miatt elhagyva térünk rá trigonometrikus sorokról szóló dolgozataira ([10], [11], [12]. Ezek Fejér egy érdekes gondolatának továbbfejlesztéseképp keletkeztek.[17] Fejér klasszikus tétele szerint, ha $f(x)$ 2π szerint periodikus és

$$f\sim a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$$

és $x=x_0$ helyen $f(x)$ folytonos, akkor a Fourier-sor $x=x_0$ helyen $(C,1)$ szummabilis, amit, ha a sor részletösszegei $s_0, s_1,\ldots,$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{\nu=0}^{n}\{s_\nu-f(x_0)\}}{n+1}=0$$

alakba is írhatunk. Hardy és Littlewood még azt is kimutatták, hogy egy ilyen x_0 helyen a Fourier-sor „erősen szummabilis", azaz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{\nu=0}^{n}(s_\nu-f(x_0))^2}{n+1}=0$$

is igaz, Carleman és Sutton még többetmondóan, hogy tetszőleges nagy fix pozitív k-ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{\nu=0}^{n}|s_\nu-f(x_0)|^k}{n+1}=0, \qquad \text{a.)}$$

ha x_0 egy folytonossági hely (sőt ez is lényegesen enyhíthető).

14 „Orthogonal polynomials". Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. XXIII. (1939) p. 339.

15 „Über die Lebesgueschen Funktionen der Lagrangeschen Interpolation". Acta Math. Hung. T. IV. (1953) p, 137—142.

16 „Eine Bemerkung zur Konvergenzfrage des Lagrangeschen Interpolationsverfahrens". Acta Math. Hung. T. IV. (1953) p. 233—236.

17 L. Fejér: Zur Summabilitätstheorie der Fourierschen und Laplaceschen Reihe. Proc. of Camb. Phyl. Soc. XXXIV. (1938) p. 503—509.

Fejér gondolata Hardy—Littlewood fenti tételére vonatkozik; e tételt egy *kétváltozós* függvény Fourier-sorára vonatkozó *közönséges* szummabilitási tételből származtatja. Legyen $f(x, y)$ mindkét változóban 2π szerint periodikus, L-integrálható és

$$f(x, y) \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\mu\nu},$$

ahol

$$A_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \cos \mu x \cos \nu y + b_{\mu\nu} \cos \mu x \sin \nu y + c_{\mu\nu} \sin \mu x \cos \nu y + \\ + d_{\mu\nu} \sin \nu x \sin \nu y;$$

legyen továbbá

$$s_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} A_{\mu\nu}.$$

Ekkor Saks egy megjegyzése alapján az[18]

$$\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} s_{\mu\nu}$$

aritmetikai közepek meglepő módon még majdnem mindenütt divergálhatnak attól, hogy $f(x, y)$ a periodusnégyzetben L-integrálható. Fejér mármost azt találta jelzett dolgozatában, hogy a „jó" szummálási mód nem a fenti, mikor „minden" részletösszeg tekintetbe van véve, hanem az, mikor az s_{mn} részletösszegek

$$\begin{matrix} s_{00} & s_{10} & s_{20} & \dots \\ s_{01} & s_{11} & s_{21} & \dots \\ s_{02} & s_{12} & s_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

quadratikus sémájából csak a diagonálisban levőket vesszük tekintetbe. Fejér azt találta, hogy ha az $s_{\nu\nu}$-knek *harmadrendű* Cesaro-közepeit, azaz a

$$\sigma_n^{(3)} = \frac{1}{\binom{n+3}{3}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+3-\nu}{3} s_{\nu\nu}$$

kifejezéseket vizsgáljuk, akkor $f(x, y)$ minden (x_0, y_0) folytonossági helyén $\sigma_n^{(3)} \to f(x_0, y_0)$ és ebből Hardy—Littlewood fenti tételét elegánsan levezette. Grünwald [10] alatti dolgozatában kimutatta azon, nehezebben bizonyítható tételt, hogy egy folytonossági helyen már

[18] Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral. Fund. Math. 22 (1934) p. 257—261.

az $s_{\nu\nu}$ számok $\sigma_n^{(1)}$ *elsőrendű* számtani közepei is $f(x_0, y_0)$-hoz konvergálnak. [11] dolgozatában Lebesgue—Fejér tételének azon kétdimenziós átvitelét bizonyította be, hogy ha $f(x, y)$-ról csak azt tesszük fel, hogy a periodusnégyzetben L-integrálható, akkor ezen $\sigma_n^{(1)}$ közepek *majdnem mindenütt* $f(x, y)$-hoz konvergálnak. Ennek érdekessége szembeszökő, ha összehasonlítjuk Saks előbb említett tételével. [12] dolgozatában a Fejér-féle

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_{\nu\nu}$$

„főátlóközepeket" a „Cauchy-szerű"

$$g_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_{\nu, n-\nu}$$

„mellékátlóközepekkel" állítja szembe és rájuk analóg tényállást talál.

[11] dolgozatában egy igen érdekes alkalmazást ígért be, aminek beteljesítésében a halál megakadályozta. Érdemes erről is pár szót szólani; igazán érdekes volna, ha gondolata a szóban forgó kérdés egy egyszerűbb megoldáshoz vezetne. Ez Hardy—Littlewood előbb említett erős-szummációs tételére vonatkozik. Már ők kimutatták, hogy $x = x_0$ már akkor is erős-szummabilitási hely a mondott értelemben, ha valamely $r > 1$-re $f \in L_r$ és

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x_0+t) - f(x_0)|^r \, dt = 0;$$

erről belátható, hogy ez majdnem minden x_0-ra teljesül. A kérdés mármost az, hogy mi a helyzet, ha $r = 1$, azaz $f(x)$-ről pusztán L-integrálhatóságot teszünk fel? Mint Hardy és Littlewood[19] kimutatták, $r = 1$ esetén előbbi már nem igaz, a

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x_0+t) - f(x_0)| \, dt = 0$$

nem vonja maga után, hogy e helyen

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} (s_\nu - f(x_0))^2 \to 0, \qquad \text{b.)}$$

[19] The strong summability of Fourier series. Fund. Math. XXV. (1935) p. 162—189.

sőt még azt sem, hogy valamely kis pozitív k-val

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|s_\nu - f(x_0)|^k \to 0.$$

Ezután elég meglepő volt, mikor Marczinkiewicz[20] kimutatta, hogy mégis igaz az $r=1$ esetben is, hogy a Fourier-sor b.) értelemben erős-szummabilis majdnem minden x-re. Bizonyítása nehéz. Mármost Grünwald [11] dolgozatában azt jegyezte meg, hogy tételében szereplő nullhalmaz pontosabb tanulmányozása kiadhatja Marczinkiewicz tételét.

Különben Grünwald az erős szummabilitásra vonatkozólag egy másik érdekes kérdést is vetett fel, azt beszélgetés közben. Legyen $f(x)$ mindenütt folytonos. Grünwald kérdése mármost abból állott, lehet-e Carlemann—Sutton a.) tételét úgy szigorítani, hogy k helyett egy lassan $+\infty$-hez tartó univerzális $k(n)$ kitevő álljon. Ezen kérdésre való negatív válasz volt a tárgya azon dolgozatnak,[21] melyet előadó Grünwald Géza emlékére írt. Ezzel kapcsolatban igen sok kérdés maradt még tisztázatlanul; így pl. ha a mindenütt folytonos $f(x)$-re egy $x=x_0$ helyen $0<\alpha\leqq 1$-el

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|\leqq \frac{1}{\log^\alpha \frac{1}{|h|}},$$

milyen $k(n)$ mellett marad a.) igaz.

Egy dolgozata ([5]), melyet előadóval írt, komplex függvénytani tárgyú éspedig A. Bloch nevezetes tételére vonatkozik. E tétel, melyből Picard, Landau és Schottky tételei könnyen származtathatók, azt mondja ki, hogy ha

$$w=f(z)=z+a_2z^2+\cdots$$

reguláris $|z|\leqq 1$-re, akkor az egységkör képe a w-síkon (melynek egyes részei többszörösen lehetnek lefedve) tartalmaz egy körlemezt, melynek sugára pl. $>\frac{1}{10}$. A közölt bizonyítás két segédtételén alapszik. Az első azt mondja ki, hogy van oly r_0, hogy $0<r_0\leqq 1$ és az $|z|\leqq r_0$ körlemez képének területe osztva kerületével (többszörösség szerint számítva) $\geqq \frac{1}{2\sqrt{e}}$, függetlenül az együtthatóktól. A másik elemi geometriai és azt mondja ki, hogy ha egy

[20] Sur la sommabilité forte de séries de Fourier. Journ. of Lond. Math. Soc. 14 (1939) p. 162—168.

[21] On the strong summability of Fourier series. (In memory of my late friend dr. Géza Grünwald.) Journ. of Indian Math. Soc. Vol. XII. (1948) p. 8—12.

Jordan-görbe kerülete k és területe t, akkor bele lehet írni egy oly kört, melynek sugara $\geqq \frac{1}{4\pi+2}\cdot\frac{t}{k}$. Mint Grünwald és Vázsonyi később kimutatták,[22] az egyenlőtlenség igaz marad akkor is, ha $\frac{1}{4\pi+2}$ helyett 1-et írunk és ekkor az egyenlőség jele, elérhető minden „lóversenypályára", azaz oly tartományra, melyet egy körlap leír, ha középpontja egy egyenesszakaszon végigcsúszik; további általánosításokat Santalo[23] és Besicovitch[24] találtak. A Bloch tétel bizonyítását ezekből a szerzők úgy gondolták levezethetni, hogy az első segédtétel r_0-jával tekintik $|z|\leqq r_0$ képét; ha H_ν jelenti $\nu\geqq 1$-re azon pontok halmazát a képben, melyek legalább ν-szörösen vannak fedve, akkor a második segédtételt az egyes H_ν-kra alkalmazzák. Elkerülte figyelmüket azonban az a tény, hogy már H_1 is nem szükségképpen egyszeresen összefüggő, így a bizonyítás ezen formájában csak oly $f(z)$-kre helyes minden további nélkül, melyek $|z|\leqq 1$-re egyrétűek. Mint Ungár Péter megjegyezte, ezen úgy lehet segíteni, hogy a második segédtételnek megfelelő tételt nem a síkon, hanem $f(z)$ Riemann-felületén kell tekinteni. Idevágó eredményei közlés alatt állanak.

Végigmentünk nagy vonásokban Grünwald megjelent munkáin, melyek utolsó kettőjét már biztosan nem láthatta megjelenni. Elgondolkozhatunk azon, mivé fejlődhetett volna, ha megéri e kort, melyben tehetsége teljesen és akadálytalanul kibontakozhatott volna és melyről annyit álmodozott. Mert Grünwald Géza kora ifjúságától kezdve kommunista meggyőződésű volt. Erről néha szólt nekünk, barátainak, akik közül többen tőle hallottunk először a dialektikus materializmusról az elmaradhatatlan vasárnapi gyalog- vagy evezőtúrákon. Dehát nem érhette meg álmai beteljesülését és így későbbi fejlődési lehetőségeinek irányait csak megmaradt jegyzeteiből tudjuk megsejteni. E jegyzetekbe volt alkalmam betekinthetni. Ezek alaposabb tanulmányozást igényelnek, de már felületes átnézés ki tudott ragadni belőle eredményeket, és kérdéseket, melyek sokirányú aktív érdeklődését mutatják. Nem szólok Stone egy tételével és valószínűségszámítással kapcsolatos próbálkozásokról, mely utóbbiakhoz Egyesült Izzóbeli munkájával jutott és melyek megítélésére nem érzek kompetenciát. Nem tudok közelebbit mondani arról a halmazelméleti dolgozatáról sem, melyet e feljegyzések szerint 1941 elején Tomszkba küldött; ennek tartalmáról csak jegyzeteinek gon-

[22] A bizonyítást tudomásom szerint nem publikálták.

[23] Sobre el circolo de radio maximo contenido en un recintro. Revista de la Union Math. Argentina Vol. X. (1945) p. 155—162.

[24] A variant of a classical isoperemetrical problem. Quart. 7. of Math. Oxford Ser. 20 (1949) p. 84—94.

dosabb tanulmányozása adhat számot. Geometria iránti érdeklődését azon publikálatlan csinos tétele is mutatja, melyet feleségével talált, mely azt mondja ki, hogy egy t területű konvex tartomány mindig befoglalható $2t$ területű centrálszimmetrikus konvex tartományba. Algebra iránti érdeklődése annak bizonyítási kísérleteiben manifesztálódott, hogy ha egy csoport minden részcsoportjának rendje nem halad meg egy fix n értéket, akkor véges. Emlékszem továbbá — ha erről feljegyzéseiben nincs is nyom —, hogy Hajósnak a Minkowski sejtést bizonyító dolgozatának megjelenése után a bizonyítás egyszerűsítésével próbálkozott. Számelméleti érdeklődése látszik az

$$I(n)=\frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi}\Big(\sum_{p\leqq n}\cos px\Big)^3dx+O(1)$$

formulán; itt p az n alatti prímeken fut végig, $I(n)$ az n alatti ikerprímek száma, tehát azon n alatti p prímeké, melyeknél $p+2$ is prím és $O(1)$ egy oly kifejezés, mely növekvő n-nel korlátos marad. Mint tudjuk, mindmáig nincs igazolva még az sem, hogy az ilyen ikerprímek száma végtelen; nem látható egyenlőre, Grünwald formulája előreviszi-e a kérdést. Valós függvénytani érdeklődést mutat a következő feljegyzés: „Egy zárt közben folytonos függvény maximumainak halmaza zérusmértékű *(esetleg megszámlálható).*" Ezt azóta Gehér István is megtalálta (l. Mat. Lapok II. évf. 1. szám. 38. feladat, p. 69), szigorúbb második formájában [6] dolgozatának folytatásaképp elvesztett tomszki dolgozatának tárgya esetleg következő feljegyzésének kidolgozása lehetett. Ha egy M halmaz minden eleméhez M-nek legfeljebb k (véges sok) tőle különböző eleme van hozzárendelve, akkor M felbomlik $(k+1)$ halmaz összegére úgy, hogy mindegyiken belül egy elem sincs a másikhoz rendelve. Csinos sorelméleti megjegyzése az, hogy ha $a_\nu \geqq 0$ és minden egész n-re

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqq a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n},$$

akkor a $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ sor konvergens és $\sum_{1}^{\infty} a_\nu<2ea_1$. Egy feljegyzés tanúskodik arról, hogy ő is talált egy bizonyítást a

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\binom{n+2k-j}{2k}=\binom{n+k}{k}^2$$

identitásra, melyről e Lapok hasábjain utóbbi időkben többször

szó esett.[25] Mint problémát kérdi egy feljegyzés, n elemnek hány oly permutációja van, melyben minden elem az eredeti helyétől legalább k hellyel van jobbra vagy balra. Fourier sorokra vonatkozó egyik kérdését — melynek feljegyzéseiben nincs nyoma — előbb említettem. Egy másik kérdése a Fourier-féle duplasorra vonatkozik és azt kérdezi, vajon igaz marad-e, hogy ha

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)^2\,dx\,dy<\infty,$$

akkor az $s_{2^n,2^n}$ részletösszegek $(n=0,1,\ldots)$ majdnem mindenütt konvergensek? Az ortogonális kifejtésekre vonatkozik azon kérdése, vajon van-e oly ortogonális kifejtés egyáltalán, úgy, hogy bármely L-integrálható függvénynek egy tetszőleges folytonossági helyén *ezen* ortogonális kifejtése $(C, 1)$ szummabilis, de van oly mindenütt folytonos $f(x)$, melynek ilyen kifejtése majdnem mindenütt divergál.

További irányú érdeklődését mutatja az az előadássorozat, amit az ergodikus tételekről tartott Ortvay Rudolf felkérésére szemináriumában 1937 vagy 1938-ban. Több feljegyzése mutatja, hogy állása folyamán elméleti fizikával behatóbban foglalkozott; szakértő szem kellene annak eldöntésére, hogy ezek csupán kivonatok-e, vagy már tartalmaznak eredeti gondolatot is.

Mint látjuk, Grünwald Géza azon matematikusok közé tartozott, akiknek a matematika nem foglalkozás, hanem lételem. Igen vonzották a nagy problémák, sokat foglalkozott velük; a pihenőkben azonban szívesen foglalkozott szép, de kisebb fontosságú kérdésekkel, egyetemi hallgatóéveiben több feladatmegoldást küldött a Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigungba. Érdekes módon a Középiskolai Matematikai Lapokba nem dolgozott, ennek oka talán az is volt, hogy egészen érettségi vizsgájáig nem döntötte el magában, milyen pályát válasszon. Csak akkor döntött, és fenti egész beszámoló azt mutatja, hogy döntése helyes volt a magyar tudomány szempontjából. Az a tűz, mely végül elemésztette őt, anyját és testvérét, nem emészthette el munkakedvét, érdeklődését, törhetetlen optimizmusát, nem rendítette meg póztalan helytállását. Lényeges énje, munkái túlélték a tüzet és ezek a magyar matematika történetének lapjain továbbélnek.

[25] Turán P.: A kínai matematika történetének egy problémájáról. V. (1954). p. 1.—6., valamint a jelen számban Huszár Géza, Surányi János és Takács Lajos dolgozatait.

Grünwald Géza
dolgozatainak jegyzéke

1. A Lagrange-féle interpolációs polinomok divergenciajelenségeiről. (Doktori értekezés.) *Math. Fiz. Lapok* XLII. (1935) p. 1—22.
2. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome. *Acta Szeged* T. VII. Fasc. IV. (1935) p. 207—221.
3. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome stetiger Funktionen. *Annals of Math.* Vol. 37. No. 4. (1936) p. 908—918.
4. Über die arithmetischen Mittelwerte der Lagrangeschen Interpolationspolynome (Erdős Pállal) *Studia Math.* T. VII. (1937) p. 82—95.
5. Über den Blochschen Satz (Turán Pállal). *Acta Szeged* T. VIII. Fasc. IV. (1937) p. 236—240.
6. Egy halmazelméleti tételről. *Math. és Fiz. Lapok* XLIV. (1937) p. 51—53.
7. Über Interpolation (Turán Pállal). *Annali di Pisa* (1938) p. 1—10.
8. Über einen Faberschen Satz (Erdős Pállal) *Annals of Math.*, Vol. 39. No. 2. (1938) p. 257—261.
9. Note on an elementary problem of interpolation (Erdős Pállal). *Bull. of Amer. Math. Soc.* (1938) p. 515—518.
10. Zur Summabilitätstheorie der Fourierschen Doppelreihe. *Proc. of the Camb. Phyl. Soc.* Vol. XXXV. Part III. (1939) p. 343—350.
11. Über die Summabilität der Fourierschen Reihe. *Acta Szeged.* T. X. Fasc. 1. (1941) p. 54—63.
12. Eine Bemerkung zu meiner Arbeit „Über die Summabilität der Fourierschen Reihe". *Ibid.* T. X. Fasc. 2. (1941) p. 105—108.
13. A Hermite-féle interpolációról. *Math. és Fiz. Lapok* XLVIII. (1941) p. 272—284.
14. Note on interpolation. *Bull. of the Amer. Math. Soc.* Vol. 47. No. 4. (1941) p. 257—260.
15. On a convergence theorem for the Lagrange interpolation polynomials, *Ibid.* p. 271—274.
16. Az interpoláció alapfüggvényeiről. *Math. és Fiz. Lapok* XLIX. (1942) jan.—jún. füzet, p. 76—63.
17. On a theorem of S. Bernstein, *Acta Szeged,* T. X. Fasc. 3—4. (1943) p. 185—187.
18. On the theory of interpolation. *Acta Math.* Vol. 75. (1943) p. 219—245.

РЕЗЮМЕ

Жизнь и деятельность Г. Грюнвалда.

SUMMARY

Short biography and mathematical works of G. Grünwald.