

Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *)

(Erste Mitteilung.)

Von

ALFRED HAAR in Göttingen.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	331
Kapitel I.	
Divergente Reihen.	
§ 1. Ein allgemeines Kriterium	335
§ 2. Anwendung auf die Sturm-Liouvilleschen Reihen	339
§ 3. Anwendung auf die Kugelfunktionen	345
Kapitel II.	
Theorie der Summation.	
§ 1. Ein Hilfssatz	349
§ 2. Anwendung auf die Theorie der trigonometrischen und Sturm-Liouvilleschen Reihen	352
§ 3. Die Summation der Sturm-Liouvilleschen Reihen	356
§ 4. Verallgemeinerungen	359
Kapitel III.	
Über eine Klasse von orthogonalen Funktionensystemen.	
§ 1. Das orthogonale Funktionensystem χ	361
§ 2. Entwicklungen nach dem orthogonalen Funktionensystem χ	363
§ 3. Weitere Eigenschaften des orthogonalen Funktionensystems χ	368
§ 4. Verschiedene Verallgemeinerungen	369

Einleitung.

In der Theorie der Reihenentwicklung der reellen Funktionen spielen die sog. *orthogonalen Funktionensysteme* eine führende Rolle. Man versteht darunter ein System von unendlichvielen Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$, die in

*) Die vorliegende Arbeit ist, bis auf unwesentliche Änderungen, ein Abdruck meiner im Juli 1909 erschienenen Göttinger Inauguraldissertation.

bezug auf die beliebige meßbare Punktmenge M die *Orthogonalitätseigenschaft*

$$\int_{(M)} \varphi_p(s) \varphi_q(s) ds = 0 \quad (p \neq q, p, q = 1, 2, \dots),$$

$$\int_{(M)} (\varphi_p(s))^2 ds = 1 \quad (p = 1, 2, \dots)$$

besitzen, wobei die Integrale im Lebesgueschen Sinne genommen sind; erfüllen sie noch die sog. *Vollständigkeitsrelation*

$$\int_{(M)} (u(s))^2 ds = \left\{ \int_{(M)} u(s) \varphi_1(s) ds \right\}^2 + \left\{ \int_{(M)} u(s) \varphi_2(s) ds \right\}^2 + \dots$$

identisch für alle in der Punktmenge M nebst ihrem Quadrate integrierbaren Funktionen $u(s)$, so nennen wir das System nach Hilbert ein *vollständiges orthogonales Funktionensystem* oder auch kürzer ein *vollständiges Orthogonalsystem* des Integrationsbereiches M .

Die formal gebildete unendliche Reihe

$$\varphi_1(s) \int_{(M)} f(t) \varphi_1(t) dt + \varphi_2(s) \int_{(M)} f(t) \varphi_2(t) dt + \dots$$

nennen wir die *Fourier-Reihe* von $f(s)$ in bezug auf das orthogonale Funktionensystem $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$.

Das einfachste Orthogonalsystem ist das System der trigonometrischen Funktionen (für das Intervall $0 \leq s \leq 2\pi$)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin s, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos ns, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin ns, \dots$$

Eine große und interessante Klasse von orthogonalen Funktionensystemen entspringt aus dem sog. *Eigenwertproblem* der sich selbst adjungierten Differentialgleichungen. Dieses Problem besteht darin, diejenigen Werte des Parameters λ zu bestimmen, für die die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x) u + \lambda u = 0$$

eine Lösung besitzt, die an zwei Stellen, etwa $x = \alpha$ und $x = \beta$, homogene Randbedingungen erfüllt, beispielsweise

$$u(\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad u(\beta) = 0,$$

oder

$$\frac{du}{dx} - hu = 0 \quad \text{für} \quad x = \alpha, \quad \text{und} \quad \frac{du}{dx} + Hu = 0 \quad \text{für} \quad x = \beta.$$

Man zeigt nun, daß es, wenn die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ bestimmte Stetigkeitsbedingungen befriedigen, stets abzählbar viele solche Parameterwerte gibt, und daß die zugehörigen Lösungen ein vollständiges ortho-

gonales Funktionensystem des betrachteten Intervalles bilden. Insbesondere ist der sog. *reguläre* Fall wichtig, wo die Funktion $p(x)$ im Intervall (inkl. der Grenzen) nicht verschwindet. Man bezeichnet die so erhaltenen Funktionen als ein *Sturm-Liouvillesches Funktionensystem*. Der Fall, daß die Funktion $p(x)$ an dem einen oder an beiden Enden des Intervalls $[\alpha, \beta]$ verschwindet, ist nicht minder wichtig; die *Kugelfunktionen* und die *Besselschen Funktionen* befriedigen bekanntlich eine solche Differentialgleichung.

Wenn wir die klassisch gewordene Theorie der trigonometrischen Reihe betrachten, so sehen wir, daß sich die Resultate dieser Theorie in vier Klassen gruppieren. An erster Stelle ist die

Konvergenztheorie zu nennen, die die Aufgabe hat, hinreichende Bedingungen für eine Funktion aufzustellen, damit ihre trigonometrische Reihe konvergiere. Diesen Untersuchungen steht die

Divergenztheorie zur Seite, die sie in mannigfacher Weise ergänzt; sie zieht die Grenzen, wie weit die Konvergenztheorie vorzudringen überhaupt imstande ist. Das wichtigste Resultat dieser Theorie ist der Satz von Du Bois-Reymond, der die Existenz einer stetigen Funktion aussagt, deren trigonometrische Reihe nicht konvergiert. Damit wird aber eine

Summationstheorie notwendig, die berufen ist, in den Fällen der Divergenz einen Ersatz zu leisten. In der Tat sind verschiedene Summationsmethoden bekannt, mit deren Hilfe man die trigonometrischen Reihen aller stetigen Funktionen „summieren“ kann. Die moderne Summationstheorie der trigonometrischen Reihen wurde von L. Fejér begründet; später wurden verschiedene Resultate von Poisson und Riemann von verschiedenen Autoren als Summationsmethoden gedeutet. Die letzten und schwierigsten Probleme liefert dann die

Eindeutigkeitstheorie, die mit ihrem Hauptproblem — unter welchen Umständen eine konvergente trigonometrische Reihe die Fourier-Reihe der dargestellten Funktion ist — den Schlußstein der ganzen Theorie bildet. Durch die berühmten Arbeiten von Riemann, Cantor und Du Bois-Reymond ist man bereits in der Lage, auch diese Fragen zu beantworten.

Was nun die Theorie der mit den trigonometrischen Funktionen nahe verwandten orthogonalen Funktionen, die aus Differentialgleichungen zweiter Ordnung entspringen, betrifft, so ist bis jetzt nur die Konvergenztheorie derselben behandelt worden. Durch eine Reihe von Arbeiten*) wurde der Beweis erbracht, daß die in der Theorie der trigonometrischen Reihen angegebenen Bedingungen auch hier hinreichen, um die Konvergenz der Reihe zu sichern. Nur die Theorie der Kugelfunktionen ist über diese Resultate hinaus gefördert worden durch eine kürzlich er-

*) Von den vielen Arbeiten, die sich mit dieser Frage beschäftigen, nenne ich nur die neueren Untersuchungen von Stekloff, Zaremba, Kneser, Hilbert und Hobson.

schienene Arbeit von Herrn Fejér*), in der der Verfasser die Summationstheorie dieses Funktionensystems behandelt.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit der *Divergenztheorie und mit der Summationstheorie der orthogonalen Funktionensysteme*.

Im Kapitel I wird die Divergenztheorie behandelt; § 1 gibt eine allgemeine hinreichende Bedingung an, vermöge deren man in vielen Fällen zu einem gegebenen orthogonalen Funktionensystem eine stetige Funktion konstruieren kann, deren Fourier-Reihe in bezug auf dieses Orthogonalsystem nicht konvergiert. In § 2 und § 3 wird dieser Satz auf die Theorie der Sturm-Liouvilleschen Funktionen und auf die Kugelfunktionen angewandt zur Konstruktion einer stetigen Funktion, die nach diesen Funktionensystemen nicht entwickelbar ist.

Kapitel II ist der Summationstheorie gewidmet; in § 1 wird ein allgemeiner Hilfssatz bewiesen, auf Grund dessen die Umkehrung des im § 1 des ersten Kapitels bewiesenen Satzes möglich wird. § 2 und § 3 geben die Anwendung dieses Hilfssatzes auf die Sturm-Liouvilleschen Reihen. Man erhält das Resultat, das die Verallgemeinerung eines für trigonometrische Reihen von L. Fejér bewiesenen Satzes ist, daß, wenn man eine stetige Funktion — die nötigenfalls noch bestimmte Randbedingungen befriedigt — in eine Sturm-Liouvillesche Reihe entwickelt und aus den Partialsummen s_n dieser Reihe die arithmetischen Mittel

$$s_1, \frac{s_1 + s_2}{2}, \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3}, \dots, \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}, \dots$$

bildet, die so definierte Funktionenfolge gleichmäßig gegen die gegebene Funktion konvergiert. § 4 gibt ein allgemeines Kriterium, das zu entscheiden gestattet, ob ein gegebenes Summationsverfahren so beschaffen ist, daß mit seiner Hilfe die in bezug auf ein vorgelegtes Orthogonalsystem gebildeten Fourier-Reihen aller Funktionen, die im „Bereiche“ dieses Orthogonalsystems liegen, summierbar sind.

Die Untersuchungen des Kapitels I legen die Frage nahe: Gibt es überhaupt ein orthogonales Funktionensystem, das so beschaffen ist, daß jede stetige Funktion auf die Fouriersche Weise in eine gleichmäßig konvergente Reihe entwickelbar ist, die nach den Funktionen dieses Systems fortschreitet? Wir werden im dritten Kapitel eine ganze Klasse von Orthogonalsystemen kennen lernen, die diese Eigenschaften besitzen. Diese Funktionensysteme sind aber auch von anderen Gesichtspunkten interessant, vermöge einer Reihe von Eigenschaften, die diese Klasse auszeichnet. Diese Eigenschaften weisen darauf hin, daß es bei manchen Problemen, wo die Orthogonalsysteme nur als Hilfsmittel angewandt

*) Math. Annalen Bd. 67, S. 76.

werden, zweckmäßig sein wird, eben diese besonderen Systeme heranzuziehen, wodurch man in vielen Fällen zu einer einfacheren Darstellung des Beweisganges gelangt. In vielen Fällen aber erfordert die Natur der Aufgabe selbst die Anwendung eines solchen speziellen Funktionensystems, ohne das die Lösung der Aufgabe nicht möglich erscheint.

Kapitel I.

Divergente Reihen.

Bilden die im Intervall $[\alpha, \beta]$ definierten Funktionen

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s), \dots$$

ein vollständiges orthogonales Funktionensystem, so heiße die formal gebildete Reihe

$$\varphi_1(s) \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \varphi_1(t) dt + \varphi_2(s) \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \varphi_2(t) dt + \dots$$

die *Fourier-Reihe* der Funktion $f(s)$ in bezug auf dieses Orthogonalsystem. Brechen wir diese unendliche Reihe bei dem n^{ten} Gliede ab, so erhalten wir die endliche Summe

$$\varphi_1(s) \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \varphi_1(t) dt + \dots + \varphi_n(s) \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \varphi_n(t) dt,$$

die wir fortan mit $[f(s)]_n$ bezeichnen wollen. Schreiben wir der Kürze halber

$$K_n(s, t) = \varphi_1(s) \varphi_1(t) + \varphi_2(s) \varphi_2(t) + \dots + \varphi_n(s) \varphi_n(t),$$

so ist

$$[f(s)]_n = \int_{\alpha}^{\beta} K_n(s, t) f(t) dt.$$

§ 1.

Ein allgemeines Kriterium.

Wir legen unseren Untersuchungen ein beliebiges orthogonales Funktionensystem des Intervalls $[\alpha, \beta]$ zugrunde:

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$$

Wir bezeichnen mit a eine beliebige Stelle dieses Intervalls und betrachten die unendlichvielen Zahlen

$$\omega_n = \int_{\alpha}^{\beta} |K_n(a, t)| dt;$$

wenn die so definierten Zahlen ω_n nicht alle unterhalb einer endlichen Grenze liegen, d. h. wenn man aus der Reihe

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$$

eine Teilreihe

$$\omega_{v_1} \leq \omega_{v_2} \leq \omega_{v_3} \leq \dots$$

herausgreifen kann, deren Elemente über alle Grenzen wachsen, so kann man stets eine stetige Funktion angeben, deren Fourier-Reihe in bezug auf das zugrunde gelegte Orthogonalsystem an der Stelle $s = a$ divergiert.

Die Konstruktion dieser Funktion $F(s)$ geschieht in drei Schritten.

1) Wir konstruieren zuerst die nebst ihren Quadraten integrierbaren Funktionen

$$v_{v_1}(s), v_{v_2}(s), v_{v_3}(s), \dots,$$

die durch die Gleichung

$$v_{v_p}(s) = \text{Vorzeichen von } K_{v_p}(a, s)$$

definiert sind; d. h.

$$\begin{aligned} v_{v_p}(s) &= 1, & \text{wenn } K_{v_p}(a, s) &> 0 \\ &= -1, & \text{,,} &< 0 \\ &= 0, & \text{,,} &= 0; \end{aligned}$$

es ist also stets

$$v_{v_p}(t) K_{v_p}(a, t) = |K_{v_p}(a, t)|,$$

und folglich haben wir in unserer Bezeichnungswiese

$$[v_{v_p}(a)]_{v_p} = \int_a^{\beta} |K_{v_p}(a, t)| dt = \omega_{v_p}.$$

Die Funktionen $v_{v_p}(s)$, die überall den Betrag ≤ 1 haben, besitzen also die Eigenschaft, daß die v_p te Teilsumme ihrer Fourier-Reihe an der Stelle $s = a$ den Wert ω_{v_p} hat.

2) Sodann konstruieren wir eine Folge stetiger Funktionen

$$f_{v_1}(s), f_{v_2}(s), f_{v_3}(s), \dots,$$

die dem Betrage nach kleiner als 1 bleiben und so beschaffen sind, daß

$$\int_a^{\beta} (v_{v_p}(s) - f_{v_p}(s))^2 ds < \delta_p \quad (p = 1, 2, 3, \dots),$$

wobei δ_p eine beliebig kleine positive Größe bedeutet.*)

*) Die Konstruktion dieser Funktionen bietet gar keine Schwierigkeit. Man kann z. B. folgendermaßen verfahren: Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß $[0, 2\pi]$ das betrachtete Intervall sei, was ja keine wesentliche Einschränkung ist; wir setzen:

$$f_{v_p}(r, s) = \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(s-t) + r^2} v_{v_p}(t) dt \quad (0 < r < 1).$$

Bilden wir die ν_p te Teilsumme der Entwicklung von $f_{\nu_p}(s)$, so ist:

$$\begin{aligned} |[f_{\nu_p}(a)]_{\nu_p}| &= \left| \int_a^\beta K_{\nu_p}(a, t) f_{\nu_p}(t) dt \right| \\ &= \left| \int_a^\beta K_{\nu_p}(a, t) v_{\nu_p}(t) dt - \int_a^\beta K_{\nu_p}(a, t) (v_{\nu_p}(t) - f_{\nu_p}(t)) dt \right| \\ &\geq \omega_{\nu_p} - \left| \int_a^\beta K_{\nu_p}(a, t) (v_{\nu_p}(t) - f_{\nu_p}(t)) dt \right| \\ &\geq \omega_{\nu_p} - \sqrt{\int_a^\beta (K_{\nu_p}(a, t))^2 dt \int_a^\beta (v_{\nu_p}(t) - f_{\nu_p}(t))^2 dt}. \end{aligned}$$

Wählen wir nun die Größe δ_p so, daß

$$\sqrt{\delta_p \int_a^\beta (K_{\nu_p}(a, t))^2 dt} < \frac{\omega_{\nu_p}}{2}$$

ist, so ist also

$$|[f_{\nu_p}(a)]_{\nu_p}| > \frac{\omega_{\nu_p}}{2}.$$

Mit anderen Worten, die stetigen Funktionen $f_{\nu_p}(s)$, die dem Betrage nach kleiner als 1 bleiben, besitzen die Eigenschaft, daß die ν_p te Teilsumme ihrer Fourier-Reihe an der Stelle $s = a$ größer als $\frac{\omega_{\nu_p}}{2}$ ausfällt.

3) Wir gelangen nun zu der gesuchten Funktion $F(s)$ durch folgende Überlegung: Die ν_1 te Teilsumme der Fourier-Entwicklung der stetigen Funktion

$$F'(s) = f_{\nu_1}(s)$$

ist an der Stelle $s = a$ dem Betrage nach größer als $\frac{\omega_{\nu_1}}{2}$. Wenn diese Reihe an dieser Stelle nicht divergiert, so kann man eine Zahl G' so bestimmen, daß alle Teilsummen der Fourier-Reihe von $F'(s)$ für $s = a$ kleiner als G' sind, d. h. daß

$$|[F'(a)]_n| < G' \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

In der Theorie der trigonometrischen Reihen wird gezeigt, daß die stetigen Funktionen $f_{\nu_p}(r, s)$ dem Betrage nach kleiner als das Maximum von $|v_{\nu_p}(s)|$ bleiben, und daß

$$L \int_0^{2\pi} [f_{\nu_p}(r, s) - v_{\nu_p}(s)]^2 ds = 0$$

ist. Man kann daher r so bestimmen, daß $f_{\nu_p}(r, s)$ alle gestellten Forderungen erfüllt

Wir greifen dann aus der Reihe der Indizes

$$(1) \quad \nu' = \nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$$

einen Index, den wir etwa mit ν'' bezeichnen wollen, derart heraus, daß

$$\omega_{\nu''} > 6 \cdot 4(G' + 1)$$

ist, und bilden dann mit der zugehörigen Funktion $f_{\nu''}(s)$ die stetige Funktion

$$F''(s) = f_{\nu'}(s) + \frac{1}{4} f_{\nu''}(s).$$

Ist die Fourier-Reihe dieser stetigen Funktion $F''(s)$ nicht divergent, so kann man eine Zahl G'' bestimmen, daß für jedes n

$$|[F''(a)]_n| < G''$$

ist. Sodann bestimmen wir in der Indizes-Reihe (1) einen Index ν''' derart, daß das zugehörige

$$\omega_{\nu'''} > 6 \cdot 4^2(G'' + 2)$$

ist, und bilden die Funktion

$$F'''(s) = f_{\nu'}(s) + \frac{1}{4} f_{\nu''}(s) + \frac{1}{4^2} f_{\nu'''}(s).$$

Auf diese Weise fahren wir fort: wenn die Fourier-Reihe der stetigen Funktion

$$F^{(q-1)} = f_{\nu'}(s) + \frac{1}{4} f_{\nu''}(s) + \dots + \frac{1}{4^{q-2}} f_{\nu^{(q-1)}}(s)$$

an der Stelle $s = a$ nicht divergiert, so bestimmen wir $G^{(q-1)}$ derart, daß für jedes n

$$(2) \quad |[F^{(q-1)}(a)]_n| < G^{(q-1)}$$

ist, und greifen dann aus der Reihe (1) einen Index $\nu^{(q)}$ heraus, sodaß

$$(3) \quad \omega_{\nu^{(q)}} > 6 \cdot 4^{q-1}(G^{(q-1)} + q - 1)$$

ist; die Möglichkeit dieser Auswahl ist durch die Annahme gewährleistet, daß die ω_{ν} über alle Grenzen wachsen.

Ich behaupte nun, daß die *unendliche Reihe*

$$F(s) = f_{\nu'}(s) + \frac{1}{4} f_{\nu''}(s) + \dots + \frac{1}{4^{q-1}} f_{\nu^{(q)}}(s) + \dots$$

eine stetige Funktion darstellt, deren Fourier-Reihe in bezug auf das betrachtete Orthogonalsystem an der Stelle $s = a$ divergiert.

Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $F(s)$ folgt unmittelbar aus dem Umstande, daß alle $f_{\nu^{(q)}}$ dem Betrage nach kleiner als 1 bleiben. Um die Divergenz der Fourier-Reihe von $F(s)$ bei $s = a$ zu beweisen, zeigen wir, daß die Zahlenfolge

$$[F(a)]_{\nu'}, [F(a)]_{\nu''}, [F(a)]_{\nu'''}, \dots$$

über alle Grenzen wächst. Um etwa $[F(a)]_{\nu(q)}$ abzuschätzen, zerlegen wir die Funktion $F(s)$ in drei Summanden, wie das in der Formel

$$F(s) = \left(f_{\nu}(s) + \cdots + \frac{1}{4^{q-2}} f_{\nu(q-1)}(s) \right) + \frac{1}{4^{q-1}} f_{\nu(q)}(s) + \left(\frac{1}{4^q} f_{\nu(q+1)}(s) + \cdots \right)$$

durch die angebrachten Klammern angedeutet ist, und betrachten die $\nu^{(q)}$ te Teilsumme der Fourier-Reihe jedes einzelnen Summanden an der Stelle $s = a$. Der erste Summand — der in unserer Bezeichnungsweise $F^{(q-1)}(s)$ ist — liefert in dem Ausdrucke für $[F(a)]_{\nu(q)}$ einen Betrag, der wegen der Ungleichung (2) kleiner als $G^{(q-1)}$ ist. Der letzte Summand ist dem Betrage nach kleiner als $\frac{1}{3 \cdot 4^{q-1}}$ und der von ihm gelieferte Betrag ist daher kleiner als $\frac{\omega_{\nu(q)}}{3 \cdot 4^{q-1}}$ *). Da schließlich

$$|f_{\nu(q)}(a)|_{\nu(q)} > \frac{\omega_{\nu(q)}}{2}$$

ist, so folgt daraus

$$|[F(a)]_{\nu(q)}| > \frac{\omega_{\nu(q)}}{2 \cdot 4^{q-1}} - G^{(q-1)} - \frac{\omega_{\nu(q)}}{3 \cdot 4^{q-1}} = \frac{\omega_{\nu(q)}}{6 \cdot 4^{q-1}} - G^{q-1}.$$

Zufolge der Ungleichung (3) ist daher

$$|[F(a)]_{\nu(q)}| > q - 1.$$

Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen.

Die Bedingung, daß die ω_n nicht unterhalb einer von n unabhängigen Grenze bleiben, erweist sich also als *hinreichend*, damit eine stetige Funktion existiere, deren Fourier-Reihe in bezug auf das betrachtete Orthogonalsystem nicht konvergiert. Wir werden im nächsten Abschnitte sehen, daß diese Bedingung für eine sehr ausgedehnte Klasse von Orthogonalsystemen auch *notwendig* ist.

§ 2.

Anwendung auf die Sturm-Liouvilleschen Reihen.**)

Der soeben abgeleitete Satz findet eine unmittelbare Anwendung auf die Theorie der Sturm-Liouvilleschen Reihen.

*) In der Tat, es ist, wenn $\varphi(s)$ eine beliebige Funktion bedeutet, die im ganzen Intervall $[\alpha, \beta]$ dem Betrage nach kleiner als M ist,

$$|[\varphi(a)]_{\nu(q)}| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} K_{\nu(q)}(a, t) \varphi(t) dt \right| \leq M \int_{\alpha}^{\beta} |K_{\nu(q)}(a, t)| dt = M \omega_{\nu(q)}.$$

***) Mit einer ähnlichen Methode hat Herr Lebesgue eine stetige Funktion konstruiert, deren trigonometrische Reihe divergent bzw. nicht gleichmäßig konvergent ist. (Cf. Lebesgue, *Séries trigonométriques*, S. 87) In einer kürzlich in den *Annales de Toulouse* (3^e série, t. I) erschienenen Abhandlung hat Herr Lebesgue seine Resultate verallgemeinert. Man findet daselbst manche Berührungspunkte mit der vorliegenden Arbeit.

Sind die Koeffizienten $p(x)$ und $q(x)$ der sich selbst adjungierten Differentialgleichung

$$(4) \quad L(u) \equiv \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + qu + \lambda u = 0$$

im ganzen Intervall $[\alpha, \beta]$ (einschließlich der Grenzen) von Null verschieden, so kann man den Parameter λ — auf unendlichviele Weisen — so bestimmen, daß die vorgelegte Gleichung eine Lösung besitzt, die die Randbedingungen

$$(5) \quad \frac{du}{dx} - hu = 0 \text{ für } x = \alpha, \quad \frac{du}{dx} + Hu = 0 \text{ für } x = \beta$$

befriedigt. Die so erhaltenen unendlichvielen Funktionen

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots$$

bilden ein vollständiges orthogonales Funktionensystem; wir wollen sie der Kürze halber ein *Sturm-Liouvillesches Orthogonalsystem* nennen und bemerken sofort, daß man statt der Randbedingungen (5) ein beliebiges anderes Paar von homogenen Randbedingungen wählen kann.

Um das Orthogonalsystem $u_n(x)$ zu studieren, wenden wir auf die vorgelegte Differentialgleichung eine in dieser Theorie übliche Transformation an, die von Liouville herrührt. Wir setzen

$$z = \int_{\alpha}^x (p(x))^{-\frac{1}{2}} dx \quad v(z) = (p(x))^{\frac{1}{4}} u(x).$$

Unsere Differentialgleichung geht dann in die neue Differentialgleichung

$$(4') \quad \frac{d^2 v}{dz^2} + Qv + \lambda v = 0$$

über, wobei $Q(z)$ eine durch die Funktionen $p(x), q(x)$ leicht ausdrückbare Funktion bedeutet.

Die Randbedingungen werden

$$(5') \quad \frac{dv}{dz} - h'v = 0 \text{ für } z = 0, \quad \frac{dv}{dz} + H'v = 0 \text{ für } z = \pi,$$

wobei wir der Einfachheit halber

$$\int_{\alpha}^{\beta} (p(x))^{-\frac{1}{2}} dx = \pi$$

angenommen haben — was man ja durch eine Multiplikation der unabhängigen Variablen mit einer Konstanten stets erreichen kann; h' und H' sind zwei Konstanten, die man durch die h, H leicht ausdrücken kann. Wir bezeichnen die Sturm-Liouvilleschen Funktionen, die aus der Differentialgleichung (4') entspringen, mit

$$v_1(z), v_2(z), v_3(z), \dots$$

und zeigen vorab, daß es eine *stetige Funktion gibt, deren Fourier-Reihe in bezug auf dieses Orthogonalsystem nicht konvergiert.*

Wir benutzen zu diesem Zwecke eine von Liouville herrührende und von Hobson*) verschärfte asymptotische Darstellung des n^{ten} Gliedes dieses Funktionensystems, das wir gleich so normiert denken, daß

$$\int_0^{\pi} (v_n(z))^2 dz = 1$$

ist. Es ist dann für jede Stelle des Intervalls $[0, \pi]$

$$v_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nz \left\{ 1 + \frac{\alpha_n(z)}{n^2} \right\} + \sin nz \left\{ \frac{\beta(z)}{n} + \frac{\gamma_n(z)}{n^2} \right\},$$

wobei die Funktionen $\alpha_n(z)$, $\gamma_n(z)$ und $\beta(z)$ unterhalb einer von n und z unabhängigen Grenze A bleiben. Um nun die Existenz einer stetigen Funktion zu beweisen, deren Fourier-Reihe an der Stelle $z = a$ divergiert, genügt es — nach dem im § 1 abgeleiteten Satze — zu zeigen, daß die Größen

$$\int_0^{\pi} |K_n(a, t)| dt = \int_0^{\pi} |v_1(a)v_1(t) + \dots + v_n(a)v_n(t)| dt$$

über alle Grenzen wachsen. Wir setzen zu diesem Zwecke

$$K_n(a, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1, \dots, n} \cos pa \cos pt + \Phi_n(a, t)$$

und beweisen, daß $|\Phi_n(a, t)|$ unterhalb einer von n , a und t unabhängigen Grenze bleibt,

$$\int_0^{\pi} \left| \sum_{p=1, \dots, n} \cos pa \cos pt \right| dt$$

aber über alle Grenzen wächst. Bildet man nämlich $\Phi_n(a, t)$, so erhält man erstens die Reihen

$$(6) \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \beta(t) \sum_{p=1, \dots, n} \frac{\cos pa \sin pt}{p} + \beta(a) \sum_{p=1, \dots, n} \frac{\cos pt \sin pa}{p} \right\}$$

und zweitens drei endliche trigonometrische Reihen, deren p^{te} Glieder bzw. die Nenner p^2 , p^3 , p^4 haben. Da die Zähler jedes Gliedes dieser letzten Reihen absolut genommen kleiner als A^2 sind, so sind diese Reihen dem Betrage nach sicherlich kleiner als $A^2 \sum_{p=1, 2, \dots} \frac{1}{p^2}$. Um nun auch zu

*) Cf. Hobson, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Bd. 6 (1908), S. 349.

zeigen, daß die Reihen (6) oder — was damit gleichbedeutend ist — die Reihen

$$\sum_{p=1, \dots, n} \frac{\cos pa \sin pt}{p} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{p=1, \dots, n} \frac{\cos pt \sin pa}{p}$$

unterhalb einer von n , a und t unabhängigen Grenze bleiben, zerlegen wir

$$\sum_{p=1, \dots, n} \frac{\cos pa \sin pt}{p} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{p=1, \dots, n} \frac{\sin p(t+a)}{p} + \sum_{p=1, \dots, n} \frac{\sin p(t-a)}{p} \right\},$$

$$\sum_{p=1, \dots, n} \frac{\cos pt \sin pa}{p} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{p=1, \dots, n} \frac{\sin p(t+a)}{p} + \sum_{p=1, \dots, n} \frac{\sin p(a-t)}{p} \right\}.$$

Da aber die Reihe $\sum_{p=1, 2, \dots} \frac{\sin pt}{p}$ die Fourier-Reihe der Funktion $\frac{\pi-t}{2}$ ist, so bleiben die Summen $\left| \sum_{p=1, \dots, n} \frac{\sin pt}{p} \right|$ — wie in der Theorie der trigonometrischen Reihen gelehrt wird*) — unterhalb einer von t und n unabhängigen oberen Grenze, und damit ist gezeigt, daß $|\Phi_n(a, t)|$ endlich bleibt.

Es bleibt noch übrig zu beweisen, daß die Größen

$$\omega_n = \int_0^\beta \left| \sum_{p=1, \dots, n} \cos pt \cos pa \right| dt$$

mit wachsendem n unendlich groß werden. Wir verfahren zu diesem Zwecke ähnlich wie es Herr Lebesgue an der oben genannten Stelle tut.

Um die Rechnungen abzukürzen, nehmen wir an, daß die frei gewählte Stelle $s = a$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, d. h.:

$$0 < \delta < a < \frac{\pi}{2} - \delta^{**}.$$

Nun ist

$$2 \sum_{p=1, \dots, n} \cos pt \cos pa = \frac{\sin(2n+1) \frac{t+a}{2}}{2 \sin \frac{t+a}{2}} + \frac{\sin(2n+1) \frac{t-a}{2}}{2 \sin \frac{t-a}{2}} - 1;$$

da aber der erste Summand in dieser Formel für jeden in Betracht kommenden Wert von n und t absolut genommen kleiner als die kleinere

*) Vgl. etwa Kneser, Math. Ann. Bd. 60, S. 402.

**) Wäre dies nicht der Fall, so müßte man das Integral ω_n erst in geringer Weise abändern, um unsere weiteren Überlegungen anwenden zu können; da es uns aber nur darauf ankommt, zu zeigen, daß es stetige Funktionen gibt, deren Sturm-Liouvillesche Reihe nicht konvergiert, so ist diese Einschränkung unwesentlich.

der beiden Größen $\left| \frac{1}{2 \sin \frac{\delta}{2}} \right|$ und $\left| \frac{1}{2 \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\delta}{2} \right)} \right|$ bleibt, so genügt es offenbar nachzuweisen, daß

$$\omega'_n = \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin \frac{(2n+1)(t-\alpha)}{2}}{\sin \frac{t-\alpha}{2}} \right| dt = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \left| \frac{\sin (2n+1)\vartheta}{\sin \vartheta} \right| d\vartheta$$

mit wachsendem n unendlich groß wird. Es ist nun offenbar

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \left| \frac{\sin (2n+1)\vartheta}{\sin \vartheta} \right| d\vartheta > \int_0^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \left| \frac{\sin (2n+1)\vartheta}{\vartheta} \right| d\vartheta.$$

Betrachten wir nun die Intervalle, in denen

$$|\sin (2n+1)\vartheta| > \sin \frac{\pi}{8} = \mu$$

ist;

$$i_p = \left[\pi \frac{\frac{1}{8} + p}{2n+1}, \pi \frac{\frac{7}{8} + p}{2n+1} \right]$$

ist ein solches Intervall; da

$$\int_{(i_p)}^{\mu} \frac{1}{\vartheta} d\vartheta = \mu \log \left(1 + \frac{6}{8p+1} \right)$$

ist, so ist sicherlich

$$\omega'_n \geq \mu \sum_{p=1, \dots, \nu} \log \left(1 + \frac{6}{8p+1} \right),$$

wobei ν die kleinste ganze Zahl bedeutet von der Eigenschaft, daß

$\pi \frac{\left(\frac{7}{8} + \nu \right)}{2n+1} \leq \frac{\pi-\alpha}{2}$. Nun wächst aber diese Zahl ν — die noch von n abhängt — mit wachsendem n über alle Grenzen; da ferner die unendliche Reihe

$$\sum_{p=1, 2, \dots} \log \left(1 + \frac{6}{8p+1} \right)$$

divergiert*), so kann man n so groß wählen, daß ω_n größer als eine beliebige Zahl wird.

*) Man beweist die Divergenz dieser Reihe von positiven Gliedern am einfachsten, indem man zeigt, daß das Produkt $p \log \left(1 + \frac{6}{8p+1} \right)$ für $p = \infty$ den Grenzwert $\frac{3}{4}$ hat.

Daraus können wir aber — auf Grund unseres allgemeinen Satzes in § 1 — schließen, daß es eine stetige Funktion $F(z)$ gibt, deren Fourier-Reihe in bezug auf die $v_n(z)$ an der Stelle $z = a$ divergiert.

Nachdem wir die Existenz dieser stetigen Funktion $F(z)$ bewiesen haben, ist es nun leicht zu zeigen, daß die in bezug auf die $u_n(x)$ gebildete Fourier-Reihe der stetigen Funktion

$$\bar{F}(x) = (p(x))^{-\frac{1}{4}} F \left(\int_{\alpha}^x (p(x))^{-\frac{1}{2}} dx \right)$$

divergent ist. Da nämlich vermöge unserer Substitution

$$v_n(z) = (p(x))^{\frac{1}{4}} u_n(x), \quad dz = (p(x))^{-\frac{1}{2}} dx$$

ist, so finden wir

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \bar{F}(x) u_n(x) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (p(x))^{-\frac{1}{4}} F \left(\int_{\alpha}^x (p(x))^{-\frac{1}{2}} dx \right) (p(x))^{-\frac{1}{4}} v_n(z) dx \\ &= \int_0^{\pi} F(z) v_n(z) dz. \end{aligned}$$

Da aber die Reihe

$$\sum_{n=1,2,\dots} v_n(z) \int_0^{\pi} F(z) v_n(z) dz$$

an der Stelle $z = a$ divergiert, so gilt dasselbe auch von der Reihe

$$\sum_{n=1,2,\dots} u_n(x) \int_{\alpha}^{\beta} \bar{F}(x) u_n(x) dx = (p(x))^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1,2,\dots} v_n(z) \int_0^{\pi} F(z) v_n(z) dz$$

an der Stelle $x = b$, die vermöge der Transformation

$$z = \int_{\alpha}^x (p(x))^{-\frac{1}{2}} dx$$

der Stelle $z = a$ entspricht*). Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

*) Daß es eine solche Stelle b gibt, für die $a = \int_{\alpha}^b (p(x))^{-\frac{1}{2}} dx$ ist, wenn $0 < a < \pi$, folgt unmittelbar daraus, daß die stetige Funktion $z = \int_{\alpha}^x (p(x))^{-\frac{1}{2}} dx$ an den Stellen $x = \alpha$, bzw. $x = \beta$ die Werte 0 bzw. π annimmt; es muß daher zwischen α und β eine Stelle b existieren, wo sie den zwischen 0 und π liegenden Wert a annimmt.

§ 3.

Anwendung auf die Kugelfunktionen.

Als n^{te} Kugelfunktion oder n^{tes} Legendre-Polynom $P_n(x)$ bezeichnet man diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$(7) \quad \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dy}{dx} \right) + n(n+1)y = 0,$$

die an den Stellen $x = -1$ und $x = +1$ endlich bleibt. Sind n und m verschieden, so ist

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = 0,$$

und es ist üblich, die $P_n(x)$ so zu normieren, daß

$$\int_{-1}^{+1} (P_n(x))^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

ist. Das System der Legendre-Polynome ist kein Sturm-Liouvillesches Orthogonalsystem, da in der Differentialgleichung (7) der Koeffizient von $\frac{d^2y}{dx^2}$ an den Stellen $x = 1$ und $x = -1$ verschwindet. Wir wollen zeigen, daß es stetige Funktionen gibt, deren Kugelfunktionenreihe divergiert.

Setzen wir, wie früher

$$K_n(x, t) = \sum_{p=0,1,2,\dots,n} \frac{2p+1}{2} P_p(x) P_p(t),$$

so ist die n^{te} Teilsumme der Kugelfunktionenreihe einer Funktion $f(x)$:

$$[f(x)]_n = \int_{-1}^{+1} K_n(x, t) f(t) dt,$$

und wir haben daher zu zeigen, daß die unendlich vielen Größen

$\int_{-1}^{+1} |K_n(x, t)| dt$ nicht unterhalb einer von n unabhängigen Grenze bleiben.

Wir zeigen dies für die Stelle $x = 0$.

Eine wohlbekannte Formel lehrt*), daß

$$K_n(x, t) = \frac{n+1}{2} \frac{P_{n+1}(x) P_n(t) - P_n(x) P_{n+1}(t)}{x-t}$$

*) Vgl. Christoffel, Journal für Mathematik Bd. 55, S. 73.

ist; und da $P_n(0)$ für jeden ungeraden Index verschwindet, genügt es zu beweisen, daß die Größen

$$\omega_{2n} = \frac{2n+1}{2} |P_{2n}(0)| \int_{-1}^{+1} \left| \frac{P_{2n+1}(t)}{t} \right| dt$$

mit wachsendem n unendlich groß werden. Wir wenden zu diesem Zwecke die oft gebrauchte Approximationsformel an:

$$P_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin \theta}} \left[\cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\alpha_n(\theta)}{n} \right],$$

die innerhalb des Intervalls $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ für jeden Wert des Index n die Kugelfunktionen darstellt, wobei ε eine von Null verschiedene positive Zahl bedeutet; die Funktionen $\alpha_n(\theta)$ bleiben unterhalb einer von n und θ unabhängigen Grenze, wenn $\cos \theta$ im Intervall $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ variiert. Diese Formel zeigt unmittelbar, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L \sqrt{n\pi} |P_{2n}(0)| = 1$$

ist, und daraus folgt, daß die ω_{2n} sicherlich über alle Grenzen wachsen, wenn die Größen

$$\sqrt{2n+1} \int_{-1}^{+1} \left| \frac{P_{2n+1}(t)}{t} \right| dt > \sqrt{2n+1} \int_0^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left| \frac{P_{2n+1}(t)}{t} \right| dt = \omega'_{2n}$$

mit wachsendem n unendlich groß werden. Um dies nachzuweisen, setzen wir

$$t = \cos \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \vartheta.$$

Wir erhalten

$$\omega'_{2n} = \sqrt{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| \frac{P_{2n+1} \left(\cos \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right) \right)}{\sin \vartheta} \cos \vartheta \right| d\vartheta;$$

da aber im ganzen Intervall $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$

$$\cos \vartheta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \sin \vartheta \leq \vartheta$$

ist, so finden wir

$$\omega'_{2n} > \sqrt[4]{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| \frac{\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cos \vartheta P_{2n+1} \left(\cos \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right) \right)}{\vartheta} \right| d\vartheta.$$

Es ist aber zufolge unserer Approximationsformel

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cos \vartheta P_{2n+1} \left(\cos \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right) \right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\cos \left(\left(2n + \frac{3}{2} \right) \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\alpha_{2n+1} \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right)}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left((-1)^{n+1} \sin \left(2n + \frac{3}{2} \right) \vartheta + \frac{\alpha_{2n+1} \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right)}{2n+1} \right) \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung $\sin \frac{\pi}{8} = \mu$ und wählen fortan n so groß, daß

$$\left| \frac{\alpha_{2n+1} \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right)}{2n+1} \right| < \frac{\mu}{2} \text{ ist für jeden Wert von } \vartheta, \text{ der im Intervall } \left[0, \frac{\pi}{4} \right]$$

liegt. Ist ϑ zwischen den Grenzen $\pi \frac{1}{8} + p$ und $\pi \frac{7}{8} + p$ eingeschlossen, $2n + \frac{3}{2}$ $2n + \frac{3}{2}$

wobei p eine ganze Zahl bedeutet, so ist sicherlich

$$\left| \sin \left(2n + \frac{3}{2} \right) \vartheta \right| > \mu$$

und da $\left| \frac{\alpha_{2n+1} \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right)}{2n+1} \right| < \frac{\mu}{2}$ ist, so finden wir

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cos \vartheta P_{2n+1} \left(\cos \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right) \right) > \frac{\mu}{2\sqrt{\pi}}.$$

Wir haben folglich für das zwischen diesen Grenzen genommene Integral:

$$\int_{(\vartheta)} \left| \frac{\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cos \vartheta P_{2n+1} \left(\cos \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right) \right)}{\vartheta} \right| d\vartheta > \frac{\mu}{2\sqrt{\pi}} \log \left(1 + \frac{6}{8p+1} \right).$$

Nun liegen aber die Intervalle $\left[\pi \frac{1}{8} + p, \pi \frac{7}{8} + p \right]$ im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$,

sowie $0 \leq p \leq \frac{n-1}{2}$ ist, und wir erhalten also

$$\omega'_{2n} > \frac{\sqrt[4]{2}\mu}{2\sqrt{\pi}} \sum_{p=1,2,\dots,\frac{n-1}{2}} \log \left(1 + \frac{6}{8p+1} \right).$$

Aus der Divergenz der unendlichen Reihe $\sum_{p=1, \dots} \log \left(1 + \frac{6}{8p+1} \right)$ folgt aber unmittelbar, daß die $\omega'_2 n$ über alle Grenzen wachsen, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Unser allgemeines Kriterium ist ohne jede Schwierigkeit auch in solchen Fällen anwendbar, wo man die Orthogonalreihen mit irgend einem *Summationsverfahren* „summieren“ will. Man versteht darunter folgendes: Die unendlichvielen in der Punktmenge M definierten Funktionen

$$a_1(n), a_2(n), a_3(n), \dots$$

besitzen die Eigenschaft, daß für einen bestimmten Wert, etwa für $n = n_0$, der Häufungsstelle der Punktmenge M ist,

$$L_{n=n_0} a_p(n) = 1 \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

ist. Betrachten wir nun eine beliebige unendliche Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots,$$

die aber so beschaffen ist, daß die Reihe

$$a_1(n)u_1 + a_2(n)u_2 + a_3(n)u_3 + \dots$$

für jeden Wert von n , der der Punktmenge M angehört, konvergiert. Existiert nun der Limes:

$$S = L_{n=n_0} (a_1(n)u_1 + a_2(n)u_2 + a_3(n)u_3 + \dots),$$

so sagen wir, daß die vorgelegte Reihe mit Hilfe der durch die Funktionen $a_p(n)$ gegebenen Summationsmethode summierbar ist, und ordnen ihr S als „Summe“ zu.

Wenn die unendlichen Reihen:

$$K(n; a, t) = a_1(n) \varphi_1(a) \varphi_1(t) + a_2(n) \varphi_2(a) \varphi_2(t) + \dots$$

für jeden in Betracht kommenden Wert von n konvergieren, so liefern die Untersuchungen des § 1 den folgenden Satz: Ist

$$\lim. \sup. \int_{\alpha}^{\beta} |K(n; a, t)| dt = \infty,$$

so kann man eine stetige Funktion angeben, deren Fourier-Reihe (in bezug auf die $\varphi_p(s)$) an der Stelle $s = a$ mit Hilfe des durch das Funktionensystem $a_p(n)$ gegebenen Summationsverfahrens nicht summierbar ist.

Kapitel II.

Theorie der Summation.

Ist

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s), \dots$$

ein beliebiges im Intervall $[\alpha, \beta]$ definiertes orthogonales Funktionensystem, so sagen wir, daß eine im Intervall $[\alpha, \beta]$ definierte Funktion $f(s)$ dem „Bereich“ dieses Funktionensystems angehört, wenn man zu jeder beliebig kleinen Zahl δ n Konstanten c_1, \dots, c_n so bestimmen kann, daß im ganzen Intervall

$$|f(s) - c_1 \varphi_1(s) - c_2 \varphi_2(s) - \dots - c_n \varphi_n(s)| < \delta$$

ist. Die Menge dieser Funktionen $f(s)$ bildet den *Bereich* des vorgelegten Orthogonalsystems. Dieser Begriff spielt in der Summationstheorie eine überaus wichtige Rolle, da man nur für Funktionen des Bereiches die Fourier-Reihe so summieren kann, daß die durch Summation entstandene Funktionenfolge gleichmäßig konvergent sei. Übrigens ist dieser Begriff des Bereiches bei den bekannten Beispielen ein sehr umfassender; beispielsweise besteht er bei den trigonometrischen Funktionen, bei den Legendre-Polynomen oder auch bei einem beliebigen Orthogonalsystem, das aus einer Differentialgleichung entspringt, aus allen stetigen Funktionen, die nötigenfalls noch bestimmte Randbedingungen befriedigen. Allgemein können wir sagen: sind alle *analytischen* Funktionen nach den Funktionen eines Orthogonalsystems entwickelbar, so gehören alle *stetigen* Funktionen des Intervalls — vermöge des bekannten Weierstraßschen Satzes — zu dem Bereiche dieses Funktionensystems.

§ 1.

Ein Hilfssatz.

Wir haben im Kapitel I bewiesen, daß man, wenn das vorgelegte orthogonale Funktionensystem eine bestimmte Bedingung erfüllt, immer eine stetige Funktion angeben kann, deren in bezug auf dieses System gebildete Fourier-Reihe an einer gegebenen Stelle divergiert. Wir werden jetzt zeigen, daß diese Bedingung für diejenigen Orthogonalsysteme, deren Bereich alle stetigen Funktionen umfaßt, auch *notwendig* ist, damit eine solche Funktion existiere. Zu diesem Zwecke beweisen wir folgenden einfachen Hilfssatz*):

*) Als Spezialfall dieses Satzes ergibt sich ein von Herrn H. Lebesgue ausgesprochenes Theorem (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo Bd. 26 (1908), S. 325).

Jeder Funktion $f(s)$ einer bestimmten Funktionenklasse möge eine Reihe reeller Funktionen $f_1(s), f_2(s), \dots$ zugeordnet sein; in Zeichen

$$f(s) \sim f_1(s), f_2(s), \dots$$

Diese Zuordnung besitze folgende Eigenschaften:

A) Ist

$$f(s) \sim f_1(s), f_2(s), \dots$$

und

$$g(s) \sim g_1(s), g_2(s), \dots,$$

so ist

$$f(s) + g(s) \sim f_1(s) + g_1(s), f_2(s) + g_2(s), \dots$$

B) Es sei für jedes s stets $|f_p(s)|$ kleiner als die obere Grenze von $|f(s)|$ multipliziert mit einer Größe M , die für alle Funktionen der Klasse dieselbe ist: $|f_p(s)| < M \cdot \text{Max } |f(s)|$.

Wenn nun $f'(s), f''(s), \dots$ eine Reihe von Funktionen sind, die gleichmäßig in s gegen die Funktion $f(s)$ konvergieren, und wenn die zu $f^{(n)}(s)$ vermöge unserer Zuordnung zugeordnete Funktionenfolgen gleichmäßig in s bzw. gegen $F^{(n)}(s)$ konvergieren, d. h. gleichmäßig in s die Limesgleichungen bestehen

$$(8) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} f_p^{(n)}(s) = F^{(n)}(s),$$

so konvergiert die zu $f(s)$ zugeordnete Funktionenfolge gleichmäßig gegen eine Funktion $F(s)$, und es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)}(s) = F(s).$$

Aus der Konvergenz der Reihe $f'(s), f''(s), \dots$ gegen die Funktion $f(s)$ folgt nämlich, daß bei hinreichend großen q und q' :

$$|f^{(q)}(s) - f^{(q')}(s)| < \varepsilon$$

ist, wie klein auch ε gewählt sei; da ferner, wegen unserer ersten Annahme, die zu der Funktion $f^{(q)}(s) - f^{(q')}(s)$ zugeordnete Reihe aus den Differenzen $f_p^{(q)}(s) - f_p^{(q')}(s)$ besteht, so folgt aus der zweiten Annahme, daß

$$(9) \quad |f_p^{(q)}(s) - f_p^{(q')}(s)| < \varepsilon M$$

ist für genügend große q und q' und beliebiges p . Da aber die Limesgleichungen (8) bestehen, so können wir zu den festgewählten Indizes q, q' den Index p noch so groß wählen, daß

$$|F^{(q)}(s) - f_p^{(q)}(s)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |F^{(q')}(s) - f_p^{(q')}(s)| < \varepsilon$$

wird. Aus den letzten drei Ungleichungen folgt aber durch Addition

$$|F^{(q)}(s) - F^{(q')}(s)| < (M + 2)\varepsilon$$

und diese Ungleichung sagt aus, daß die Funktionen $F^{(n)}(s)$ gleichmäßig gegen eine Funktion $F(s)$ konvergieren.

Um zu zeigen, daß diese Funktion $F(s)$ der gleichmäßige Limes der zu $f(s)$ zugeordneten Funktionenfolge $f_1(s), f_2(s), \dots$ ist, bemerken wir, daß bei genügend großem n und beliebigem p

$$|f_p^{(n)}(s) - f_p(s)| < \varepsilon M$$

ausfällt. Dies folgt aus unseren Annahmen A) und B) genau so, wie die oben abgeleitete Ungleichung (9). Wir wählen n überdies so groß, daß

$$|F(s) - F^{(n)}(s)| < \varepsilon$$

ist, und bestimmen dann zu diesem festen Index n eine Größe P derart, daß

$$|F^{(n)}(s) - f_p^{(n)}(s)| < \varepsilon$$

ist, sowie $p > P$ ist. Durch Addition der letzten drei Ungleichungen erkennen wir, daß

$$|F(s) - f_p(s)| < (M+2)\varepsilon$$

ist für jedes hinreichend große p ; damit aber ist unser Satz bewiesen*).

Wir wollen aus diesem Satz sofort eine wichtige Folgerung ziehen.

Wir ordnen jeder Funktion $f(s)$ die Funktionen $f_p(s)$ zu, die im ganzen Intervall $[\alpha, \beta]$ den Wert haben, den die p^{te} Teilsumme der in bezug auf das Orthogonalsystem $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$ gebildeten Fourier-Reihe von $f(s)$ an einer beliebigen Stelle, etwa $s = a$, annimmt:

$$f_p(s) = [f(a)]_p = \int_{\alpha}^{\beta} K_p(a, t) f(t) dt.$$

Diese Zuordnung erfüllt offenbar die Bedingung A). Ist aber noch außerdem

$$\int_{\alpha}^{\beta} |K_p(a, t)| dt < M,$$

wo M eine von p unabhängige Zahl bedeutet, so ist auch unsere zweite Annahme B) erfüllt. Verstehen wir unter $\varphi(s)$ irgend ein endliches Aggregat unserer Orthogonalfunktionen

$$\varphi(s) = a_1 \varphi_1(s) + \dots + a_n \varphi_n(s),$$

so konvergiert offenbar die zu $\varphi(s)$ zugeordnete Funktionenfolge gleichmäßig gegen den Wert dieser Funktion an der Stelle $s = a$. Ist nun $f(s)$ eine beliebige Funktion des Bereiches unseres Orthogonalsystems, so können wir aus den soeben betrachteten Funktionen $\varphi(s)$ eine gleichmäßig

* Man beachte, daß bei dem Beweise dieses Satzes der Umstand, daß die auftretenden Funktionen nur von einer Veränderlichen abhängen, gar nicht benutzt wurde. Der Satz bleibt daher richtig, wenn alle vorkommenden Funktionen von mehreren unabhängigen Variablen abhängen.

gegen $f(s)$ konvergente Folge $\varphi'(s)$, $\varphi''(s)$, ... herausgreifen. Nach dem soeben bewiesenen Hilfssatze muß dann auch die zu $f(s)$ zugeordnete Reihe

$$[f(a)]_1, [f(a)]_2, \dots$$

gegen $f(a)$ konvergieren. Damit ist aber gezeigt, daß, wenn

$$\int_{\alpha}^{\beta} |K_p(a, t)| dt < M \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

ist, die Fourier-Reihe jeder Funktion, die dem Bereiche dieses Orthogonalsystems angehört, an der Stelle $s = a$ konvergiert. Dieser Satz lehrt, daß in dem sehr allgemeinen Falle, daß der Bereich unseres Orthogonalsystems alle stetigen Funktionen enthält, die S. 336 gegebene hinreichende Bedingung für die Existenz einer nach diesem Orthogonalsystem nicht entwickelbaren stetigen Funktion auch *notwendig* ist.

§ 2.

Anwendung auf die Theorie der trigonometrischen und Sturm-Liouvilleschen Reihen.

Mit Rücksicht auf die folgenden Ausführungen wollen wir vorab zwei Sätze aus der klassischen Theorie der trigonometrischen Reihen auf Grund unseres Hilfssatzes S. 350 ableiten:

1) Durch das sog. Poissonsche Integral

$$f_r(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(s-t) + r^2} f(t) dt$$

wird jeder Funktion $f(s)$ eine Funktionenmenge $f_r(s)$ zugeordnet. Diese Zuordnung erfüllt offenbar die Annahme A) unseres Hilfssatzes. Da aber

$$\frac{1-r^2}{1-2r \cos(s-t) + r^2}$$

stets positiv ist, wenn $r < 1$ ist, und da infolgedessen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1-r^2}{1-2r \cos(s-t) + r^2} \right| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1,2,\dots} r^n \cos n(s-t) \right\} dt = 1 \end{aligned}$$

ist, für jeden in Betracht kommenden Wert von r und s , so folgt, daß $f_r(s)$ absolut genommen kleiner als das Maximum von $|f(s)|$ ist, wie auch r und s gewählt sind. Mit anderen Worten, die durch das Poissonsche

Integral gegebene Zuordnung erfüllt auch die Annahme B). Bekanntlich ist aber für jeden Wert $r < 1$

$$f_r(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1,2,\dots} r^n \left\{ \cos ns \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt + \sin ns \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt \right\},$$

wobei die rechts stehende Reihe für $r < 1$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Wir sehen daraus, daß die zu den Funktionen $\cos ns$ bzw. $\sin ns$ zugeordneten Funktionenmengen gleichmäßig gegen diese Funktionen konvergieren, wenn der Parameter r gegen 1 konvergiert. Eine unmittelbare Folge davon ist, daß, wenn $\Phi(s)$ ein beliebiges trigonometrisches Polynom bedeutet:

$$\Phi(s) = a_0 + a_1 \cos s + a'_1 \sin s + \dots + a_n \cos ns + a'_n \sin ns,$$

die zu ihm zugeordnete Funktionenmenge gleichmäßig gegen $\Phi(s)$ konvergiert. Bedeutet nun $F(s)$ irgend eine stetige Funktion mit der Periode 2π , so kann man aus den trigonometrischen Polynomen eine Folge $\Phi'(s)$, $\Phi''(s)$, \dots herausgreifen, die gleichmäßig gegen $F(s)$ konvergiert. Unser Hilfssatz lehrt aber*), daß dann auch die zu $F(s)$ zugeordneten Funktionen

$$F_r(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(s-t) + r^2} F(t) dt$$

für $r = 1$ gleichmäßig gegen $F(s)$ konvergieren, wenn $F(s)$ eine stetige periodische Funktion bedeutet.

2) Die Fejérsche Summationsmethode der trigonometrischen Reihen. Ist $F(s)$ eine periodische Funktion, so braucht bekanntlich die Reihe

$$[F(s)]_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(s-t)}{\sin \frac{s-t}{2}} F(t) dt$$

nicht zu konvergieren. Setzen wir aber

$$[F^*(s)]_n = \frac{[F(s)]_0 + [F(s)]_1 + \dots + [F(s)]_{n-1}}{n},$$

so konvergiert, wie Herr Fejér gezeigt hat, die Folge dieser $[F^*(s)]_n$

* Der Umstand, daß die zugeordnete Funktionenmenge nicht abzählbar, sondern von der Mächtigkeit des Kontinuums ist, ist offenbar unwesentlich.

gleichmäßig gegen $F(s)$. In der Tat man findet durch eine einfache Rechnung

$$[F^*(s)]_n = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 n \frac{s-t}{2}}{\sin^2 \frac{s-t}{2}} F(t) dt.$$

Durch diese Formel ist jeder Funktion $F(s)$ die Funktionenfolge $[F^*(s)]_n$ zugeordnet; diese Zuordnung erfüllt die Annahme A), und da

$$\frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 n \frac{s-t}{2}}{\sin^2 \frac{s-t}{2}} dt = 1$$

ist, ist auch die Annahme B) erfüllt. Man sieht auch leicht ein, daß die zu den trigonometrischen Polynomen zugeordneten Funktionenfolgen gleichmäßig gegen diese Funktionen konvergieren. Daraus folgt aber auf Grund unseres Hilfssatzes und des oben genannten Weierstraßschen Theorems der Satz von Herrn Fejér.

3) Wir machen schließlich noch eine Anwendung von unserem Hilfssatze auf die *Konvergenztheorie der Sturm-Liouvilleschen Reihen*.

An den Bezeichnungen des vorigen Kapitels (S. 340) festhaltend, betrachten wir das dort behandelte Sturm-Liouvillesche Orthogonalsystem $v_1(z), v_2(z), \dots$ und setzen wieder

$$K_n(z, t) = v_1(z)v_1(t) + \dots + v_n(z)v_n(t).$$

Wir haben (S. 341) bewiesen, daß die Differenz:

$$\Phi_n(z, t) = K_n(z, t) - \frac{2}{\pi} \sum_{p=1, \dots, n} \cos pz \cos pt$$

dem Betrage nach unterhalb einer von n, z und t unabhängigen oberen Grenze Φ liegt; daraus schließen wir, daß die durch das Integral

$$(10) f_n(z) = \int_0^\pi \left\{ K_n(z, t) - \frac{2}{\pi} \sum_{p=1, \dots, n} \cos pz \cos pt \right\} f(t) dt = \int_0^\pi \Phi_n(z, t) f(t) dt$$

gegebene Zuordnung die Voraussetzungen unseres Hilfssatzes befriedigt. Bedeutet nun $\varphi(z)$ irgend eine *analytische* Funktion, die also dem Bereiche beider Orthogonalsysteme

$$1, \cos z, \cos 2z, \dots, \text{ und } v_1(z), v_2(z), v_3(z), \dots$$

angehört, so konvergieren bekanntlich beide Integrale:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{p=1, \dots, n} \cos pz \cos pt \varphi(t) dt \quad \text{und} \quad \int_0^\pi K_n(z, t) \varphi(t) dt$$

mit wachsendem n gleichmäßig gegen $\varphi(z)$, da die Fourier-Reihen dieser Funktionen in bezug auf beide Orthogonalsysteme gleichmäßig konvergieren. Folglich hat das Integral

$$\int_0^{\pi} \Phi_n(z, t) \varphi(t) dt$$

den Grenzwert Null. Unser Hilfssatz lehrt nun, daß das Integral (10) auch dann gegen Null konvergiert, wenn $f(z)$ eine beliebige Funktion ist, die durch die Funktionen $\varphi(z)$ gleichmäßig approximierbar ist. Mit anderen Worten, unser Integral konvergiert gegen Null, wenn $f(z)$ eine beliebige stetige Funktion ist. Es folgt daraus unmittelbar der folgende Satz:

Sei $f(z)$ eine beliebige stetige Funktion; die Fourier-Reihe dieser Funktion in bezug auf das Orthogonalsystem $v_1(z), v_2(z), \dots$ konvergiert bzw. divergiert, je nachdem die Kosinus-Reihe dieser Funktion konvergent oder divergent ist.

Ist nun $F(z)$ eine beliebige im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion, so konstruieren wir eine Folge von stetigen Funktionen: $f'(z), f''(z), \dots$ derart, daß

$$L \int_0^{\pi} |F(z) - f^{(p)}(z)| dz = 0$$

ist. Es ist dann offenbar für jedes p

$$\left| \int_0^{\pi} \Phi_n(z, t) F(t) dt \right| \leq \Phi \int_0^{\pi} |F(t) - f^{(p)}(t)| dt + \left| \int_0^{\pi} \Phi_n(z, t) f^{(p)}(t) dt \right|.$$

Aus dieser Ungleichung schließen wir mit Hilfe des soeben bewiesenen Satzes, daß

$$L \int_0^{\pi} \Phi_n(z, t) F(t) dt = 0$$

ist, d. h. die Sturm-Liouvillesche Entwicklung einer integrablen Funktion ist an einer Stelle konvergent bzw. divergent, je nachdem die Kosinus-Reihe dieser Funktion an dieser Stelle konvergent oder divergent ist**).

Man sieht auch sofort, wie diese Sätze eventuell zu modifizieren sind, wenn man statt der Randbedingungen (5) (S. 340) irgend ein anderes Paar von homogenen Randbedingungen zugrunde legt.

*) Bei Zugrundelegung der Randbedingungen (5) bzw. (5') umfaßt nämlich der Bereich des Funktionensystems $v_1(z), v_2(z), \dots$ alle stetigen Funktionen.

***) Diese Bemerkung gestattet einen neuen Beweis des Satzes, daß es stetige Funktionen gibt, deren Sturm-Liouvillesche Reihen divergieren.

§ 3.

Die Summation der Sturm-Liouvilleschen Reihen.

Wir wollen nun zeigen, daß die von Herrn Fejér auf die trigonometrischen Reihen angewandte Summationsmethode bei den Sturm-Liouvilleschen Reihen mit demselben Erfolg anwendbar ist.

Wir halten an den Bezeichnungen des § 2 des ersten Kapitels fest und betrachten im Intervall $[\alpha, \beta]$ die Eigenfunktionen $u_1(x), u_2(x), \dots$ der Differentialgleichung

$$(4) \quad L(u) \equiv \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) + qu + \lambda u = 0, \\ (p(x) > 0 \text{ im Intervall } [\alpha, \beta])$$

mit einem Paar von homogenen Randbedingungen

$$(5) \quad \frac{du}{dx} - hu = 0 \text{ für } x = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{du}{dx} + Hu = 0 \text{ für } x = \beta.$$

Die Eigenfunktionen der vermöge der Liouvilleschen Transformation aus (4) entstehenden Differentialgleichung mögen wiederum mit $v_1(z), v_2(z), \dots$ bezeichnet werden. Wegen der S. 344 abgeleiteten Relationen zwischen den beiden Orthogonalsystemen $u_n(x)$ und $v_n(z)$ genügt es offenbar, sich auf dieses letzte System zu beschränken, da die für diese erhaltenen Resultate ohne jede Schwierigkeit auf das Funktionensystem $u_n(x)$ übertragbar sind.

Sei $f(z)$ eine beliebige Funktion, deren Fourier-Reihe

$$\sum_{n=1,2,\dots} v_n(z) \int_0^\pi f(z) v_n(z) dt$$

ist; wir betrachten die aus den Teilsummen dieser Reihe gebildeten arithmetischen Mittel

$$[f^*(z)]_1 = [f(z)]_1, \quad [f^*(z)]_2 = \frac{[f(z)]_1 + [f(z)]_2}{2},$$

$$[f^*(z)]_3 = \frac{[f(z)]_1 + [f(z)]_2 + [f(z)]_3}{3}, \dots$$

Setzen wir nun in gleicher Weise wie früher

$$(11) \quad K_n^*(z, t) = \frac{K_1(z, t) + K_2(z, t) + \dots + K_n(z, t)}{n},$$

so ist

$$[f_n^*(z)]_n = \int_0^\pi K_n^*(z, t) f(t) dt.$$

Ordnen wir nun jeder Funktion $f(z)$ die so definierten Funktionen

$$[f^*(z)]_1, [f^*(z)]_2, [f^*(z)]_3, \dots$$

zu, so befriedigt diese Zuordnung offenbar die Annahme A) unseres Hilfssatzes S. 350. Ist außerdem $f(z) = v_n(z)$, so ist die zu $v_n(z)$ zugeordnete Funktionenfolge:

$$0, 0, \dots, 0, \frac{v_n(z)}{n}, \frac{2v_n(z)}{n+1}, \dots, \frac{pv_n(z)}{n+p}, \dots$$

und wir sehen, daß diese Funktionenfolge für $p = \infty$ gleichmäßig gegen $v_n(z)$ konvergiert. Es folgt daraus auch unmittelbar, daß, wenn $v(z)$ ein endliches Aggregat von der Form

$$v(z) = a_1 v_1(z) + \dots + a_n v_n(z)$$

(mit konstanten Koeffizienten a) bedeutet, die dieser Funktion zugeordnete Funktionenfolge gleichmäßig gegen $v(z)$ konvergiert. Erfüllt nun diese Zuordnung auch die Annahme B) unseres Hilfssatzes, so kann man daraus schließen, daß die *Fourier-Reihe jeder Funktion, die im Bereiche des orthogonalen Funktionensystems $v_n(z)$ liegt, durch die Methode des arithmetischen Mittels summierbar ist.*

Es genügt aber, um dies zu zeigen, offenbar zu beweisen, daß das Integral

$$\int_0^\pi |K_n^*(z, t)| dt$$

unterhalb einer von n und z unabhängigen Grenze M bleibt. Nun ist aber (cf. S. 341)

$$K_n(z, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1, \dots, n} \cos pz \cos pt + \Phi_n(z, t),$$

und wir haben an jener Stelle gezeigt, daß $\Phi_n(z, t)$ unterhalb einer von n, z und t unabhängigen Grenze bleibt. Da aber

$$K_n^*(z, t) = \frac{\sum_{p=1} \cos pz \cos pt + \sum_{p=1, 2} \cos pz \cos pt + \dots + \sum_{p=1, \dots, n} \cos pz \cos pt}{n} + \frac{\Phi_1(z, t) + \dots + \Phi_n(z, t)}{n}$$

ist, so folgt daraus, daß $\int_0^\pi |K_n^*(z, t)| dt$ sicherlich unterhalb einer endlichen Grenze liegt, da

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \left| \frac{\sum_{p=1}^n \cos pz \cos pt + \dots + \sum_{p=1, \dots, n} \cos pz \cos pt}{n} \right| dt \\
&= \frac{1}{2n} \int_0^\pi \left| -(n+1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2(n+1) \frac{z+t}{2}}{\sin^2 \frac{z+t}{2}} + \frac{\sin^2(n+1) \frac{z-t}{2}}{\sin^2 \frac{z-t}{2}} \right) \right| dt \\
&\leq \frac{n+1}{2n} \pi + \frac{1}{4n} \int_0^\pi \left| \frac{\sin^2(n+1) \frac{z+t}{2}}{\sin^2 \frac{z+t}{2}} + \frac{\sin^2(n+1) \frac{z-t}{2}}{\sin^2 \frac{z-t}{2}} \right| dt \\
&= \frac{n+1}{2n} \pi + \frac{n+1}{4n} \pi = \frac{3(n+1)}{4n} \pi
\end{aligned}$$

ist, und $\frac{\Phi_1(z, t) + \dots + \Phi_n(z, t)}{n}$ kleiner als eine von n, z, t unabhängige Zahl bleibt.

Damit ist gezeigt, daß auch die zweite Annahme unseres Hilfssatzes erfüllt ist, und wir erhalten das Resultat*):

Die Sturm-Liouvillesche Entwicklung einer Funktion, die im Bereiche des betrachteten Sturm-Liouvilleschen Orthogonalsystems liegt, ist stets durch die Methode des arithmetischen Mittels summierbar.

Legt man die Randbedingungen (5) zugrunde, so besteht der Bereich des betrachteten Orthogonalsystems aus allen stetigen Funktionen (da alle zweimal differenzierbaren Funktionen, die die Randbedingung (5) erfüllen, entwickelbar sind); daraus folgt der folgende Satz: *Entwickelt man eine stetige Funktion $f(x)$ auf die Fouriersche Weise in eine Reihe, die nach den die Randbedingungen (5) erfüllenden Eigenfunktionen der Differentialgleichung (4) fortschreitet, so konvergiert die Folge der arithmetischen Mittel $[f^*(x)]_n$ gleichmäßig gegen die Funktion $f(x)$ **).*

Legt man statt der Randbedingungen (5) ein anderes Paar von Bedingungen zugrunde, etwa

$$(12) \quad u(\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad u(\beta) = 0,$$

so kann man in genau derselben Weise den Satz beweisen, daß die Folge

*) Natürlich kann man diesen Satz auch aus dem Satze S. 355 ableiten, doch scheint es zweckmäßig zu sein, diesen sehr verallgemeinerungsfähigen Weg einzuschlagen.

**) Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist, daß, wenn die Sturm-Liouvillesche Reihe einer stetigen Funktion $f(s)$ an der Stelle $s = a$ konvergiert, ihre Summe gleich $f(a)$ ist.

der arithmetischen Mittel $[f^*(x)]_n$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert, wenn $f(x)$ im Bereich der $u_n(x)$ liegt. Dabei ist aber zu beachten, daß der Bereich jetzt aus den stetigen Funktionen gebildet wird, die an den Stellen $x = \alpha$ und $x = \beta$ verschwinden, d. h.: *Entwickelt man eine die Randbedingung (12) erfüllende stetige Funktion nach den Eigenfunktionen der Differentialgleichung (4), die die Randbedingung (12) befriedigen, so ist diese Reihe nach der üblichen Terminologie „einfach unbestimmt“, d. h. die aus den Partialsummen $[f(s)]_n$ gebildete Folge der arithmetischen Mittel $\frac{[f(s)]_1 + \dots + [f(s)]_n}{n}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion $f(s)$.* Entsprechend ist der Satz zu modifizieren, wenn man ein anderes Paar von homogenen Randbedingungen zugrunde legt.

§ 4.

Verallgemeinerungen.

Die Untersuchungen dieses Kapitels sind unmittelbar auf die Entwicklung von Funktionen mehrerer Veränderlichen anwendbar, da unser Hilfssatz — der die alleinige Grundlage der Beweise dieses Abschnittes ist — auch in diesen allgemeineren Fällen richtig bleibt. (Cf. S. 350.)

Brechen wir die formal gebildete Fourier-Reihe einer Funktion $f(s, \sigma)$ in bezug auf das Orthogonalsystem $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$

$$(13) \quad \sum_{(p)} \sum_{(q)} \varphi_p(s) \varphi_q(\sigma) \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t, \tau) \varphi_p(t) \varphi_q(\tau) dt d\tau$$

bei dem Gliede mit den Indizes n, m ab, so bezeichnen wir die so erhaltene endliche Summe mit $[f(s, \sigma)]_{n,m}$:

$$[f(s, \sigma)]_{n,m} = \sum_{p=1, \dots, n} \sum_{q=1, \dots, m} \varphi_p(s) \varphi_q(\sigma) \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t, \tau) \varphi_p(t) \varphi_q(\tau) dt d\tau.$$

In unserer Bezeichnungswaise (S. 335) ist

$$(13') \quad [f(s, \sigma)]_{n,m} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} K_n(s, t) K_m(\sigma, \tau) f(t, \tau) dt d\tau.$$

Erfüllt diese Zuordnung die Bedingungen unseres Hilfssatzes, so können wir schließen, daß die Entwicklung jeder Funktion zweier Variabler, die im Bereiche unseres Orthogonalsystems liegt, gleichmäßig gegen diese Funktion konvergiert.

Kehren wir nun zu den Sturm-Liouvilleschen Funktionensystemen zurück; man zeigt leicht, daß für dieses System die Formel (13') die Voraussetzung B) unseres Hilfssatzes nicht erfüllt. Die Zuordnung

$$(14) \quad [f^*(s, \sigma)]_{n,n} = \int_0^\pi \int_0^\pi K_n^*(s, t) K_n^*(\sigma, \tau) f(t, \tau) dt d\tau,$$

wobei $K^*(s, t)$ die durch die Formel (11)₂ S. 356 definierte Funktion bedeutet, befriedigt aber beide Voraussetzungen unseres Hilfssatzes, da wir gezeigt haben, daß

$$\int_0^\pi |K_n^*(s, t)| dt$$

unterhalb einer von n, s und t unabhängigen oberen Grenze liegt. Es folgt daraus unmittelbar, daß die durch (14) definierte Funktionenfolge gleichmäßig gegen $f(s, \sigma)$ konvergiert, wenn diese Funktion im Bereiche des betrachteten Sturm-Liouvilleschen Systems liegt.

Es entspricht dieser Tatsache das folgende Summationsverfahren: Aus den Teilsummen $[f]_{n,m}$, der zweifach unendlichen Reihe (13) bilde man die einfache Folge:

$$(15) \quad [f^*]_{n,n} = \frac{1}{n^2} \sum_{p=1, \dots, n} \sum_{q=1, \dots, n} [f]_{p,q} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Liegt nun die Funktion $f(s, \sigma)$ im Bereiche des betrachteten Sturm-Liouvilleschen Funktionensystems, so konvergiert die Folge (15) gleichmäßig gegen $f(s, \sigma)^*$.

Wir machen schließlich noch eine Anwendung von unserem Hilfssatze auf die allgemeine Theorie der Summation von Orthogonalreihen. Es sei ein Summationsverfahren durch die unendlichvielen Funktionen

$$a_1(n), a_2(n), a_3(n), \dots$$

gegeben; wenn die Summe:

$$K(n; a, t) = \sum_{p=1, 2, \dots} a_p(n) \varphi_p(a) \varphi_p(t)$$

konvergiert, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung, daß die Fourier-Reihe jeder Funktion, die dem Bereich des vorgelegten Orthogonalsystems angehört, mit Hilfe dieses Summationsverfahrens an der Stelle a „summierbar“ sei, daß das Integral

$$\int_a^\beta |K(n; a, t)| dt$$

unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze bleibt.

) Man könnte statt der einfachen Folge $[f^]_{n,n}$ auch eine Doppelfolge $[f^*]_{n,m}$ von derselben Eigenschaft definieren, doch diese „einfache“ Summation ist der anderen vorzuziehen.

Kapitel III.

Über eine Klasse von orthogonalen Funktionensystemen.

Zweck dieses Abschnittes ist es, eine Klasse von orthogonalen Funktionensystemen zu behandeln, die, neben einer Reihe von sonstigen merkwürdigen Eigenschaften, besonders dadurch ausgezeichnet sind, daß die in bezug auf diese Systeme gebildeten *Fourier-Reihen jeder stetigen Funktion konvergieren und die Funktion darstellen*. In den §§ 1—3 betrachten wir den einfachsten Repräsentanten dieser Klasse; § 4 wird dann die Verallgemeinerung der gewonnenen Sätze auf weitere Systeme geben.

§ 1.

Das orthogonale Funktionensystem χ .

Das vollständige orthogonale Funktionensystem χ , den einfachsten Repräsentanten jener Klasse von Orthogonalsystemen, definieren wir wie folgt:

Es sei $\chi_0(s) = 1$ im ganzen Intervall $[0, 1]$ einschließlich der Grenzen; sodann sei:

$$\begin{aligned} \chi_1(s) &= 1 \quad \text{für } 0 \leq s < \frac{1}{2}, \\ &= -1 \quad \text{für } \frac{1}{2} < s \leq 1. \end{aligned}$$

Wir setzen ferner:

$$\begin{aligned} \chi_2^{(1)}(s) &= \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \chi_2^{(2)}(s) = 0 \quad \text{für } 0 \leq s < \frac{1}{4}, \\ &= -\sqrt{2} \quad \quad \quad = 0 \quad \text{„} \quad \frac{1}{4} < s < \frac{1}{2}, \\ &= 0 \quad \quad \quad = \sqrt{2} \quad \text{„} \quad \frac{1}{2} < s < \frac{3}{4}, \\ &= 0 \quad \quad \quad = -\sqrt{2} \quad \text{„} \quad \frac{3}{4} < s \leq 1. \end{aligned}$$

Auf diese Weise fahren wir fort; allgemein definieren wir die Funktionen unseres Systems folgendermaßen: Wir teilen das Intervall $[0, 1]$ in 2^n gleiche Teile und bezeichnen diese Teilintervalle der Reihe nach mit $i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \dots, i_n^{(2^n)}$. Wir setzen nun:

$$\begin{aligned} \chi_n^{(k)} &= 0 \quad \text{innerhalb der Intervalle } i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \dots, i_n^{(2^k-2)}; \\ &= \sqrt{2^{n-1}} \quad \text{innerhalb des Intervalles } i_n^{(2^k-1)}; \\ &= -\sqrt{2^{n-1}} \quad \text{innerhalb des Intervalles } i_n^{(2^k)}; \\ &= 0 \quad \text{innerhalb der Intervalle } i_n^{(2^k+1)}, \dots, i_n^{(2^n)} \end{aligned}$$

($k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$).

An den Stellen 0 und 1 erteilen wir jeder Funktion $\chi_n^{(k)}(s)$, die im Intervall $\left[0, \frac{1}{2^n}\right]$ bzw. $\left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right]$ konstant ist, den Wert zu, den sie bzw. in diesen Intervallen annimmt. Demnach ist $\chi_n^{(k)}(s)$ eine streckenweise konstante Funktion, die mit der Ausnahme der Stellen $\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}$, wo sie einen endlichen Sprung erleidet, überall stetig ist. Wir setzen nun fest, daß $\chi_n^{(k)}$ an diesen Stellen gleich dem arithmetischen Mittel der Werte sei, die sie in den beiden daselbst zusammenstoßenden Intervallen annimmt.

Wir behaupten nun, daß die so definierten abzählbar unendlichvielen Funktionen

$$\chi: \quad \chi_0(s), \chi_1(s), \chi_2^{(1)}(s), \chi_2^{(2)}(s), \chi_3^{(1)}(s), \chi_3^{(2)}(s), \dots$$

ein vollständiges orthogonales Funktionensystem bilden. In der Tat, sind $\chi_n^{(k)}(s)$ und $\chi_\nu^{(\nu)}(s)$ zwei verschiedene Funktionen des Systems χ und ist $n > \nu$, so besitzt $\chi_\nu^{(\nu)}(s)$ in dem ganzen Intervall, wo $\chi_n^{(k)}(s)$ von Null verschieden ist, einen konstanten Wert. Es ist daher

$$\int_0^1 \chi_n^{(k)}(s) \chi_\nu^{(\nu)}(s) ds = \text{const.} \int_0^1 \chi_n^{(k)}(s) ds = 0,$$

woraus man unmittelbar schließt, daß das Funktionensystem χ die Orthogonalitätseigenschaft besitzt. Um zu zeigen, daß auch die Vollständigkeitsrelation erfüllt ist, genügt es offenbar zu beweisen, daß jede im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion $f(s)$, die für alle in Betracht kommenden Wertepaare n, k die Relation

$$(16) \quad \int_0^1 f(s) \chi_n^{(k)}(s) ds = 0$$

befriedigt, bis auf eine Nullmenge identisch verschwindet. Betrachten wir zu diesem Zwecke die Funktion

$$F(s) = \int_0^s f(s) ds;$$

wegen der Gleichung

$$\int_0^1 f(s) \chi_0(s) ds = 0$$

ist

$$F(1) = 0.$$

Die letzte Gleichung liefert in Verbindung mit der Gleichung

$$\int_0^1 f(s) \chi_1(s) ds = \int_0^{\frac{1}{2}} f(s) ds - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(s) ds$$

die Aussage, daß $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ist. Daraus und aus den Gleichungen

$$\int_0^1 f(s) \chi_2^{(1)}(s) ds = \sqrt{2} \left\{ \int_0^{\frac{1}{4}} f(s) ds - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(s) ds \right\} = 0,$$

$$\int_0^1 f(s) \chi_2^{(2)}(s) ds = \sqrt{2} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f(s) ds - \int_{\frac{3}{4}}^1 f(s) ds \right\} = 0$$

schließen wir, daß

$$F\left(\frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right) = 0$$

ist, usf. Man kann auf diese Weise folgern, daß die Funktion $F(s)$ stets gleich Null ist, wenn s ein endlicher Dualbruch von der Form $\frac{1}{2^{p_1}} + \dots + \frac{1}{2^{p_n}}$ ist, und diese Punkte bilden eine überall dichte Punktmenge. Bekanntlich ist aber die Funktion $F(s)$ eine stetige Funktion, und es ist mit Ausschluß einer Menge vom Maße Null

$$f(s) = \frac{d}{ds}(F(s)).$$

Wir schließen daraus, daß $F(s)$ im ganzen Intervall $[0, 1]$ identisch verschwindet, und daß auch $f(s)$ — von einer Punktmenge vom Maße Null abgesehen — überall Null ist. Damit ist auch die Vollständigkeit des betrachteten Orthogonalsystems bewiesen und gezeigt, daß *jede integrierbare Funktion, die die Relationen (16) befriedigt, mit Ausschluß einer Nullmenge verschwindet.*

§ 2.

Entwicklungen nach dem orthogonalen Funktionensystem χ .

Wir kommen nun zu dem wichtigsten Punkte dieser Untersuchung, indem wir zeigen, daß die *in bezug auf das soeben definierte Orthogonalsystem χ gebildete Fourier-Reihe jeder im Intervall $[0, 1]$ stetigen Funktion $f(s)$ gleichmäßig gegen diese Funktion konvergiert.*

Brechen wir die unendliche Reihe

$$\begin{aligned} & \chi_0(s) \int_0^1 f(t) \chi_0(t) dt + \chi_1(s) \int_0^1 f(t) \chi_1(t) dt + \dots \\ & + \chi_n^{(1)}(s) \int_0^1 f(t) \chi_n^{(1)}(t) dt + \dots + \chi_n^{(p)}(s) \int_0^1 f(t) \chi_n^{(p)}(t) dt + \dots \end{aligned}$$

bei irgend einem Glied, etwa bei $\chi_n^{(p)}(s) \int_0^1 f(t) \chi_n^{(p)}(t) dt$, ab; wir erhalten eine endliche Summe, die wir fortan mit $[f(s)]_n^{(p)}$ bezeichnen:

$$[f(s)]_n^{(p)} = \chi_0(s) \int_0^1 f(t) \chi_0(t) dt + \cdots + \chi_n^{(p)}(s) \int_0^1 f(t) \chi_n^{(p)}(t) dt.$$

Setzen wir analog wie früher

$$K_n^{(p)}(s, t) = \chi_0(s) \chi_0(t) + \cdots + \chi_n^{(1)}(s) \chi_n^{(1)}(t) + \cdots + \chi_n^{(p)}(s) \chi_n^{(p)}(t),$$

so ist

$$[f(s)]_n^{(p)} = \int_0^1 K_n^{(p)}(s, t) f(t) dt.$$

Die letzte Gleichung definiert unendlichviele Funktionen zweier Variabler

$$K_0(s, t), K_1(s, t), K_2^{(1)}(s, t), K_2^{(2)}(s, t), \dots$$

und wir wenden uns nun zu der Untersuchung der Eigenschaften dieser Funktionen.

Die in dem Quadrate $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ definierte Funktion $K_0(s, t)$ ist überall gleich 1. Die Funktion $\chi_1(s) \chi_1(t)$ ist innerhalb der Quadrate

$$Q_{11}: 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad Q_{22}: \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

gleich 1, in den anderen beiden Quadraten

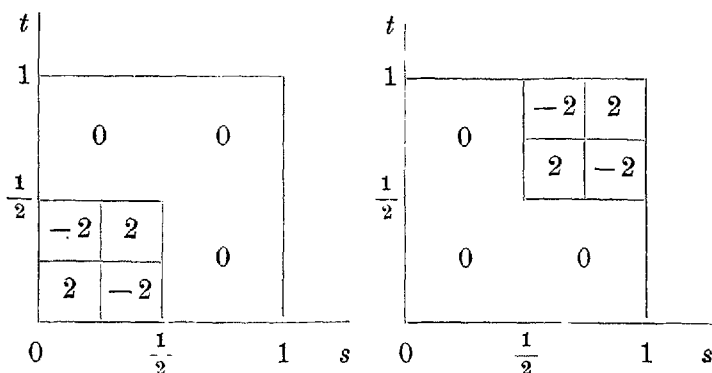
$$Q_{12}: \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad Q_{21}: 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

gleich -1; daher ist $K_1(s, t)$ in Q_{11} und Q_{22} gleich 2, in Q_{12} , Q_{21} aber gleich Null.

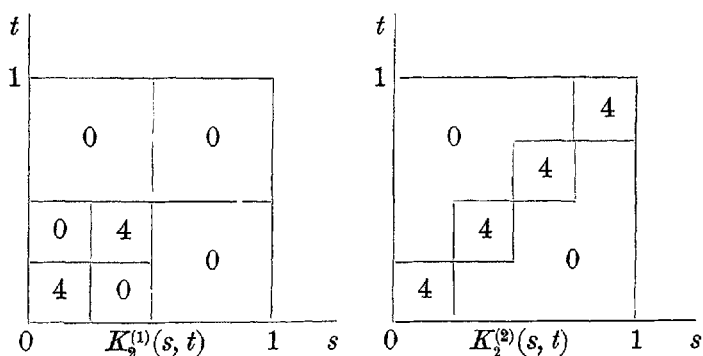
t			
1	0	2	
$\frac{1}{2}$	2	0	
	0	$\frac{1}{2}$	1
	$K_1(s, t)$		

An den Geraden $s = \frac{1}{2}$ bzw. $t = \frac{1}{2}$ ist die Funktion $K_1(s, t)$ natürlich gleich dem arithmetischen Mittel der Werte, die sie in den daselbst zusammenstoßenden Quadraten annimmt. Um noch $K_2^{(1)}(s, t)$ und $K_2^{(2)}(s, t)$

zu erhalten, zeichnen wir in der Figur die Werte an, die die Funktionen $\chi_2^{(1)}(s)\chi_2^{(1)}(t)$ bzw. $\chi_2^{(2)}(s)\chi_2^{(2)}(t)$ annehmen.



Die Werte von $K_2^{(1)}(s, t)$ und $K_2^{(2)}(s, t)$ sind daher graphisch durch die Figuren



dargestellt. Daraus ist schon das Bildungsgesetz der Funktionen $K_n^{(p)}(s, t)$ ersichtlich: Um den Wertevorrat der Funktion $K_n^{(2^n-1)}(s, t)$ zu erhalten, teilen wir das Einheitsquadrat Q in 2^{2^n} gleiche Teilquadrate; in den Teilquadraten q_1, \dots, q_{2^n} , die an der Diagonale $s = t$ des Quadrates Q liegen, ist

$$K_n^{(2^n-1)} = 2^n;$$

innerhalb der anderen Quadrate ist $K_n^{(2^n-1)}$ gleich Null. An den Stellen, wo diese Funktion einen Sprung erleidet, nimmt sie das arithmetische Mittel der Werte an, die sie in den daselbst zusammenstoßenden Quadraten besitzt. Um nun etwa $K_{n+1}^{(p)}(s, t)$ zu erhalten, teilen wir jedes der p ersten Teilquadrate q_1, q_2, \dots, q_p der vorigen Einteilung, die an der Diagonale $s = t$ liegen, in vier gleiche Quadrate ein, wie es die Figur andeutet:

$$q_x = q_x^{(1,1)} + q_x^{(1,2)} + q_x^{(2,1)} + q_x^{(2,2)} \quad (x = 1, \dots, p).$$

$q_x^{(2,1)}$	$q_x^{(2,2)}$
$q_x^{(1,1)}$	$q_x^{(1,2)}$

 q_x

Dann ist $K_{n+1}^{(p)}(s, t)$ durch folgendes Gesetz gegeben: In den Teilquadraten $q_x^{(1,1)}$, $q_x^{(2,2)}$ ist $K_{n+1}^{(p)}(s, t) = 2^{n+1}$; in den Teilquadraten $q_x^{(1,2)}$, $q_x^{(2,1)}$ aber gleich 0. Innerhalb jedes anderen Quadrates ist $K_{n+1}^{(p)}(s, t) = K_n^{(2^{n-1})}(s, t)^*$. An den Stellen, wo $K_{n+1}^{(p)}(s, t)$ unstetig wird (d. h. an denjenigen Stellen s, t , wo die eine der Größen s und t ein endlicher Dualbruch von der Form $\frac{1}{2^{p_1}} + \dots + \frac{1}{2^{p_{n+1}}}$ ist), bestimmen wir sie nach der oben erwähnten Regel.

Um die Richtigkeit dieses Gesetzes nachzuweisen, nehmen wir an, es sei für $K_n^{(2^{n-1})}(s, t)$ richtig; es ist nun

$$K_{n+1}^{(1)}(s, t) = K_n^{(2^{n-1})}(s, t) + \chi_{n+1}^{(1)}(s) \chi_{n+1}^{(1)}(t).$$

Da aber $\chi_{n+1}^{(1)}(s)$ nur im Intervalle $0 \leq s \leq \frac{1}{2^n}$ von Null verschieden ist, so kann $K_{n+1}^{(1)}(s, t)$ nur in dem Quadrate

$$0 \leq s \leq \frac{1}{2^n}, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2^n}$$

d. h. in q_1 von $K_n^{(2^{n-1})}(s, t)$ verschieden sein. Da aber

$$\begin{aligned} \chi_{n+1}^{(1)}(s) \chi_{n+1}^{(1)}(t) &= 2^n \text{ ist in den Teilquadraten } q_1^{(1,1)}, q_1^{(2,2)}, \\ &= -2^n \text{ ist in den Teilquadraten } q_1^{(1,2)}, q_1^{(2,1)}, \end{aligned}$$

so folgt, daß $K_{n+1}^{(1)}(s, t)$ den soeben angegebenen Wert hat:

$$\begin{aligned} K_{n+1}^{(1)}(s, t) &= 2^{n+1} \text{ in } q_1^{(1,1)}, q_1^{(2,2)} \\ &= 0 \quad \text{in } q_1^{(1,2)}, q_1^{(2,1)}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit $f(s)$ eine beliebige im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion, die im Intervall $[0, 1]$ definiert ist, und mit $s = a$ eine beliebige Stelle des Intervalls. Es ist dann

$$[f(a)]_n^{(p)} = \int_0^1 K_n^{(p)}(a, t) f(t) dt;$$

nehmen wir für den Augenblick an, daß a kein endlicher Dualbruch von der obigen Form sei, so ist die Funktion $K_n^{(p)}(a, t)$ von t überall gleich Null mit Ausnahme eines Intervalls $i_n^{(p)}$, dessen Länge $l_n^{(p)}$ gleich $\frac{1}{2^{n-1}}$.

*) d. h. gleich 2^n in den Teilquadraten q_{p+1}, \dots, q_{2^n} und gleich 0, wenn der Punkt s, t nicht in einem dieser Quadrate liegt.

oder $\frac{1}{2^n}$ ist. In diesem Intervall $i_n^{(p)}$ ist aber $K_n^{(p)}(a, t) = \frac{1}{\bar{i}_n^{(p)}}$ und wir finden daher

$$[f(a, t)]_n^{(p)} = \frac{1}{\bar{i}_n^{(p)}} \int_{(i_n^{(p)})} f(t) dt.$$

Ist hingegen a ein endlicher Dualbruch, so ist $K_n^{(p)}(s, t)$ in einem Intervalle $\bar{i}_n^{(p)}$ von Null verschieden, dessen Länge

$$\bar{i}_n^{(p)} = \frac{1}{2^{n-2}} \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{2^{n-1}}$$

ist; der Wert von $K_n^{(p)}(s, t)$ in diesem Intervall ist aber gleich $\frac{1}{\bar{i}_n^{(p)}}$, und wir erhalten daher auch in diesem Falle

$$[f(a)]_n^{(p)} = \frac{1}{\bar{i}_n^{(p)}} \int_{(\bar{i}_n^{(p)})} f(t) dt.$$

In beiden Fällen ist daher die Länge des Integrationsintervalls — das den Punkt $t = a$ enthält — gleich dem reziproken Wert des vor dem Integral stehenden Faktors.

Nun konvergieren aber $i_n^{(p)}$ und $\bar{i}_n^{(p)}$ mit wachsendem n gegen Null, und es konvergieren daher die Partialsummen $[f(a)]_n^{(p)}$ gegen

$$L \frac{1}{i_n^{(p)}} \int_{(i_n^{(p)})} f(t) dt.$$

Da die Intervalle $i_n^{(p)}$ sich mit wachsendem n in den Punkt $t = a$ zusammenziehen, so ist dieser Grenzwert nichts anderes als der Wert des

Differentialquotienten von $\int_0^s f(t) dt$ nach s an der Stelle $s = a$:

$$L \frac{1}{i_n^{(p)}} \int_{(i_n^{(p)})} f(t) dt = \left[\frac{d}{ds} \left(\int_0^s f(t) dt \right) \right]_{s=a},$$

und wir haben das Resultat: *Ist $f(s)$ eine beliebige Funktion, so konvergieren die Teilsummen ihrer Entwicklung an jeder Stelle $s = a$, wo der Differential-*

quotient $\frac{d}{ds} \left(\int_0^s f(t) dt \right)$ existiert, und stellen diesen Wert dar.

Da aber — nach einem Satze von Lebesgue —

$$\frac{d}{ds} \left(\int_0^s f(t) dt \right)$$

mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null überall existiert und mit $f(s)$ übereinstimmt, so folgt daraus: *die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Funktionen unseres Orthogonalsystems konvergiert an jeder Stelle mit Ausnahme einer Punktmenge vom Maße Null.*

Ist aber $f(s)$ an jeder Stelle des Intervalls stetig, so ist bekanntlich für jede Stelle ohne Ausnahme

$$f(s) = \frac{d}{ds} \left(\int_0^s f(t) dt \right),$$

d. h. *die Fourier-Entwicklung einer beliebigen stetigen Funktion (in bezug auf unser Orthogonalsystem χ) konvergiert an jeder Stelle des Intervalls $[0, 1]$.*)*

§ 3.

Weitere Eigenschaften des orthogonalen Funktionensystems χ .

Wir wollen jetzt einige weitere Eigenschaften unseres Funktionensystems ableiten, die jenen Sätzen der Theorie der trigonometrischen Reihen entsprechen, die man dort durch verschiedene Summationsmethoden erhält.

Aus dem Umstande, daß die Funktionen $K_n^{(p)}(s, t)$ stets positiv sind, schließen wir folgenden Satz:

Bleibt die im Intervall $[0, 1]$ im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion $f(s)$ zwischen den Grenzen m und M :

$$m \leq f(s) \leq M,$$

so bleiben auch alle Teilsummen der in bezug auf χ gebildeten Fourier-Reihe von $f(s)$ zwischen diesen Grenzen:

$$m \leq [f(s)]_n^{(p)} \leq M.$$

In der Tat, es ist z. B.

$$[f(s)]_n^{(p)} = \int_0^1 K_n^{(p)}(s, t) f(t) dt \leq M \int_0^1 K_n^{(p)}(s, t) dt = M.$$

Es sei nun $s = a$ eine beliebige Stelle des Intervalls $[0, 1]$. Da bei genügend großem n die Funktionen $K_n^{(p)}(a, t)$ sicherlich verschwinden, wenn

$$0 \leq t \leq a - \varepsilon$$

oder wenn

$$a + \varepsilon \leq t \leq 1$$

*) In einer kürzlich in den „Jahresberichten der deutschen Mathematiker-Vereinigung“ (1910) erschienenen Note hat Herr Faber mein Orthogonalsystem zum Gegenstande seiner Untersuchungen gemacht und leitet meine Sätze von neuem ab. Sein Beweisverfahren ist aber von dem hier gegebenen nicht wesentlich verschieden.

ist, wie klein auch die positive Zahl ε gewählt ist, so ist

$$[f(a)]_n^{(p)} = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} K_n^{(p)}(a, t) f(t) dt,$$

sobald n eine bestimmte Grenze überschreitet. Da in dieser Formel das Verhalten der Funktion $f(s)$ in den Intervallen $0 \leq s \leq a - \varepsilon$ bzw. $a + \varepsilon \leq s \leq 1$ gar nicht zum Ausdruck kommt, schließen wir daraus, daß die Konvergenz der in bezug auf χ gebildeten Fourier-Reihe einer willkürlichen Funktion an der Stelle $s = a$ nur von dem Verhalten dieser Funktion in der Umgebung dieser Stelle abhängt.

Stimmen die Funktionen $f(s)$ und $g(s)$ in einem noch so kleinen Intervalle überein, so kann man einen Index N so angeben, daß, sobald $n > N$ ist, alle $[f(s)]_n^{(p)}$ und $[g(s)]_n^{(p)}$ in diesem Intervall ebenfalls übereinstimmen.

In Verbindung mit dem Hauptsatze des vorigen Paragraphen liefern diese letzten Ergebnisse den folgenden Satz: Die in bezug auf χ gebildete Fourier-Reihe einer Funktion $f(s)$ konvergiert an jeder Stetigkeitsstelle von $f(s)$ gegen diese Funktion.

§ 4.

Verschiedene Verallgemeinerungen.

Wir können das soeben konstruierte Orthogonalsystem in verschiedenen Richtungen verallgemeinern, ohne seine wesentlichen Eigenschaften zu zerstören. Wir wollen jetzt einige dieser Verallgemeinerungen andeuten.

Wir können vorab ein allgemeineres Einteilungsverfahren der s -Achse zur Konstruktion eines ähnlichen Orthogonalsystems in folgender Weise benutzen: Die erste Funktion des Systems sei wiederum gleich 1; sodann wählen wir eine beliebige Stelle im Intervall $[0, 1]$, etwa α_1 , und konstruieren eine Funktion $\bar{\chi}_1(s)$, die in den Intervallen $[0, \alpha_1]$ bzw. $[\alpha_1, 1]$ konstant ist und außerdem die beiden Bedingungen

$$\int_0^1 \bar{\chi}_1(s) ds = 0, \quad \int_0^1 (\bar{\chi}_1(s))^2 ds = 1$$

befriedigt. Wir wählen sodann zwei Stellen $\alpha_1^{(1)}$ und $\alpha_2^{(2)}$ bzw. in den Intervallen $[0, \alpha_1]$ und $[\alpha_1, 1]$ beliebig, und bestimmen die Funktionen $\bar{\chi}_2^{(1)}(s)$ und $\bar{\chi}_2^{(2)}(s)$ durch die folgende Regel: $\bar{\chi}_2^{(1)}(s)$ verschwinde in $[\alpha_1, 1]$ und nehme in den Intervallen $[0, \alpha_2^{(1)}]$ und $[\alpha_2^{(1)}, \alpha_1]$ je einen konstanten Wert an, die so gewählt sein mögen, daß

$$\int_0^1 \bar{\chi}_2^{(1)}(s) ds = 0, \quad \int_0^1 (\bar{\chi}_2^{(1)}(s))^2 ds = 1$$

ist. $\bar{\chi}_2^{(2)}(s)$ verschwinde aber in $[0, \alpha_1]$ und nehme in den Intervallen $[\alpha_1, \alpha_2^{(2)}]$ und $[\alpha_1^{(2)}, 1]$ je einen konstanten Wert an, die so gewählt seien, daß die Relationen

$$\int_0^1 \bar{\chi}_2^{(2)}(s) ds = 0, \quad \int_0^1 (\bar{\chi}_2^{(2)}(s))^2 ds = 1$$

erfüllt sind. Nun wählen wir vier Stellen $\alpha_3^{(1)}, \alpha_3^{(2)}, \alpha_3^{(3)}, \alpha_3^{(4)}$, die bezw. in den Intervallen $[0, \alpha_2^{(1)}], \dots, [\alpha_2^{(3)}, 1]$ liegen mögen, und konstruieren in entsprechender Weise die Funktionen $\bar{\chi}_3^{(1)}(s), \dots, \bar{\chi}_3^{(4)}(s)$; und so fahren wir fort. Wir setzen wiederum fest, daß an den Sprungstellen die Funktionen immer gleich dem arithmetischen Mittel der Werte seien, die sie in den daselbst zusammenstoßenden Intervallen annehmen.

Bilden die so gewählten Stellen $\alpha_n^{(p)}$ eine überall dichte Punktmenge, so können wir in genau derselben Weise wie früher S. 362 schließen, daß das so definierte Orthogonalsystem vollständig ist. Um zu zeigen, daß dieses Funktionensystem auch die Eigenschaft besitzt, daß alle stetigen Funktionen auf die Fouriersche Weise in eine Reihe entwickelbar sind, die nach den Funktionen dieses Systems fortschreitet, bemerken wir, daß die Funktionen

$$\bar{K}_n^{(p)}(s, t) = \bar{\chi}_0(s) \bar{\chi}_0(t) + \dots + \bar{\chi}_n^{(1)}(s) \bar{\chi}_n^{(1)}(t) + \dots + \bar{\chi}_n^{(p)}(s) \bar{\chi}_n^{(p)}(t)$$

für jedes Wertepaar n, p positiv bleiben und daß

$$\int_0^1 \bar{K}_n^{(p)}(s, t) dt = 1$$

ist. Bezeichnen wir also wiederum mit $[f(s)]_n^{(p)}$ die endliche Summe, die wir erhalten, wenn wir die Fourier-Reihe der Funktion $f(s)$ bei dem

Gliede $\bar{\chi}_n^{(p)}(s) \int_0^1 f(t) \bar{\chi}_n^{(p)}(t) dt$ abbrechen, so ist

$$(17) \quad [f(s)]_n^{(p)} = \int_0^1 \bar{K}_n^{(p)}(s, t) f(t) dt;$$

und da die Funktionen $\bar{K}_n^{(p)}(s, t)$ stets positiv sind, so schließen wir daraus, daß $[f(s)]_n^{(p)}$ stets zwischen dem Maximum und Minimum von $f(s)$ bleibt. M. a. W. die vermöge der Gleichung (17) gegebene Zuordnung erfüllt alle Bedingungen unseres Hilfssatzes S. 350, woraus folgt, daß die in bezug auf das betrachtete Orthogonalsystem gebildete Fourier-Reihe einer beliebigen Funktion $f(s)$ gleichmäßig gegen diese Funktion konvergiert, wenn $f(s)$ in dem Bereiche des Orthogonalsystems liegt.

Nun ist aber unmittelbar klar, daß jedes endliche Aggregat unserer Orthogonalfunktionen eine streckenweise konstante Funktion ist; umgekehrt

ist aber auch jede streckenweise konstante Funktion, die nur an endlich vielen Stellen $\alpha_n^{(p)}$ einen Sprung erleidet und an einer solchen Stelle gleich dem arithmetischen Mittel der Werte ist, die sie in den daselbst zusammenstoßenden Intervallen annimmt, ein endliches Aggregat unserer Orthogonalfunktionen. Da aber die Sprungstellen $\alpha_n^{(p)}$ überall dicht im Intervall $[0, 1]$ verteilt sind, so sehen wir unmittelbar, daß man jede stetige Funktion durch eine solche streckenweise konstante Funktion beliebig approximieren kann. Damit ist aber gezeigt, daß *der Bereich unseres Orthogonalsystems alle stetigen Funktionen umfaßt, und daher konvergiert die Fourier-Reihe jeder stetigen Funktion gleichmäßig im ganzen Intervall.* Es macht auch gar keine weiteren Schwierigkeiten, den Beweis zu erbringen, daß die Reihe jeder integrierbaren Funktion mit Ausschluß einer Nullmenge überall konvergent ist.

Eine weitere Verallgemeinerung unseres Orthogonalsystems könnten wir dadurch erhalten, daß wir statt der Zweiteilung der Intervalle eine Dreiteilung oder Vierteilung usw. vornehmen; dann definieren wir in gleicher Weise wie früher ein vollständiges orthogonales Funktionensystem, indem wir bei jeder Teilung der Intervalle ein endliches System von streckenweise konstanten Funktionen konstruieren, die auf jeder vorhergehenden Funktion orthogonal stehen und die in den geteilten Intervallen je konstante Werte annehmen. Definiert man — was ja stets möglich ist — bei *jeder* Einteilung eine solche Anzahl von Funktionen, daß keine nicht identisch verschwindende streckenweise konstante Funktion existiert, die auf allen *bisher* definierten Funktionen orthogonal steht und nur an den Einteilungspunkten *dieser* Einteilung einen endlichen Sprung erleidet, so sind — wenn die Einteilungspunkte eine überall dichte Punktmenge bilden — die so erhaltenen Funktionensysteme in dem allgemeinen Sinne vollständig, daß jede im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion, die auf allen Funktionen des Systems orthogonal steht, mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null verschwindet. Sie alle besitzen die oben angegebene Konvergenzeigenschaft, und schließlich gilt auch der Satz, daß die Konvergenz der Fourier-Reihe (in bezug auf diese Funktionensysteme) einer Funktion an einer Stelle nur von dem Verhalten der Funktion in der Umgebung dieser Stelle abhängt.