Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung.

Von

Dunham Jackson

aus Bridgewater, Mass., V. St. A.

Am 14. Juni 1911 von der hohen philosophischen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen

gekrönte Preisschrift.

Die vorliegende Preisschrift dient zugleich als Inaugural-Dissertation.

Göttingen 1911.

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei.

(W. Fr. Kaestner.)

Der Text der Aufgabe lautete:

„Bekanntlich hat Weierstraß vor 25 Jahren zuerst bewiesen, daß jede in einem Intervall stetige Funktion mit beliebiger Genauigkeit durch eine ganze rationale Funktion approximiert werden kann. Über die Abhängigkeit des hierzu erforderlichen kleinstmöglichen Grades dieses Polynoms von der vorgeschriebenen Genauigkeitsgrenze sind die ersten Untersuchungen in neuerer Zeit gemacht worden, von de la Vallée Poussin (Bulletin de l'Académie de Belgique, 1908) und Lebesgue (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 26, und Annales de la Faculté de Toulouse, Ser. 3, Bd. 1). Ob die hierbei erzielten Abschätzungen des Grades als Funktion der Genauigkeitsgrenze noch übertroffen werden können, ist ein offener Fragenkomplex.

Die Fakultät wünscht, daß in dieser Richtung ein wesentlicher Fortschritt gemacht werde; ein solcher würde z. B. in der Beantwortung der folgenden von de la Vallée Poussin (S. 403) gestellten Frage liegen: Konvergiert im Falle eines festen gegebenen Linienzuges das Produkt von Genauigkeitsgrenze und zugehörigem Minimalgrad mit ersterer gegen Null?"

Das Urteil der Fakultät war folgendes:

„Der Verfasser hat zunächst mit großer Sorgfalt und sehr übersichtlich alles zusammengestellt, was über die verschiedenartigen zum Thema gehörigen Fragen schon vorhanden war. Das war bei der Kompliziertheit der auftretenden Begriffe bereits keine leichte Aufgabe. Im Hauptteil seiner Arbeit ist Verfasser in mehreren Beziehungen über die bisherigen Grenzen des Wissens hinausgegangen. Seine Ergebnisse sind um so höher zu bewerten, als Lebesgue und de la Vallée Poussin, denen die ganzen Fragestellungen ihre Entstehung und Förderung verdanken, inzwischen d. h. seit Stellung dieser Preisaufgabe weitere Ergebnisse in dieser Richtung publiziert haben, ohne einige bestimmte Ziele zu erreichen, zu denen Verfasser gelangt.

Aus allen diesen Gründen ist die Abhandlung als eine sehr gute Bearbeitung der Preisfrage anzusehen. Der Verfasser hat sich in einen schwierigen und umfangreichen Stoff erfolgreich eingearbeitet und hat im Wettbewerb mit Mathematikern ersten Ranges die Wissenschaft um wertvolle Ergebnisse bereichert. Er hat ferner alles außerordentlich klar dargestellt, und seine Arbeit wird daher dem Forscher und dem Lernenden von großem Nutzen sein. Daher erkennt die Fakultät der Arbeit den Preis zu".

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Juli 1911.

Referent: Herr Prof. Dr. Landau.

Meinen lieben Eltern.

Einleitung.

1. Erläuterung der Aufgabe.

Weierstraß[1*)] hat im Jahre 1885 den ersten Beweis des folgenden Satzes gegeben, der seitdem auf mannigfache Weise hergeleitet worden ist[2**)]:

Ist $f(x)$ eine im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ eindeutig definierte stetige reelle Funktion der reellen Veränderlichen x, und ist δ eine willkürlich gewählte positive Größe, so gibt es eine solche ganze rationale Funktion $P(x)$, daß im ganzen Intervalle $a \leqq x \leqq b$

$$|f(x) - P(x)| < \delta$$

ist.

Es ist klar, daß im allgemeinen der Grad des Polynomes $P(x)$ höher und höher genommen werden muß, wenn man δ kleiner und kleiner wählt. Lebesgue[3] hat nun die Frage aufgeworfen, was für eine Beziehung aufgestellt werden kann zwischen δ und dem Grad eines Polynoms niedrigsten Grades, welches der obigen Ungleichung im ganzen Intervalle genügt, bei gegebener Funktion $f(x)$. Der Weise, wie wir das Problem behandeln werden, entspricht es besser, die Frage umgekehrt zu formulieren: Wenn das Intervall (a, b) und die Funktion $f(x)$ und außerdem eine obere Grenze für den Grad des Polynoms $P(x)$ gegeben sind, wie klein kann dann δ gemacht werden?

Ist $P(x)$ irgend ein bestimmtes Polynom $n$ten Grades, so hat der Ausdruck $|f(x) - P(x)|$ im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ natürlich einen

---

*) Siehe das Verzeichnis der in der Einleitung zitierten Abhandlungen auf S. 14—15.

**) Wegen einer Zusammenstellung verschiedener bis zum Jahre 1905 angewandter Beweismethoden siehe das mit der Nummer 2 zitierte Buch von Borel.

größten Wert. Dieser größte Wert ist eine Funktion der Koeffizienten von $P(x)$. Wenn man sämtliche Polynome $n$ten oder niedrigeren Grades betrachtet, so hat diese Funktion eine ganz bestimmte untere Grenze, die bei festgehaltenem a, b und $f(x)$ nur noch von n abhängt; wir können sie mit $\varphi(n)$ bezeichnen. $\varphi(n)$ ist im allgemeinen positiv. Es ist nämlich nur dann gleich Null, wenn $f(x)$ selbst ein Polynom $n$ten oder niedrigeren Grades ist. $\varphi(n)$ nimmt offenbar bei wachsendem n niemals zu. Der Weierstraßsche Satz sagt aus, daß $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(n) = 0$ ist für stetiges $f(x)$. Unsere Aufgabe besteht darin, bei gegebener Funktion $f(x)$ über den Verlauf der Funktion $\varphi(n)$ Näheres auszusagen.

Es ist nicht ohne Interesse zu bemerken, daß man der Aufgabe einen noch schärferen Sinn beilegen kann. Tschebyschef[4] hat nämlich Untersuchungen angestellt, die in der modernen Ausführung von Kirchberger[5] zu dem Ergebnis führen, daß es ein und nur ein Polynom $n$ten oder niedrigeren Grades gibt, für welches die maximale Abweichung tatsächlich die untere Grenze $\varphi(n)$ erreicht; es handelt sich also nicht bloß um eine untere Grenze, sondern um ein wirkliches Minimum. Allein die explizite Berechnung der Koeffizienten der Tschebyschefschen Polynome und der Abweichung $\varphi(n)$ ist außerordentlich mühsam, auch bei sehr einfachen stetigen Funktionen $f(x)$; man gelangt auf diese Weise nicht einmal zu der Erkenntnis, daß $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(n) = 0$ ist. Zu dieser Entdeckung führte erst das Verfahren von Weierstraß. Wir werden im folgenden von den Tschebyschefschen Methoden und Resultaten keine Anwendung machen*).

Die genaue Bestimmung der Funktion $\varphi(n)$ scheint sich elementaren Betrachtungen überhaupt zu entziehen. Unser Problem ist hier, $\varphi(n)$ asymptotisch abzuschätzen. Wir wollen bei gegebenem $f(x)$ eine einfache, für $n = \infty$ von positiven Werten aus zu 0 strebende Funktion $\psi(n)$ explizit so bestimmen, daß in der Landauschen Bezeichnung $\varphi(n) = O(\psi(n))$ bezw. $\varphi(n) = o(\psi(n))$ ist; d. h., daß es eine solche Konstante A gibt, daß für alle positiven ganzzahligen Werte der Argumente**) (wir brauchen nur solche Werte zu betrachten) von einer gewissen Stelle an $\frac{\varphi(n)}{\psi(n)} < A$ ist, bezw. daß $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} = 0$ ist.

---

*) de la Vallée Poussin hat diese Methoden in einer neulich erschienenen Abhandlung benutzt, um zu einem Satz zu kommen, den wir später besprechen werden: siehe S. 12; auch S. 15, Nr. 14.

**) Bei Landau kommen im allgemeinen alle Werte des Arguments von einer gewissen Stelle an in Betracht.

Man könnte zunächst fragen, ob es für alle stetigen Funktionen $f(x)$ eine einzige solche Funktion $\psi(n)$ gibt. Lebesgue[6]*) hat gezeigt, daß das nicht der Fall ist; d. h., daß wenn $\psi(n)$ noch so langsam gegen 0 konvergiert, man immer doch eine stetige Funktion $f(x)$ konstruieren kann, bei welcher das Verhältnis von $\varphi(n)$ zu $\psi(n)$ nicht endlich bleibt. Wir werden später diese Behauptung sehr einfach beweisen**), und zwar noch mehr***), nämlich, daß man $f(x)$ so wählen kann, daß $\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}$ nicht nur nicht endlich bleibt, sondern für $n = \infty$ unendlich wird. Wenn wir von der Funktion $f(x)$ nur voraussetzen wollen, daß sie stetig ist, können wir nur sagen, daß $\varphi(n) = o(1)$ ist; diese Relation $\varphi(n) = o(1)$ ist der Inhalt des Weierstraßschen Satzes.

Um weiter zu kommen, müssen wir über das Verhalten von $f(x)$ etwas mehr annehmen. Der Klarheit halber wollen wir die entsprechende Funktion $\varphi(n)$ mit $\varphi_{,}(n)$ bezeichnen. Nehmen wir z. B. an, daß $f(x)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, d. h., daß immer

$$|f(x_2)-f(x_1)| \leqq \lambda\,|x_2 - x_1|$$

ist, wo λ eine Konstante bedeutet, so ist es in der Tat möglich, eine Funktion $\psi(n)$ mit den verlangten Eigenschaften zu finden. Es wird unser erster Satz sein, daß in diesem Falle $\varphi_{,}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist. Nachdem wir das festgestellt haben, entsteht die Frage, ob wir $\frac{1}{n}$ dann durch eine andere Funktion ersetzen können, die noch stärker gegen 0 konvergiert. Wir werden sehen, daß das nicht der Fall ist, daß $\varphi_{,}(n)$ nicht $o\left(\frac{1}{n}\right)$ zu sein braucht†). Wir gelangen also in diesem Sinne zu einem abgeschlossenen Resultat. Sätze ähnlicher Art können auch im Falle von anderen als Lipschitz-Bedingungen aufgestellt werden. Dann würde aber noch die Frage sein, ob es etwa eine Funktion gibt, die einer Lipschitz-Bedingung genügt, und zu der trotzdem ein solches $\varphi(n)$ gehört, daß $n\varphi(n)$ nicht nur nicht den Limes 0 hat, sondern für alle n oberhalb einer festen positiven Grenze bleibt. In dem Falle könnte man erst sagen, daß $\varphi(n)$ tätsächlich die Größenordnung $\frac{1}{n}$ hat,

---

*) S. 109—112 der Abhandlung; siehe auch Zitat Nr. 13, S. 210, und eine frühere Andeutung bei de la Vallée Poussin[11], S. 221.

**) Satz XI.

***) Vgl. erste Fußnote auf S. 112 der Abhandlung 6.

†) Satz XII.

d. h., daß sowohl $\varphi(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ als auch $\frac{1}{n} = O(\varphi(n))$ ist. Diese Frage weiß ich nun nicht zu beantworten. Ich werde jedoch folgendes zeigen: Es existiert für jedes positive η ein $f(x)$, das einer Lipschitz-Bedingung genügt, für welches aber $\frac{1}{n^{1+\eta}} = O(\varphi_f(n))$ ist*), $\varphi_f(n)$ also auch nicht für ausgewählte Werte von n rascher als $\frac{1}{n^{1+\eta}}$ gegen 0 konvergiert. Ob es zu jeder Funktion $f(x)$, die einer Lipschitz-Bedingung genügt, eine Reihe von Gradzahlen $n_1, n_2, \ldots n_i, \ldots$ gibt, so daß für die Zahlen dieser Reihe $\lim\limits_{i=\infty} n_i \varphi_f(n_i) = 0$ ist, bleibt eine offene Frage.

Eine andere Frage, bei der wir nicht zu voller Aufklärung kommen, ist die, inwieweit man notwendige Bedingungen ausdrücken kann, damit $\varphi(n)$ eine gegebene Größenordnung besitzt. Wir werden sehen, daß man in der Tat in einigen Fällen aus der Größenordnung von $\varphi_f(n)$ auf die Existenz von Ableitungen von $f(x)$ schließen kann**).

Bis jetzt haben wir uns nur für gewisse Eigenschaften der Funktion $f(x)$ interessiert. Wir könnten uns natürlich ähnliche Fragen über die Annäherung einer ganz bestimmten Funktion stellen. Das wollen wir im Falle einer Funktion, die von besonderer Wichtigkeit ist, wie wir später erkennen werden, nämlich der Funktion $|x|$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$.

Daß für diese Funktion jedenfalls $\varphi_f(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist, kann man leicht zeigen, auch ohne den oben erwähnten allgemeinen Satz über Funktionen, die einer Lipschitz-Bedingung genügen. Nun bemerkt de la Vallée Poussin[7]: „Il serait très intéressant de savoir s'il est impossible de représenter l'ordonnée d'une ligne polygonale avec une approximation d'ordre supérieur à $1:n$ par un polynôme de degré n". Diese Aufgabe ist noch ungelöst. Wir werden die Schranken, in denen man die Lösung zu suchen hat, etwas zusammenziehen durch den Satz, daß $\varphi_f(n)$ von keiner höheren Ordnung der Kleinheit sein kann als $\frac{1}{n \log n}$***).

Dem Problem der Annäherung durch ganze rationale Funktionen ist ein anderes nahe verwandt, das Problem der Annäherung durch endliche trigonometrische Summen. Unter „endlicher trigonometrischer Summe" oder schlechtweg „trigonometrischer Summe"

---

*) Satz XV. **) Satz XVIII. ***) Satz IX.

$n$ter Ordnung verstehen wir in dieser Abhandlung stets einen Ausdruck von der Form

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx \\ + b_1 \sin x + \cdots + b_n \sin nx. \end{aligned}$$

Diesen speziellen Sinn wollen wir der Ausdrucksweise für unsere Zwecke etwa als Definition beilegen. Weierstraß[1] hat gezeigt, daß jede stetige periodische Funktion von der Periode 2π mit beliebiger Genauigkeit durch trigonometrische Summen gleichmäßig angenähert werden kann, und Lebesgue*) hat Untersuchungen über die Beziehung zwischen der Ordnung der Summen und der Genauigkeit der Annäherung veröffentlicht. Ist $f(x)$ eine stetige Funktion mit der Periode 2π, so hat der absolute Betrag der Differenz zwischen dieser Funktion und irgend einer vorgelegten trigonometrischen Summe einen größten Wert; die untere Grenze dieses Maximums, wenn man sämtliche trigonometrische Summen $n$ter oder niedrigerer Ordnung betrachtet, wollen wir mit $\tau(n)$ oder $\tau_f(n)$ bezeichnen. Die untere Grenze ist wieder ein Minimum, wie von Fréchet[8] und anderen bewiesen wurde. Wir werden zeigen, daß, wenn $f(x)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, dann $\tau_f(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist**); wir werden auch Sätze ableiten, die einigen anderen von den Resultaten über Annäherung durch ganze rationale Funktionen entsprechen.

Noch eine andere Aufgabe läßt sich zum Teil mit denselben Methoden behandeln, nämlich die, die Genauigkeit der möglichen Annäherung einer Funktion zweier bezw. mehrerer Variabler durch ganze rationale Funktionen der Variablen zu untersuchen.

Einen Beweis dafür, daß hier das Analogon des Weierstraßschen Satzes gilt, scheint zuerst Ingrami[9] publiziert zu haben; seitdem sind verschiedene andere Beweise gegeben worden. Entsprechende Untersuchungen Tschebyschefscher Art sind von Kirchberger[5], Tonelli[8] und Sibirani[8]). Wir bezeichnen wieder mit $\varphi(n)$ oder $\varphi_f(n)$ die untere Grenze der größten Abweichung eines Polynomes $n$ten oder niedrigeren Grades von einer Funktion f in einem gegebenen Bereiche, und gelangen zu Ergebnissen über das Verhalten dieser Funktion φ, die ähnlich sind den wichtigsten derer, die wir für eine Veränderliche erhalten.

---

*) Vgl. S. 13; Nr. 6 im Verzeichnis auf S. 14.

**) Satz VI.

2. Nähere Besprechung der Literatur.

Der Satz, der grundlegend ist für die vorliegenden Betrachtungen, und den wir an die Spitze gestellt haben, wurde, wie schon erwähnt, von Weierstraß[1] im Jahre 1885 bewiesen. Seine Methode, die von einer Darstellung der gegebenen Funktion als Limes eines bestimmten Integrales ausgeht, ist typisch für eine ganze Klasse von Beweisen desselben Satzes, die seitdem von verschiedenen Autoren gegeben worden sind, und ebenso für das Verfahren, dessen wir uns hier zur Konstruktion von Annäherungsfunktionen bedienen werden. Die Identität, die er zugrunde legt, ist folgende:

$$f(x) = \lim_{k=0} \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du,$$

wo $f(x)$ eine für alle reellen Werte von x stetige Funktion bedeutet.

Kurz nach dem Erscheinen der Weierstraßschen Abhandlung hat Runge[10] unabhängig für den Weierstraßschen Satz einen Beweis gegeben, der von einem anderen Typus ist. Man sucht zunächst nicht eine Polynomdarstellung für die Funktion $f(x)$ selbst, sondern für eine Funktion einfacherer Art, die man durch elementare Betrachtungen behandeln kann, und die so konstruiert werden kann, daß sie nur wenig von $f(x)$ abweicht; man nimmt z. B. die Funktion, die durch eine in die Kurve $y = f(x)$ einbeschriebene gebrochene Linie gegeben ist. Auch ein diesem ähnliches Verfahren ist in späteren Arbeiten vielfach angewendet worden und wird uns hier von Nutzen sein; vgl. S. 40—41 und S. 53—55.

Die Frage, wie der Grad des Annäherungspolynomes mit der Genauigkeit der erreichbaren Annäherung zusammenhängt, wurde, wie auch schon gesagt, von Lebesgue[8] im Jahre 1908 gestellt. In einer kurzen Note gibt er ein Resultat an, welches besagt, daß im Falle einer Funktion, die einer Lipschitz-Bedingung genügt, $\varphi(n) = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)$ ist.

Bei wesentlich derselben Voraussetzung über die darzustellende Funktion findet de la Vallée Poussin[11]*) durch Anwendung

---

*) S. 222 des Bandes. Er setzt explizit voraus, daß $f(x)$ in jedem Punkt eine Ableitung nach rechts und eine solche nach links hat (in den Endpunkten des Intervalls natürlich nur nach einer Seite) d. h. daß der Quotient $\frac{f(x+u)-f(x)}{u}$ für $u = 0$ einen Limes hat, jedenfalls wenn u nur positive bezw. nur negative

des früher von Landau[12] benutzten Integrals

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \frac{k_n}{2} \int_0^1 f(u)\,[1-(u-x)^2]^n du,$$

$$\frac{1}{k_n} = \int_0^1 (1-u^2)^n du,$$

das bessere Resultat, daß $\varphi(n) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ist. Kurz darauf kommt er auf das Problem zurück[7] und findet mittels des Integrals

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_a^b f(\alpha) \frac{\sin m(x-\alpha)}{x-\alpha} d\alpha,$$

daß, wenn $f(x)$ eine Ableitung*) von beschränkter Schwankung besitzt, $\varphi(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist. Von einer einfachen Lipschitz-Bedingung ist hier nicht die Rede. Das Integral, das wir brauchen werden, ist dem eben angeführten ähnlich.

Lebesgue[6]**) gibt wieder die von de la Vallée Poussin gefundene Abschätzung der Ordnung von $\varphi(n)$ im Falle einer Funktion $f(x)$, die einer Lipschitz-Bedingung genügt; er fügt eine Betrachtung des Falles hinzu, daß $f(x)$ nur der Lipschitz-Dinischen Bedingung unterworfen ist

$$\lim_{\delta=0} \omega(\delta) \log \delta = 0,$$

wo $\omega(\delta)$ die obere Grenze der Differenz zwischen Maximum und Minimum von $f(x)$ in einem Intervalle von der Länge δ bedeutet; hier findet er $\varphi(n) = o\left(\frac{1}{\log n}\right)$.

Wichtiger für unsere Zwecke ist eine andere Abhandlung von Lebesgue[13] über trigonometrische Annäherung, worin von Annäherung durch ganze rationale Funktionen ausdrücklich gar nicht die Rede ist. Wenn man den engen Zusammenhang erkennt, der zwischen den beiden Problemen der trigonometrischen und der polynomischen Annäherung besteht, wie das z. B. in unserem Satz

---

Werte annimmt, und ferner, daß diese Ableitungen beschränkt sind. Er braucht aber in dem Beweise nur die Beschränktheit von $\frac{f(x \pm u) - f(x)}{u}$ (S. 224), d. h., die Lipschitz-Bedingung.

*) Nach rechts oder nach links. Wegen der Erklärung des Ausdruckes „von beschränkter Schwankung" vgl. S. 53 des folgenden.

**) S. 112—114 des Bandes.

XVII zutage tritt, so kann man aus dem Ergebnisse von Lebesgue über die Konvergenz der Fourier-Reihen schließen, daß bei Voraussetzung der Lipschitz-Bedingung $\varphi(n) = O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ ist*). Hier ist uns das Resultat von Interesse. Wie gesagt, werden wir $\frac{1}{n}$ statt $\frac{\log n}{n}$ schreiben können (Satz I). Aber auch die Methoden der Abhandlung lassen sich an verschiedenen Stellen auf das Problem der polynomischen Annäherung anwenden, entweder unmittelbar, wie da, wo man von einer Lipschitz-Bedingung zu allgemeineren Bedingungen übergeht**) (Satz V), oder nach einer passenden Umformung, wie bei dem Beweise, daß es Funktionen gibt, die einer Lipschitz-Bedingung genügen, für die aber das $\varphi(n)$ nicht $o\left(\frac{1}{n}\right)$ ist***) (Satz XII). Besonders wichtig ist der Satz über die Beziehung zwischen der Annäherung, die man durch irgend eine trigonometrische Summe erreichen kann, und derjenigen, die durch die ersten Glieder der Fourier-Reihe der darzustellenden Funktion gegeben ist†) (Hilfssatz II). Dieser Satz ist allerdings auch schon in der vorhin genannten Lebesgueschen Abhandlung[6] ††) enthalten.

Bezüglich des Problemes, die Genauigkeitsgrenze $\varphi(n)$ im Falle der Funktion $|x|$ nach unten abzuschätzen, hat de la Vallée Poussin[14] neulich einen Beweis publiziert, daß die Ordnung der Kleinheit von $\varphi(n)$ nicht höher als die von $\frac{1}{n(\log n)^3}$ sein kann. Er benutzt dabei die Eigenschaften der Tschebyschefschen Annäherungspolynome, die sonst solche explizite Abschätzungen nicht ergeben haben. Wir werden durch andere Überlegungen auf die schärfere Abschätzung $\frac{1}{n \log n}$ als Grenze der Unbestimmtheit kommen (Satz IX).

Wenige Wochen vor dem Einlieferungstermin der Preisarbeit hat S. Bernstein[15] in einer kurzen Note ohne Einzelheiten seiner Beweise eine Reihe von Sätzen veröffentlicht, die zum Teil einigen derer, die hier folgen sollen, sehr ähnlich sind. Das ist an drei Stellen hervorzuheben. Im Falle der Funktion $|x|$ gibt diese Note dieselbe Ordnungsgrenze $\frac{1}{n \log n}$, die ich gefunden

---

*) S. 199—201 des Bandes. **) S. 202. ***) S. 202—206, 208—209.
†) S. 196—198, 201. ††) S. 116—117.
(Diese Seitenzahlen beziehen sich auf die Lebesgueschen Arbeiten.)

hatte; sie enthält ein Analogon des Satzes II, aber mit etwas weniger allgemeinen Voraussetzungen, die sich im einfachsten Falle nicht auf eine Lipschitz-Bedingung reduzieren, wie in unserem Satze I, sondern auf die Bedingung, die de la Vallée Poussin in seiner zweiten Abhandlung der Funktion $f(x)$ auferlegt hatte; und den Satz, den wir mit XVIII bezeichnen, enthält sie, nicht wie hier nur für gerade Indizes, sondern für alle Indizes. Außerdem enthält sie auch andere Sätze, die in dieser Abhandlung gar nicht vorkommen.

Was die Genauigkeitsgrenze $\tau(n)$ der trigonometrischen Annäherung angeht, hat Lebesgue[6]*) im Falle einer Funktion, die einer Lipschitz-Bedingung genügt, $\tau(n) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ gefunden, und er[13] hat es später auf $\tau(n) = O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ gebracht; wir wollen wieder $\frac{\log n}{n}$ mit $\frac{1}{n}$ ersetzen (Satz VI). Natürlich sind die weiteren Ausführungen von Lebesgue in seiner zuletzt zitierten Arbeit hier ebenso wichtig wie für das Problem der polynomischen Annäherung. Der unten mit XIII bezeichnete Satz ist dieser Arbeit entnommen.

Die Frage nach der Genauigkeit der Annäherung durch Polynome gegebenen Grades im Falle mehrerer Variabler scheint von unserem Standpunkte aus nicht untersucht worden zu sein; doch sind außer der Weierstraßschen Arbeit[16] auch die von Hobson[17] und Tonelli[18] hier zu erwähnen, wegen ihrer Andeutungen, wie die Formeln des Falles einer Veränderlichen zu verallgemeinern sind.

3. Einteilung der Arbeit.

Im ersten Abschnitt des folgenden handelt es sich um obere Abschätzung der polynomischen Annäherungsgrenze $\varphi(n)$ im Falle einer Funktion $f(x)$ einer Veränderlichen in einem gegebenen Intervalle $a \leqq x \leqq b$. Wir finden, daß, wenn $f(x)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, $\varphi(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist (Satz I), und zwar nicht nur, daß das Produkt $n\varphi(n)$ bei fest gegebenem $f(x)$ eine endliche obere Grenze hat, sondern auch, daß diese obere Grenze mit der Länge des Intervalls und dem Koeffizienten λ der Lipschitz-Bedingung proportional angenommen werden kann (Satz IV). Bei der Voraussetzung, daß $f^{(k-1)}(x)$ existiert und einer Lipschitz-Bedingung genügt,

*) S. 114—116 des Bandes.

bekommen wir $\varphi(n) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ (Satz II); im Satz III geben wir ein Resultat bezüglich der Annäherung der Funktion selbst und ihrer Ableitungen gleichzeitig*). Wir machen dann andere Voraussetzungen über die Beschaffenheit von $f(x)$, und schließlich bekommen wir zu einer allgemeinen Bedingung

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq \omega(|x_2 - x_1|)$$

die Abschätzung $\varphi(n) = O\left[\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]$ (Satz V).

Abschnitt II enthält das Analogon der Sätze I, II und V für Annäherung durch endliche trigonometrische Summen. Der Abschnitt III ist gewidmet der Untersuchung der speziellen Funktion $|x|$, sowohl für sich allein als auch in ihrer Beziehung zu anderen Funktionen, wobei wir ihre besondere Bedeutung erkennen. Die verschiedenen schon erwähnten unteren Abschätzungen von $\varphi(n)$ und $\tau(n)$ bilden den Gegenstand des vierten Abschnitts. Der des fünften ist die Ausdehnung der Sätze I und II und anderer von den früheren Resultaten auf Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Verzeichnis der oben zitierten Abhandlungen.

1. Weierstraß, „Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen". Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften, 1885, S. 633—639, 789—805. „Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente". Werke, Bd. III (1903), S. 1—37.
2. Borel, „Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes". Paris 1905, S. 50—66.
3. Lebesgue, „Sur la représentation approchée des fonctions". Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXVI, 1908, S. 325—328.
4. Tschebyschef, „Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions". Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, Sciences mathématiques et physiques, Ser. 6, Bd. VII, 1859, S. 199—291. Werke, Bd. I, S. 273—378.
5. Kirchberger, „Ueber Tchebychefsche Annäherungsmethoden". Diss. Göttingen 1902.
6. Lebesgue, „Sur les intégrales singulières". Annales de la Faculté de Toulouse, Ser. 3, Bd. I, 1910, S. 25—117.
7. de la Vallée Poussin, „Note sur l'approximation par un polynôme d'une fonction dont la dérivée est à variation bornée". Bulletins de

*) Wegen der Methode vgl. de la Vallée Poussin, Nr. 11 auf S. 15; S. 204 des Bandes.

l'Académie royale de Belgique, Classe des Sciences, 1908, S. 403—410, Anhang zu einer Arbeit „Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes", S. 319—403.

8. Fréchet, „Sur l'approximation des fonctions par des suites trigonométriques limitées". Comptes Rendus, Paris, Bd. CXLIV, 1907, S. 124—125. „Sur l'approximation des fonctions continues périodiques par les sommes trigonométriques limitées". Annales de l'École Normale Supérieure, Ser. 3, Bd. XXV, 1908, S. 43—56. Vgl. auch Young (J. W.), „General theory of approximation by functions involving a given number of arbitrary parameters". Trans. Am. Math. Soc., Bd. VIII, 1907, S. 331 bis 344. Tonelli (L.), „I polinomi d'approssimazione di Tchebychev". Annali di Matematica, Ser. 3, Bd. XV, 1908, S. 47—119. Sibirani, „Sulla rappresentazione approssimata delle funzioni". Annali di Matematica, Ser. 3, Bd. XVI, 1909, S. 203—221.
9. Ingrami, „Sulla rappresentazione analitica per una funzione reale di due variabili reali". Bologna, Gamberini e Parmeggiani. Mir ist aber nur das Referat in den „Fortschritten der Math.", Bd. XXI, Jahrgang 1889, S. 420—421, zugänglich gewesen.
10. Runge, „Über die Darstellung willkürlicher Functionen". Acta mathematica, Bd. VII, 1885, S. 387—392. Zum vollständigen Beweise des Weierstraßschen Satzes muß man eine frühere Arbeit von Runge hinzunehmen, „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen". Acta math., Bd. VI, 1885, S. 229—244; siehe S. 236. In der erstgenannten Abhandlung ist nur von rationalen Funktionen, nicht von ganzen rationalen Funktionen die Rede.
11. de la Vallée Poussin, „Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier". Bulletins de l'Académie royale de Belgique, Classe des Sciences, 1908, S. 193—254.
12. Landau, „Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion". Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXV, 1908, S. 337—345.
13. Lebesgue, „Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz". Bulletin de la Soc. Math. de France, Bd. XXXVIII, 1910, S. 184—210.
14. de la Vallée Poussin, „Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée d'un angle". Bulletins de l'Académie royale de Belgique, Classe des Sciences, 1910, S. 808—844.
15. S. Bernstein, „Sur l'approximation des fonctions continues par des polynomes". Comptes Rendus, Paris, Bd. CLII, 1911, S. 502—504.
16. Weierstraß, Werke, Bd. III (1903), S. 27—37, nicht aber in der ursprünglichen Abhandlung in den Berliner Sitzungsberichten (vgl. 1).
17. Hobson, „On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by series of normal functions". Proc. of the London Math. Soc., Ser. 2, Bd. VI, 1908, S. 349—395; siehe S. 366.
18. Tonelli (L.), „Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali". Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXIX, 1910, S. 1—36.

ABSCHNITT I.

Obere Abschätzungen der Genauigkeitsgrenze $\varphi(n)$ im Falle einer Veränderlichen.

(Annäherung durch ganze rationale Funktionen.)

1. Lipschitz-Bedingung: $\varphi(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

In diesem Abschnitt soll von der Funktion, die mit $f(x)$ bezeichnet wird, immer vorausgesetzt werden, daß sie eine in einem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ definierte stetige eindeutige reelle Funktion der reellen Veränderlichen x ist, und wenn von weiteren Bedingungen die Rede ist, denen $f(x)$ unterworfen sein soll, ist damit immer gemeint, daß diese Bedingungen auf das ganze Intervall $a \leqq x \leqq b$ Bezug haben. Unter $\varphi_f(n)$ verstehen wir die in der Einleitung erklärte Genauigkeitsgrenze der Annäherung von $f(x)$ im Intervalle (a, b) durch ein Polynom $n$ten oder niedrigeren Grades.

Wir fangen an mit der Voraussetzung, daß $f(x)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt,

$$(1) \qquad |f(x_2) - f(x_1)| \leqq \lambda\,|x_2 - x_1|,$$

wo λ eine Konstante bedeutet, und sprechen den Satz aus:

Satz I. Wenn die Funktion $f(x)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, so ist $\varphi_f(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Der Beweis wird naturgemäß den Verlauf nehmen, daß wir zeigen, wie man eine solche Folge von Polynomen $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... bezw. höchstens ersten, zweiten, ... Grades, und eine solche Konstante K finden kann, daß für alle x des Intervalls (a, b) und für alle n

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq K \cdot \frac{1}{n}$$

ist.

Das geschieht in zwei Schritten, indem wir zunächst eine Annäherungsfunktion für $f(x)$ aufstellen, die kein Polynom ist, und diese dann später durch ein Polynom ersetzen.

Der Satz folgt sofort in aller Allgemeinheit, wenn ich ihn unter der Annahme beweise, daß a und b zwischen 0 und $c = \frac{1}{2e}$ liegen. Denn irgend ein Intervall kann durch eine ganze lineare Transformation in ein solches Intervall übergeführt werden; die Gültigkeit der Lipschitz-Bedingung bleibt erhalten, bis auf eine eventuelle Änderung des Zahlwertes der Konstanten λ; und ein Polynom $n$ten Grades geht in ein Polynom $n$ten Grades über. Es wird bequem sein, diese Annahme zu machen. Wir definieren $f(x)$ dann in den Intervallen $(0, a)$ und (b, c) so, daß die Bedingung (1) im ganzen Intervalle $(0, c)$ befriedigt wird, etwa durch die Festsetzung

$$f(x) = f(a), \quad 0 \leqq x \leqq a; \qquad f(x) = f(b), \quad b \leqq x \leqq c.$$

Jene Annäherungsfunktion wird nun folgendermaßen definiert: Es sei

$$I_m(x) = \frac{k_m}{2} \int_0^c f(u) \left[\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}\right]^4 du,$$

wo

$$\frac{1}{k_m} = \int_0^c \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

gesetzt wird.

Sei ε eine Größe, die den Ungleichungen

$$0 < \varepsilon < a, \quad 0 < \varepsilon < c - b$$

genügt. Solange das Gegenteil nicht ausdrücklich betont wird, soll ε dann festgehalten werden. Es sei angenommen, daß x dem Intervalle (a, b) angehört; eine angenäherte Darstellung von $f(x)$ wird nur in diesem Intervalle gesucht. Dann ist $-x < -\varepsilon < \varepsilon < c - x$; es ist

$$\int_0^c f(u) \left[\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}\right]^4 du = \int_{-x}^{c-x} f(x+v) \left[\frac{\sin mv}{mv}\right]^4 dv$$

$$= \int_{-x}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{c-x} f(x+u) \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du.$$

Andererseits ist

$$\frac{1}{k_m} = \int_0^c \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du = \frac{1}{2}\int_{-c}^{c} \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du$$

(da der Integrand eine gerade Funktion ist)

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-c}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{c} \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du\right].$$

Wenn wir diese Gleichung mit $k_m f(x)$ multiplizieren, bekommen wir

$$f(x) = \frac{k_m}{2}\left[\int_{-c}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{c} f(x) \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du\right].$$

Demnach ist

$$(2) \quad I_m(x) - f(x) = \frac{k_m}{2}\left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left[f(x+u) - f(x)\right]\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du\right.$$

$$\left. + \int_{-x}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{c-x} f(x+u)\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du - \int_{-c}^{-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{c} f(x)\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du\right].$$

Wir haben jetzt diesen Ausdruck abzuschätzen.

Von der Abschätzung heben wir drei Teile für sich hervor, da sie später in einer verallgemeinerten Form wieder zur Anwendung kommen werden.

Abschätzung I. Es gibt eine solche von m unabhängige Konstante c_1, daß

$$\int_0^c \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du \geqq \frac{1}{c_1} \cdot \frac{1}{m}$$

ist. Denn

$$\int_0^c \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du = \frac{1}{m}\int_{u=0}^{u=c} \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 d(mu)$$

$$= \frac{1}{m}\int_0^{mc} \left[\frac{\sin v}{v}\right]^4 dv \geqq \frac{1}{m}\int_0^c \left[\frac{\sin u}{u}\right]^4 du,$$

da der Integrand nirgends negativ ist. Wir brauchen dann nur

$$\frac{1}{c_1} = \int_0^c \left[\frac{\sin u}{u}\right]^4 du$$

zu setzen.

Abschätzung II. Es gibt eine solche von m unabhängige Konstante c_2, daß

Andererseits ist

$$\frac{1}{k_m} = \int_0^c \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du = \frac{1}{2}\int_{-c}^{c} \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du$$

(da der Integrand eine gerade Funktion ist)

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-c}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{c} \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du\right].$$

Wenn wir diese Gleichung mit $k_m f(x)$ multiplizieren, bekommen wir

$$f(x) = \frac{k_m}{2}\left[\int_{-c}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{c} f(x)\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du\right].$$

Demnach ist

$$(2)\quad J_m(x) - f(x) = \frac{k_m}{2}\left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left[f(x+u) - f(x)\right]\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du\right.$$

$$\left. + \int_{-x}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{c-x} f(x+u)\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du - \int_{-c}^{-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{c} f(x)\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du\right].$$

Wir haben jetzt diesen Ausdruck abzuschätzen.

Von der Abschätzung heben wir drei Teile für sich hervor, da sie später in einer verallgemeinerten Form wieder zur Anwendung kommen werden.

Abschätzung I. Es gibt eine solche von m unabhängige Konstante c_1, daß

$$\int_0^c \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du \geqq \frac{1}{c_1}\cdot\frac{1}{m}$$

ist. Denn

$$\int_0^c \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du = \frac{1}{m}\int_{u=0}^{u=c} \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 d(mu)$$

$$= \frac{1}{m}\int_0^{mc} \left[\frac{\sin v}{v}\right]^4 dv \geqq \frac{1}{m}\int_0^c \left[\frac{\sin u}{u}\right]^4 du,$$

da der Integrand nirgends negativ ist. Wir brauchen dann nur

$$\frac{1}{c_1} = \int_0^c \left[\frac{\sin u}{u}\right]^4 du$$

zu setzen.

Abschätzung II. Es gibt eine solche von m unabhängige Konstante c_2, daß

$$\left| \int_{-c}^{-\varepsilon} f(x) \left[\frac{\sin mu}{mu} \right]^4 du \right| \leqq \frac{Mc_2}{m^4},$$

$$\left| \int_{\varepsilon}^{c} f(x) \left[\frac{\sin mu}{mu} \right]^4 du \right| \leqq \frac{Mc_2}{m^4};$$

und natürlich ist $\frac{Mc_2}{m^4} \leqq \frac{Mc_2}{m^2}$.

Nach der Bedingung (1) ist

$$|f(x+u) - f(x)| \leqq \lambda |u|,$$

also

$$\left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [f(x+u) - f(x)] \left[\frac{\sin mu}{mu} \right]^4 du \right|$$

$$\leqq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x+u) - f(x)| \left[\frac{\sin mu}{mu} \right]^4 du$$

$$\leqq \lambda \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |u| \left[\frac{\sin mu}{mu} \right]^4 du$$

$$= 2\lambda \int_{0}^{\varepsilon} u \left[\frac{\sin mu}{mu} \right]^4 du \leqq \frac{2\lambda c_3}{m^2}$$

nach Abschätzung III.

Endlich ist nach Abschätzung I

$$\frac{1}{k_m} \geqq \frac{1}{c_1 m}, \qquad \frac{k_m}{2} \leqq \frac{c_1 m}{2}.$$

Durch Einsetzen dieser Ungleichungen in (2) bekommen wir

$$|f(x) - I_m(x)| \leqq \frac{c_1 m}{2} \left[\frac{2\lambda c_3}{m^2} + \frac{4Mc_2}{m^2} \right],$$

oder, wenn wir $\frac{c_1}{2}(2\lambda c_3 + 4Mc_2) = K_1$ setzen,

$$|f(x) - I_m(x)| \leqq K_1 \cdot \frac{1}{m}.$$

Damit ist der erste Schritt des Beweises fertig.

Gehen wir nun dazu über, die Annäherungsfunktion $I_m(x)$ durch ein Polynom zu ersetzen.

$$\frac{\sin \xi}{\xi} = 1 - \frac{\xi^2}{3!} + \frac{\xi^4}{5!} - \cdots,$$

$$\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)} = 1 - \frac{m^2(u-x)^2}{3!} + \cdots + (-1)^s \frac{m^{2s}(u-x)^{2s}}{(2s+1)!}$$

$$+ (-1)^{s+1} \frac{m^{2s+2}(u-x)^{2s+2}}{(2s+3)!} + \cdots$$

$$= p_{s,m} + r_{s,m},$$

wo $p_{s,m}$ ein Polynom $2s$ten Grades in $(u-x)$ ist. Für alle Werte von u und x, die hier in Betracht kommen, ist $|u-x|<1$, und sogar $<\frac{1}{2e}$. Ist $2s+4>m$, so ist $\frac{m^2}{(2s+4)(2s+5)}<1$; vom Falle $u-x=0$ abgesehen ist daher jedes Glied in $r_{s,m}$ absolut genommen kleiner als das vorangehende. Wir haben dann wegen der abwechselnden Vorzeichen

$$|r_{s,m}| \leqq \frac{m^{2s+2}(u-x)^{2s+2}}{(2s+3)!};$$

für $u-x=0$ gilt diese Ungleichung selbstverständlich auch. Ist m gerade, so sei

$$s=\frac{m}{2}-1, \qquad m=2s+2.$$

Die Bedingung $2s+4>m$ ist erfüllt;

$$|r_{s,m}| \leqq \frac{m^m(u-x)^m}{(m+1)!} < \frac{\left(\frac{m}{2e}\right)^m}{m!}.$$

Ist m ungerade, so sei

$$s=\frac{m-1}{2}, \qquad m=2s+1<2s+4,$$

$$|r_{s,m}| \leqq \frac{m^{m+1}(u-x)^{m+1}}{(m+2)!} = \frac{m(u-x)}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{m^m(u-x)^m}{m!}$$

$$\leqq \frac{m^m|u-x|^m}{m!} < \frac{\left(\frac{m}{2e}\right)^m}{m!}.$$

Diese Ungleichung gilt also in beiden Fällen.

Es ist für alle $m \geqq 1$

$$\log(m!) = \log 1+\cdots+\log m \geqq \int_1^m \log t\,dt$$

$$= m\log m - m + 1 > \log\left(\frac{m}{e}\right)^m,$$

also

$$|r_{s,m}| < \frac{1}{2^m}.$$

$$\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)} = p_{s,m}+r_{s,m},$$

$$\left[\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}\right]^4 = p_{s,m}^4 + r_{s,m}(4p_{s,m}^3+6p_{s,m}^2 r_{s,m}+4p_{s,m}r_{s,m}^2+r_{s,m}^3)$$

$$= p_{s,m}^4+\varrho_{s,m}.$$

$$\left|\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}\right| \leqq 1, \qquad |r_{s,m}|<1, \qquad |p_{s,m}|<2,$$

$$|4p_{s,m}^3+6p_{s,m}^2 r_{s,m}+4p_{s,m}r_{s,m}^2+r_{s,m}^3| < 4.2^3+6.2^2+4.2+1 = 65,$$

$$|\varrho_{s,m}| < 65|r_{s,m}| < \frac{65}{2^m}.$$

Da $\lim\limits_{m=\infty} \frac{m^2}{2^m} = 0$ ist, hat dieses Verhältnis für positives ganzzahliges m eine endliche obere Grenze. Sei diese mit c' bezeichnet. Es ist dann

$$|\varrho_{s,m}| < \frac{65c'}{m^2}.$$

Sei $p^4_{s,m} = \pi_m$, $65c' = c_4$ gesetzt. π_m ist ein Polynom in $(u-x)$, dessen Grad $= 8s \leqq 4(m-1)$ ist. Wir können also den Satz aussprechen:

Zu der Folge von Funktionen $\left[\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}\right]^4$, $(m = 1, 2, \ldots)$, gibt es eine Folge von Polynomen $\pi_m(u-x)$, je höchstens $4(m-1)$ten Grades, und eine Konstante c_4, so daß

$$\left|\left[\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}\right]^4 - \pi_m(u-x)\right| < \frac{c_4}{m^2}$$

ist, für alle Werte u, x, die dem Intervalle $(0, c)$ angehören.

Jetzt ist der Beweis des Satzes I bald zu Ende. Sei

$$\Pi_m(x) = \frac{k_m}{2}\int_0^c f(u)\,\pi_m(u-x)\,dx,$$

$$\begin{aligned}
|I_m(x) - \Pi_m(x)| &= \left|\frac{k_m}{2}\int_0^c f(u)\left[\left[\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}\right]^4 - \pi_m(u-x)\right]du\right| \\
&\leqq \frac{k_m}{2}\int_0^c M\cdot\frac{c_4}{m^2}\,du \\
&\leqq \frac{c_1 m}{2}\cdot\frac{cMc_4}{m^2} = \frac{Mcc_1c_4}{2}\cdot\frac{1}{m},
\end{aligned}$$

$$|f(x) - \Pi_m(x)| \leqq \left(K_1 + \frac{Mcc_1c_4}{2}\right)\frac{1}{m}.$$

$\Pi_m(x)$ ist ein Polynom in x, dessen Grad höchstens $4(m-1)$ ist.

Sei nun n irgend eine positive ganze Zahl. Sei $m-1$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als $\frac{n}{4}$ ist, und sei $P_n(x) = \Pi_m(x)$ gesetzt; sei ferner $4\left(K_1 + \frac{Mcc_1c_4}{2}\right) = K$.

Dann ist $P_n(x)$ ein Polynom höchstens vom $n$ten Grade, und

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq K\cdot\frac{1}{n}.$$

Die Polynome $P_n(x)$ leisten die gesuchte Annäherung. (Der letzte Schritt ist nötig gewesen zum vollständigen Beweise des Satzes, weil die erste Folge von Annäherungspolynomen $\Pi_m(x)$ nicht für alle Gradzahlen, sondern nur für die Zahlen $4(m-1)$ gebildet war, wo m die natürliche Zahlenreihe durchläuft.)

2. Die $(k-1)$te Ableitung mit Lipschitz-Bedingung: $\varphi(n) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

Die Methoden, die wir angewendet haben, sind fähig, ein allgemeineres Theorem zu geben.

Sei $f(x)$ eine Funktion, die eine stetige $(k-1)$te Ableitung besitzt, welche überdies der Bedingung genügt

$$|f^{(k-1)}(x_2) - f^{(k-1)}(x_1)| \leqq \lambda |x_2 - x_1|. \tag{3}$$

Wir behaupten jetzt:

Satz II. Wenn die Funktion $f(x)$ eine $(k-1)$te Ableitung hat, welche einer Lipschitz-Bedingung genügt, so ist $\varphi_f(n) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

Die Bedingung ist natürlich a fortiori erfüllt, wenn $f^{(k)}(x)$ vorhanden und beschränkt ist.

Der Beweis gestaltet sich ähnlich wie beim Satz I. Wir nehmen wieder an, daß $0 < a < b < c = \frac{1}{2e}$ ist, und definieren $f(x)$ für $0 \leqq x < a$ und $b < x \leqq c$ so, daß f im ganzen Intervalle $(0, c)$ der Bedingung (3) genügt, etwa

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a) \quad (0 \leqq x < a),$$

$$f(x) = f(b) + (x-b)f'(b) + \cdots + \frac{(x-b)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(b) \quad (b < x \leqq c).$$

Ich will den Beweis zunächst für den Fall $k = 3$ führen, wodurch die allgemeine Methode angedeutet werden wird.

Sei

$$I_m(x) = \frac{k_m}{2}\int_0^c f(u) \left\{ \frac{1}{3}\left(\frac{\sin\frac{m(u-x)}{3}}{\frac{m(u-x)}{3}}\right)^6 - \frac{3}{2}\left(\frac{\sin\frac{m(u-x)}{2}}{\frac{m(u-x)}{2}}\right)^6 + 3\left[\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}\right]^6 \right\} du,$$

$$\frac{1}{k_m} = \int_0^c \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^6 du.$$

Sei ε so gewählt, daß

$$0 < \varepsilon < \frac{a}{3}, \qquad 0 < \varepsilon < \frac{c-b}{3}$$

ist.

$$\int_0^c f(u)\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{\sin\frac{m(u-x)}{3}}{\frac{m(u-x)}{3}}\right)^6 du = \int_{-\frac{x}{3}}^{\frac{c-x}{3}} f(x+3v)\left[\frac{\sin mv}{mv}\right]^6 dv$$

$$= \int_{-\frac{x}{3}}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\frac{c-x}{3}} f(x+3u)\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^6 du;$$

wir betrachten nur solche Werte von x, die dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ angehören.

$$\int_0^c f(u)\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{\sin\frac{m(u-x)}{2}}{\frac{m(u-x)}{2}}\right)^6 du$$

$$= 3\left[\int_{-\frac{x}{2}}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\frac{c-x}{2}} f(x+2u)\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^6 du\right],$$

$$\int_0^c f(u)\cdot 3\left[\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}\right]^6 du$$

$$= 3\left[\int_{-x}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{c-x} f(x+u)\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^6 du\right].$$

Wenn wir $f(x)$ ähnlich wie beim Satz I ausdrücken, finden wir

$$f(x) = \frac{k_m}{2}\left[\int_{-c}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{c} f(x)\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^6 du\right].$$

Diese Formeln ergeben:

$$I_m - f(x) = \frac{k_m}{2}\Bigg[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}[f(x+3u) - 3f(x+2u) + 3f(x+u) - f(x)]\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^6 du$$

$$+ \int_{-\frac{x}{3}}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\frac{c-x}{3}} - 3\int_{-\frac{x}{2}}^{-\varepsilon} - 3\int_{\varepsilon}^{\frac{c-x}{2}} + 3\int_{-x}^{-\varepsilon} + 3\int_{\varepsilon}^{c-x} - \int_{-c}^{-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{c}\Bigg].$$

Nach dem Taylorschen Satz ist

$$f(x+v) = f(x)+vf'(x)+\frac{v^2}{2!}f''(x+\theta v), \quad 0<\theta<1,$$

wenn x und $x+v$ dem Intervalle $(0, c)$ angehören, da f nach Voraussetzung zwei Ableitungen hat. Da ferner $f''(x)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, ist

$$|f''(x+\theta v)-f''(x)| \leqq \lambda|\theta v| \leqq \lambda|v|,$$
$$f''(x+\theta v) = f''(x)+\theta_0\lambda v, \quad |\theta_0| \leqq 1.$$

Wir können also für $0 \leqq x \leqq c$, $0 \leqq x+3u \leqq c$ schreiben

$$\begin{aligned}
f(x+3u) &= f(x)+3uf'(x)+\frac{9u^2}{2!}f''(x)+\frac{27\theta_3\lambda}{2!}u^3, & |\theta_3| \leqq 1,\\
f(x+2u) &= f(x)+2uf'(x)+\frac{4u^2}{2!}f''(x)+\frac{8\theta_2\lambda}{2!}u^3, & |\theta_2| \leqq 1,\\
f(x+u) &= f(x)+uf'(x)+\frac{u^2}{2!}f''(x)+\frac{\theta_1\lambda}{2!}u^3, & |\theta_1| \leqq 1\\
f(x) &= f(x).
\end{aligned}$$

Wenn wir den Ausdruck

$$f(x+3u)-3f(x+2u)+3f(x+u)-f(x)$$

bilden, fällt alles bis auf die Glieder dritter Ordnung weg, und wir finden

$$|f(x+3u)-3f(x+2u)+3f(x+u)-f(x)| \leqq 27\lambda|u^3|.$$

Folglich ist

$$\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}[f(x+3u)-3f(x+2u)+3f(x+u)-f(x)]\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^6 du\right|$$
$$\leqq 27\lambda\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|u^3|\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^6 du = 54\lambda\int_0^{\varepsilon}u^3\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^6 du.$$

Damit ist klar geworden, wie der jetzige Ausdruck für $I_m - f(x)$ demjenigen entspricht, den wir bei Satz I hatten. Die modifizierten Abschätzungen I, II, III gebe ich nicht speziell für diesen Fall, sondern allgemein an.

Abschätzung Ia. Ist $\varkappa$ eine positive ganze Zahl, so gibt es eine solche, von m unabhängige Konstante $c_1^{(\varkappa)}$, daß

$$\int_0^c\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^{2\varkappa} du \geqq \frac{1}{c_1^{(\varkappa)}}\cdot\frac{1}{m}$$

ist.

Wir brauchen im Beweise der Abschätzung I nur den Exponenten 4 in $2\varkappa$ zu verwandeln; wesentlich war nur, daß der Exponent gerade, der Integrand also nicht negativ war. Für die Konstante können wir

$$\frac{1}{c_1^{(\varkappa)}} = \int_0^c \left[\frac{\sin u}{u}\right]^{2\varkappa} du$$

nehmen. Ebenso einfach bekommen wir die

Abschätzung IIa. Ist $\varkappa$ eine positive ganze Zahl, so gibt es eine solche, von m unabhängige Konstante $c_2^{(\varkappa)}$, daß

$$\int_\varepsilon^c \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^{2\varkappa} du < \frac{c_2^{(\varkappa)}}{m^{2\varkappa}}$$

ist; wir setzen hier

$$c_2^{(\varkappa)} = \frac{c}{\varepsilon^{2\varkappa}}.$$

Die Verallgemeinerung der dritten Abschätzung ist etwas weniger trivial:

Abschätzung IIIa. Ist k eine positive Zahl*) und $\varkappa$ eine positive ganze Zahl, und ist $2\varkappa - k > 1$, so gibt es eine solche, von m unabhängige Konstante $c_3^{(\varkappa, k)}$, daß

$$\int_0^\varepsilon u^k \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^{2\varkappa} du < \frac{c_3^{(\varkappa, k)}}{m^{k+1}}$$

ist. Denn

$$\int_0^\varepsilon u^k \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^{2\varkappa} du < \int_0^c u^k \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^{2\varkappa} du$$

$$= \frac{1}{m^{k+1}} \int_{u=0}^{u=c} (mu)^k \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^{2\varkappa} d\,(mu)$$

$$= \frac{1}{m^{k+1}} \int_0^{mc} \frac{\sin^{2\varkappa} v}{v^{2\varkappa-k}}\, dv < \frac{1}{m^{k+1}} \int_0^\infty \frac{\sin^{2\varkappa} v}{v^{2\varkappa-k}}\, dv,$$

da nach Voraussetzung $2\varkappa - k - 1$ positiv ist**). Wir können

$$c_3^{(\varkappa, k)} = \int_0^\infty \frac{\sin^{2\varkappa} u}{u^{2\varkappa-k}}\, du$$

setzen.

---

*) Wegen einer nochmaligen Verallgemeinerung sei bemerkt, daß k nicht ganzzahlig zu sein braucht.

**) Um diesen Schluß zu ermöglichen haben wir beim Satz I den Exponenten 4 und bei dem speziellen Fall $k = 3$ des Satzes II den Exponenten 6 gewählt.

Wenden wir diese Abschätzungen auf den Ausdruck für $I_m - f(x)$ an, indem wir wieder das Maximum von $|f(x)|$ mit M bezeichnen, so bekommen wir für $\varkappa = k = 3$

$$|f(x) - I_m(x)| \leqq \frac{c_1^{(3)} m}{2} \left[\frac{54 \lambda c_3^{(3,3)}}{m^4} + \frac{16 M c_2^{(3)}}{m^6} \right],$$

also, wenn wir

$$\frac{c_1^{(3)}}{2} [54 \lambda c_3^{(3,3)} + 16 M c_2^{(3)}] = K_1$$

setzen,

$$|f(x) - I_m(x)| \leqq K_1 \cdot \frac{1}{m^3}.$$

Um den Übergang von $I_m(x)$ zu einer ganzen rationalen Funktion von x zu bewirken, haben wir zunächst eine angenäherte Darstellung von $\left[\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}\right]^6$ durch ein Polynom in $(u-x)$ zu konstruieren. Hier haben wir die Änderungen gegen früher, daß wir einerseits eine höhere Potenz von $\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}$ darzustellen haben, und andererseits, daß wir einen höheren Grad der Genauigkeit verlangen müssen. Diese Forderungen bringen keine Schwierigkeit mit sich. Bis zu der Stelle, wo wir die Zerlegung

$$\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)} = p_{s,m} + r_{s,m}$$

so eingerichtet haben, daß $p_{s,m}$ ein Polynom höchstens $(m-1)$ten Grades in $(u-x)$ ist und $|r_{s,m}| < \frac{1}{2^m}$, ist an den früheren Ausführungen gar nichts zu ändern. Ist dann $\varkappa$ irgend eine positive ganze Zahl, so ist

$$\left[\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}\right]^{2\varkappa} = p_{s,m}^{2\varkappa} + r_{s,m} H(u-x),$$

wo $H(u-x)$ eine Funktion ist, für welche man bei einem bestimmten Wert von $\varkappa$ eine von m unabhängige obere Grenze leicht bestimmen kann. Sei diese mit $\overline{H}^{(\varkappa)}$ bezeichnet, und $p_{s,m}^{2\varkappa}$ mit $\pi_m^{(\varkappa)}$.

$$\left| \left[\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}\right]^{2\varkappa} - \pi_m^{(\varkappa)}(u-x) \right| < \frac{\overline{H}^{(\varkappa)}}{2^m}$$

für alle Werte von u und x, die im Integral $I_m(x)$ in Betracht kommen. Für jede positive (auch nicht positive) Zahl k ist $\lim\limits_{m=\infty} \frac{m^{k+1}}{2^m} = 0$; dieses Verhältnis hat daher für positives ganzzahliges m eine obere Grenze, die wir mit $\bar{c}^{(k)}$ bezeichnen können. Setzen wir $\bar{H}^{(\varkappa)}\bar{c}^{(k)} = c_4^{(\varkappa,k)}$, so haben wir den Satz:

Ist k eine positive Zahl und $\varkappa$ eine positive ganze Zahl, so gibt es zu der Folge von Funktionen $\left[\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}\right]^{2\varkappa}$, $m = 1, 2, \ldots$, eine Folge von Polynomen $\pi_m^{(\varkappa)}(u-x)$, je höchstens $2\varkappa(m-1)$ten Grades, und eine Konstante $c_4^{(\varkappa,k)}$, so daß

$$\left|\left[\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}\right]^{2\varkappa} - \pi_m^{(\varkappa)}(u-x)\right| < \frac{c_4^{(\varkappa,k)}}{m^{k+1}}$$

ist, für alle Werte u, x, die dem Intervalle $(0, c)$ angehören.

Um auf den Fall $k = 3$, $\varkappa = 3$ zurückzukommen, sei

$$\Pi_m(x) = \frac{k_m}{2}\int_0^c f(u)\left\{\frac{1}{3}\pi_m^{(3)}\left(\frac{u-x}{3}\right) - \frac{3}{2}\pi_m^{(3)}\left(\frac{u-x}{2}\right) + 3\pi_m^{(3)}(u-x)\right\}du,$$

wo k_m den auf $\varkappa = 3$ bezüglichen Wert hat.

$$|I_m(x) - \Pi_m(x)| \leqq \frac{c_1^{(3)}m}{2}\int_0^c M\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+3\right)\frac{c_4^{(3,3)}}{m^4}\,du$$

$$= \frac{29Mcc_1^{(3)}c_4^{(3,3)}}{12m^3},$$

$$|f(x) - \Pi_m(x)| \leqq \left(K_1 + \frac{29Mcc_1^{(3)}c_4^{(3,3)}}{12}\right)\cdot\frac{1}{m^3}.$$

Der Grad von $\Pi_m(x)$ ist höchstens $6(m-1)$.

Jetzt sei n irgend eine positive ganze Zahl. Sei $m-1$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als $\frac{n}{6}$ ist, und sei $P_n(x) = \Pi_m(x)$ gesetzt; sei ferner

$$6^3\left(K_1 + \frac{29Mcc_1^{(3)}c_4^{(3,3)}}{12}\right) = K.$$

$P_n(x)$ ist dann ein Polynom höchstens $n$ten Grades, und es ist

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq K\cdot\frac{1}{n^3}.$$

Damit ist klar, wie der Beweis des Satzes II für allgemeines k zu führen ist. Wir nehmen einen so großen Wert von $\varkappa$, daß $2\varkappa - k > 1$ ist, der Bestimmtheit halber den kleinsten solchen Wert, und setzen

$$I_m(x) = \frac{k_m}{2}\int_0^c f(u)\left\{\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k+i+1}\binom{k}{i}\frac{1}{k-i}\left(\frac{\sin m\frac{u-x}{k-i}}{m\frac{u-x}{k-i}}\right)^{2\varkappa}\right\}du,$$

wo $\binom{k}{i}$ der Koeffizient von x^i in der Entwicklung von $(1+x)^k$ nach Potenzen von x und

$$\frac{1}{k_m} = \int_0^c \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^{2\varkappa} du$$

ist.

$$\int_0^c f(u) \cdot \frac{1}{k-i} \left(\frac{\sin m \dfrac{u-x}{k-i}}{m \cdot \dfrac{u-x}{k-i}} \right)^{2\varkappa} du$$

$$= \int_{-\frac{x}{k-i}}^{\frac{c-x}{k-i}} f(x+(k-i)\,v) \left[\frac{\sin mv}{mv}\right]^{2\varkappa} dv, \quad v = \frac{u-x}{k-i}.$$

Die Differenz $I_m(x) - f(x)$ läßt sich wieder zerlegen in ein Integral

$$\frac{k_m}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left[\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+i+1} \binom{k}{i} f(x+(k-i)\,u) \right] \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^{2\varkappa} du$$

und eine Summe von Integralen, in denen die Integrationsvariable dem absoluten Betrage nach oberhalb der von 0 verschiedenen positiven Schranke ε bleibt, und wir können die verallgemeinerten Abschätzungen Ia, IIa, IIIa anwenden und $I_m(x)$ mit der nötigen Genauigkeit durch ein Polynom ersetzen, wenn wir einmal den Satz haben, daß in der Entwicklung von

$$(3) \qquad \pm f(x+ku) \mp k f(x+(k-1)\,u) + \cdots - f(x)$$

nach Potenzen von u alle Glieder von einer niedrigeren als der $k$ten Ordnung sich fortheben. Wir haben allgemein ebenso wie für $k = 3$:

$$f(x+u) = f(x) + uf'(x) + \cdots + \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x) + \frac{\theta_1 \lambda}{(k-1)!} u^k,$$

$$\cdots$$

$$f(x+ku) = f(x) + kuf'(x) + \cdots + \frac{k^{k-1} u^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x) + \frac{k^k \lambda \theta_k}{(k-1)!} u^k,$$

$$|\theta_1|, \cdots, |\theta_k| \leqq 1;$$

und wir möchten zeigen, daß in dem Ausdruck (3) das von u unabhängige Glied und die Koeffizienten von $u, u^2 \ldots, u^{k-1}$ verschwinden. Das läuft aber auf einen bekannten Satz der Differenzenrechnung hinaus. Der Koeffizient von u^i in der Entwicklung von (3), $i \leqq k-1$, ist nämlich

$$\pm \frac{1}{i!} f^{(i)}(x)\left[k^i - \binom{k}{1}(k-1)^i + \cdots \pm 1\right],$$

und der Ausdruck in der Klammer hat für jedes i die Form

$$p(k) - \binom{k}{1} p(k-1) + \cdots \pm p(0), \tag{4}$$

wo die Funktion p eine Potenz ihres Arguments ist. Es besteht nun allgemein der Satz, daß, wenn $p(t)$ irgend eine ganze rationale Funktion nicht höheren als des $(k-1)$ten Grades in t ist, der Ausdruck (4) verschwindet. Das beweist man durch vollständige Induktion. Der Ausdruck ist gleich

$$[p(k) - p(k-1)] - \binom{k-1}{1}[p(k-1) - p(k-2)] + \cdots \mp [p(1) - p(0)]$$

$$= q(k-1) - \binom{k-1}{1} q(k-2) \cdots \mp q(0),$$

wenn $p(t+1) - p(t) = q(t)$ gesetzt wird. $q(t)$ ist ein Polynom höchstens vom $(k-2)$ten Grade. Wenn der Satz also für Polynome $(k-2)$ten Grades richtig ist, ist er es auch für Polynome $(k-1)$ten Grades. Er ist aber richtig für Polynome 0ten Grades, daher auch allgemein.

Mit dieser Erkenntnis sind wir im Stande, den Beweis des Satzes II mit allgemeinem k Schritt für Schritt so durchzuführen, wie wir es im speziellen Falle $k = 3$ gemacht haben; bis auf die Zahlwerte der Konstanten, die in den Abschätzungen auftreten, ist daran nichts zu ändern. Es ist wohl nicht nötig, ausführlicher darauf einzugehen.

3. Gleichzeitige Annäherung einer Funktion und ihrer Ableitungen.

Wir können das, was wir bisher gemacht haben, so zusammenfassen: Gegeben ist eine Funktion $f(x)$, die in einem Intervalle $a \leqq x \leqq b \left(0 < a < b < c = \frac{1}{2e}\right)$ eine stetige $(k-1)$te Ableitung hat, welche einer Lipschitz-Bedingung genügt. Im einfachsten Falle $k = 1$ verstehen wir unter der $(k-1)$ten Ableitung die Funktion selbst. Wir bilden zu jeder positiven ganzen Zahl n ein Polynom in $u - x$, das wir mit $\pi_{k,n}(u-x)$ bezeichnen können, derart, daß, wenn wir

$$P_n(x) = \int_0^c f(u)\pi_{k,n}(u-x)\,du$$

setzen, im ganzen Intervalle $a \leqq x \leqq b$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq K \cdot \frac{1}{n^k}$$

ist, wo K eine Konstante bedeutet, die wir zu bestimmen wissen. Wir wählen nämlich eine positive ganze Zahl $\varkappa$ so, daß $2\varkappa - k > 1$ ist, und zwar die kleinste solche Zahl, und dann eine positive ganze Zahl m, die durch n und $\varkappa$ bestimmt ist. Wir bilden das Integral $I_m(x)$, und stellen den Faktor des Integranden, mit dem $f(u)$ multipliziert wird, angenähert durch ein Polynom höchstens $n$ten Grades in $(u-x)$ dar. Dieses Polynom, in welches wir die Konstante $\frac{k_m}{2}$, die vor dem Integral stand, hineingezogen denken, ist es, das wir eben mit $\pi_{k,n}(u-x)$ bezeichnet haben. Das, was hervorgehoben werden soll, ist, daß dieses Polynom durch die Zahlen k und n vollständig bestimmt ist.

Wenn wir eine entsprechende Darstellung bekommen wollen für eine Funktion, der ein größerer Wert von k entspricht, so müssen wir für dieses neue k das neue $\pi_{k,n}(u-x)$ bilden. Aber wenn es sich um einen kleineren Wert von k handelt, brauchen wir nicht auf das entsprechende $\pi_{k,n}$ zurückzugehen. Wenn man die Einzelheiten der Abschätzung des Restes durchdenkt, sieht man, daß die $\pi_{k,n}(u-x)$ sowohl für den Wert von k, wofür sie gebildet wurden, als auch für jeden kleineren Wert von k das Gewünschte leisten. Es ist nicht gesagt, daß wir im allgemeinen dieselben Annäherungsfunktionen bekommen, die aus der dem k eigenen Polynomenfolge $\pi_{k,n}(u-x)$ entstehen würden; aber wir bekommen eine Annäherung, von der wir dieselbe Ordnung der Genauigkeit nachweisen können. Diese Tatsache können wir gebrauchen, um einen Satz über die gleichzeitige Darstellung einer Funktion und ihrer Ableitungen herzuleiten*).

Sei $f(x)$ eine Funktion, welche in dem Intervalle

$$a \leqq x \leqq b, \quad 0 < a < b < c = \frac{1}{2e},$$

eine stetige $(k-1)$te Ableitung besitzt, die einer Lipschitz-Bedingung genügt. Wir denken $f(x)$ in den Intervallen $(0, a)$ und

---

*) Siehe Fußnote auf S. 14.

(b, c) so definiert, daß diese Bedingung im ganzen Intervalle $(0, c)$ erfüllt ist, und außerdem

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = f(c) = \ldots = f^{(k-1)}(c) = 0.$$

Daß das möglich ist, sieht man etwa durch Anwendung eines bekannten Satzes der Interpolationstheorie, daß man sogar eine ganze rationale Funktion so bilden kann, daß die Funktion selbst und beliebig viele ihrer Ableitungen an beliebig vielen (hier an zwei) Stellen beliebig vorgeschriebene Werte annehmen*). Es ist nicht behauptet, daß man in der Lipschitz-Bedingung für das ganze Intervall $(0, c)$ denselben konstanten Koeffizienten λ beibehält, sondern nur, daß eine solche Konstante noch vorhanden ist. Auf den Wert der Konstanten kommt es für den Augenblick nicht an.

Wir bilden die ganze rationale Funktion

$$P_n(x) = \int_0^c f(u)\,\pi_{k,n}(u-x)\,du.$$

Es gibt eine solche Konstante K, daß in (a, b)

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq K \cdot \frac{1}{n^k}$$

ist. Bilden wir nun die Ableitung von $P_n(x)$, so ist

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \int_0^c f(u)\frac{d}{dx}\pi_{k,n}(u-x)\,du \\ &= -\int_0^c f(u)\frac{d}{du}\pi_{k,n}(u-x)\,du \\ &= -\left[f(u)\,\pi_{k,n}(u-x)\right]_{u=0}^{u=c} + \int_0^c f'(u)\,\pi_{k,n}(u-x)\,du \\ &= \int_0^c f'(u)\,\pi_{k,n}(u-x)\,du, \end{aligned}$$

da $f(u)$ in den Punkten 0 und c verschwindet. Es gibt also eine

---

*) Man sieht z. B. sofort, daß man in

$$F(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^3(x-b) + c_5(x-a)^3(x-b)^2$$

die Koeffizienten $c_0 \ldots c_5$ der Reihe nach so bestimmen kann, daß $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ an den Stellen $x = a$ und $x = b$ beliebig vorgeschriebene Werte bekommen.

solche Konstante K', daß für alle Werte von n und im ganzen Intervalle (a, b) gleichmäßig

$$|f'(x) - P_n'(x)| \leqq \frac{K'}{n^{k-1}}$$

ist, da $f'(x)$ eine stetige $(k-2)$te Ableitung hat, die einer Lipschitz-Bedingung genügt. Indem wir weiter so fortfahren, erhalten wir den

Satz III. Ist $f(x)$ eine Funktion, die eine stetige $(k-1)$te Ableitung besitzt, welche einer Lipschitz-Bedingung genügt, so gibt es eine Folge von Polynomen $P_n(x)$, $n = 1, 2 \ldots$, je höchstens $n$ten Grades, und eine Reihe von Konstanten $K, K', \ldots, K^{(k-1)}$, derart, daß für $a \leqq x \leqq b$

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{K}{n^k},$$

$$|f'(x) - P_n'(x)| < \frac{K'}{n^{k-1}},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$|f^{(k-1)}(x) - P_n^{(k-1)}(x)| < \frac{K^{(k-1)}}{n}$$

ist.

4. Weitere Anwendungen der Integralformeln.

Die Methode, die wir gebraucht haben, unter der Voraussetzung, daß die $(k-1)$te Ableitung der Funktion $f(x)$ vorhanden ist und einer Lipschitz-Bedingung genügt, kann auch noch bei gewissen anderen Voraussetzungen angewendet werden. Ich will einige Beispiele solcher Anwendungen hier andeuten, aber nur insofern ausführlich behandeln, als wesentlich neue Betrachtungen nötig sind.

Nehmen wir als erstes Beispiel wieder an, daß $f(x)$ eine stetige $(k-1)$te Ableitung hat; diese sei aber nur der Bedingung unterworfen

$$|f^{(k-1)}(x_2) - f^{(k-1)}(x_1)| \leqq \lambda |x_2 - x_1|^\gamma,$$

wo γ eine Konstante zwischen 0 und 1 bezeichnet. Wir denken die Funktion immer noch in (a, b) gegeben, und dann in $(0, a)$ und (b, c) so definiert, daß die genannten Bedingungen in $(0, c)$ erfüllt sind. Wenn wir den Beweis des Satzes II nochmals verfolgen, mit demselben Integral $I_m(x)$, das wir dort gebraucht haben, aber mit dieser neuen Annahme über die Beschaffenheit von $f(x)$, so kommen wir zu dem Ergebnis, daß hier $\varphi(n) = O\left(\frac{1}{n^{k-1+\gamma}}\right)$ ist. Der Exponent des Nenners kommt durch die Abschätzung IIIa herein, und wir haben dort ausdrücklich bemerkt, daß dieser Exponent nicht ganzzahlig zu sein braucht. Ist $k = 1$,

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq \lambda |x_2 - x_1|^\gamma,$$

so ist $\varphi(n) = O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Dieses letzte Resultat, sowie das folgende, werden wir im Paragraphen 6 als spezielle Fälle eines allgemeineren Satzes erhalten.

Setzen wir nun einmal noch weniger voraus, als bis jetzt geschehen ist, nämlich nur, daß $f(x)$ der Bedingung genügt

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq \frac{\lambda}{|\log|x_2 - x_1||}.$$

(Das ist ungefähr die Bedingung, die in der Theorie der Fourierschen Reihen als Lipschitz-Dinische bezeichnet wird; allein unsere Bedingung ist etwas umfassendere als die Lipschitz-Dinische, dadurch, daß in letzterer statt der Konstanten λ eine mit $|x_2 - x_1|$ zu 0 konvergierende Größe stehen müßte*).) Die Form der Bedingung ist nicht mehr invariant gegenüber einer linearen Transformation; wir beschränken uns daher auf die Annahme, daß das gegebene Intervall schon im Innern des Intervalls $(0, c)$ enthalten ist.

Wir brauchen das Integral $I_m(x)$ des Satzes I. Es kommt im wesentlichen nur auf die Abschätzung des Integrals

$$\int_0^\varepsilon \frac{1}{|\log u|}\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du$$

an, die der früheren Abschätzung III entspricht. Es ist

$$\int_0^\varepsilon \frac{1}{|\log u|}\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du = -\int_0^\varepsilon \frac{1}{\log u}\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du$$

$$= -\int_0^\varepsilon \frac{1}{\log mu - \log m}\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du$$

$$= \frac{1}{m}\int_0^{m\varepsilon} \frac{1}{\log m - \log v}\left[\frac{\sin v}{v}\right]^4 dv \qquad (v = mu)$$

$$= \frac{1}{m}\left[\int_0^{\sqrt{m\varepsilon}} + \int_{\sqrt{m\varepsilon}}^{m\varepsilon} \frac{1}{\log m - \log u}\left[\frac{\sin u}{u}\right]^4 du\right].$$

*) Vgl. S. 11 und Nr. 6, S. 14.

Für $0 < u \leqq \sqrt{m}\,\varepsilon$ ist $\log u \leqq \frac{1}{2} \log m$, da $\varepsilon < 1$ ist.

$$\log m - \log u \geqq \tfrac{1}{2} \log m,$$

$$\int_0^{\sqrt{m}\varepsilon} \frac{1}{\log m - \log u} \left[\frac{\sin u}{u}\right]^4 du \leqq \frac{2}{\log m} \int_0^{\sqrt{m}\varepsilon} \left[\frac{\sin u}{u}\right]^4 du$$

$$< \frac{2}{\log m} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin u}{u}\right]^4 du.$$

Für $\sqrt{m}\,\varepsilon \leqq u \leqq m\varepsilon$ ist $\log m - \log u = \log \frac{m}{u} \geqq \log \frac{1}{\varepsilon}$,

$$\int_{\sqrt{m}\varepsilon}^{m\varepsilon} \frac{1}{\log m - \log u} \left[\frac{\sin u}{u}\right]^4 du \leqq \frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \int_{\sqrt{m}\varepsilon}^{m\varepsilon} \left[\frac{\sin u}{u}\right]^4 du$$

$$< \frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \int_{\sqrt{m}\varepsilon}^{\infty} \frac{du}{u^4} = \frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \left[-\frac{1}{3u^3}\right]_{\sqrt{m}\varepsilon}^{\infty} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{m^{3/2}\varepsilon^3}$$

$$< \frac{1}{3\varepsilon^3} \cdot \frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\log m}, \qquad (m \geqq 2).$$

Sei

$$2 \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin u}{u}\right]^4 du + \frac{1}{3\varepsilon^3} \cdot \frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon}} = \bar{c};$$

dann ist

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{|\log u|} \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du < \frac{\bar{c}}{m \log m}.$$

Und man findet dann ohne weitere Schwierigkeit, daß jetzt $\varphi_f(n) = O\left(\frac{1}{\log n}\right)$ ist*). Ähnlich kann man auch andere Bedingungen behandeln; ich gehe hier aber nicht darauf ein.

Ein Satz, zu dessen Beweis wir einen etwas anderen Kunstgriff anwenden, ist folgender: wenn die Funktion $f(x)$ eine stetige erste Ableitung hat, was etwas mehr verlangt, als daß sie einer Lipschitz-Bedingung genügt, so ist $\varphi_f(n)$ nicht nur $O\left(\frac{1}{n}\right)$, sondern

*) Der Endschluß, wobei man von den speziellen Gradzahlen $4(m-1)$ zu allgemeinem n übergeht, darf hier und im folgenden Beispiel nicht außer Betracht gelassen werden, bietet aber keine Schwierigkeit.

in der Tat $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Wir brauchen das Integral $I_m(x)$ für $k = 2$, das wir noch nicht explizit aufgeschrieben haben.

$$I_m(x) = \frac{k_m}{2}\int_0^c f(u)\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin m\frac{u-x}{2}}{m\frac{u-x}{2}}\right)^4 + 2\left[\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}\right]^4\right\}du;$$

$$\frac{1}{k_m} = \int_0^c \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du.$$

$$I_m(x) - f(x) = \frac{k_m}{2}\left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left[-f(x+2u)+2f(x+u)-f(x)\right]\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du\right.$$

$$\left. -\int_{-\frac{x}{2}}^{-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{\frac{c-x}{2}} + 2\int_{-x}^{-\varepsilon} + 2\int_{\varepsilon}^{c-x} - \int_{-c}^{-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{c}\right].$$

Die Summe der letzten sechs Glieder in der großen Klammer ist dem absoluten Betrage nach $\leqq \frac{8Mc_2}{m^4}$, nach der Abschätzung II, wo $c_2 = \frac{c}{\varepsilon^4}$ gesetzt ist.

$$f(x+u) = f(x) + uf'(x+\theta_1 u), \qquad (0 \leqq \theta_1 \leqq 1),$$

$$f(x+2u) = f(x) + 2uf'(x+\theta_2 . 2u), \qquad (0 \leqq \theta_2 \leqq 1),$$

$$-f(x+2u) + 2f(x+u) - f(x) = 2u[-f'(x+\theta_2 . 2u) + f'(x+\theta_1 u)].$$

Da nach Voraussetzung $f'(x)$ stetig ist, gibt es eine solche Funktion $\omega(\delta)$ von δ, daß immer $|f'(x_2) - f'(x_1)| \leqq \omega(\delta)$ ist für $|x_2 - x_1| \leqq \delta$, und daß $\lim\limits_{\delta=0} \omega(\delta) = 0$ ist. Wenn wir $\omega(\delta)$ als genau das Maximum von $|f'(x_2) - f'(x_1)|$ für $|x_2 - x_1| \leqq \delta$ definieren, ist $\omega(\delta)$ eine mit wachsendem δ nie abnehmende monotone Funktion von δ. Wir wollen das ω jedenfalls so gewählt denken, daß es diese Eigenschaft hat.

$$|-f(x+2u) + 2f(x+u) - f(x)| \leqq 2|u|\omega(|2u|),$$

$$\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}[-f(x+2u) + 2f(x+u) - f(x)]\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du\right|$$

$$\leqq 2\int_0^{\varepsilon} 2u\,\omega(2u)\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du$$

$$\leqq 4\omega(2\varepsilon)\int_0^{\varepsilon} u\left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du \leqq 4\omega(2\varepsilon)\cdot\frac{c_3}{m^2}.$$

Jetzt wenden wir ein Mittel an, das wir bis jetzt vermieden haben: wir lassen ε mit m variieren. Sei z. B. $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt[4]{m}}$ (für hinreichend große m, damit ε klein genug wird). Dann ist

$$\left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \right| \leqq 4\omega \left(\frac{2}{\sqrt[4]{m}} \right) \frac{c_3}{m^2}.$$

c_3 ist der Definition nach von ε unabhängig. Der absolute Betrag der Summe der letzten Integrale ist, wie wir gesehen haben,

$$\leqq \frac{8Mc}{m^4 \varepsilon^4} = \frac{8Mc}{m^3}.$$

Es ist

$$\frac{k_m}{2} \leqq \frac{c_1 m}{2}.$$

Folglich ist

$$|I_m(x) - f(x)| \leqq \frac{c_1 m}{2} \left[4\omega \left(\frac{2}{\sqrt[4]{m}} \right) \frac{c_3}{m^2} + \frac{8Mc}{m^3} \right],$$

$$m\,|I_m(x) - f(x)| \leqq \frac{c_1}{2} \left[4\omega \left(\frac{2}{\sqrt[4]{m}} \right) \cdot c_3 + \frac{8Mc}{m} \right].$$

Der Ausdruck rechts ist von x unabhängig, und hat für $m = \infty$ den Limes 0. Danach führt man ohne Schwierigkeit den Beweis zu Ende, daß $\varphi_f(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ist.

5. Die Konstanten der Sätze I und II.

Die Fragen, die wir im Paragraphen 4 behandelt haben, sind zum Teil spezielle Fälle eines allgemeineren Problems, das auf Satz I zurückgeführt werden kann, wenn wir letzteren etwas präzisieren. Wir müssen zunächst die bei diesem Satz vorkommende Konstante K etwas näher betrachten, was für sich nicht ohne Interesse ist. Wir werden auch hier keinen Versuch machen, das K auf seinen kleinsten Wert zu reduzieren, aber wir werden sehen, wie es von dem Koeffizienten λ der Lipschitz-Bedingung abhängt.

Bei dem Satze I ist $f(x)$ eine Funktion, die in einem Intervalle $a \leqq x \leqq b$, $0 < a < b < c = \frac{1}{2e}$, der Lipschitz-Bedingung

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq \lambda |x_2 - x_1|$$

genügt. Wir haben eine Folge von Polynomen $P_n(x)$ konstruiert,

$n = 1, 2, \ldots$, so daß im Intervalle $a \leqq x \leqq b$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq \frac{K}{n}$$

ist. K war dabei eine Konstante, die folgende Form hatte:

$$K = 4\left(K_1 + \frac{Mcc_1c_4}{2}\right) = 4\left[\frac{c_1}{2}(2\lambda c_3 + 4Mc_2) + \frac{Mcc_1c_4}{2}\right].$$

Das Intervall (a, b) wollen wir ein- für allemal festgelegt denken, sowie die Konstante ε; wir könnten z. B.

$$a = \frac{1}{6e}, \quad b = \frac{1}{3e}, \quad \varepsilon = \frac{1}{12e}$$

setzen*). Dann sind sowohl c als auch c_1, c_2, c_3, c_4 Konstanten, die von nichts mehr abhängen. Nur die Größen λ und M sind mit der Funktion $f(x)$ variabel.

Über M haben wir bis jetzt gar nichts vorausgesetzt. Es ist aber offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ ist. Wir können nämlich Annäherungspolynome für $\bar{f}(x) = f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ aufstellen, und die Konstante $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ dann jedem dieser Polynome addieren. Wenn wir diese Annahme machen, ist $M \leqq \lambda \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)$; denn wir haben $f(x)$ in $(0, a)$ und (b, c) so definiert, daß in diesen Intervallen keine Werte angenommen werden, die nicht schon in (a, b) erreicht sind. Daraus ersehen wir, daß wir K als mit λ einfach proportional annehmen dürfen, $K = \bar{K}\lambda$, wo $\bar{K}$ eine absolute Konstante ist, die auch nicht von der Wahl der Funktion $f(x)$ abhängt.

Sei nun $\bar{f}(\bar{x})$ eine Funktion, die in irgend einem Intervalle $\bar{a} \leqq \bar{x} \leqq \bar{b}$ der Lipschitz-Bedingung genügt

$$|\bar{f}(\bar{x}_2) - \bar{f}(\bar{x}_1)| \leqq \bar{\lambda}|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|.$$

$\bar{f}(\bar{x})$ möge durch die lineare Transformation $\frac{\bar{x}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} = \frac{x-a}{b-a}$ in $f(x)$ übergehen, wo a, b die früher gebrauchten festen Werte sind. Dann ist $f(x)$ eine Funktion, die im Intervalle (a, b) der Lipschitz-Bedingung genügt

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |\bar{f}(\bar{x}_2) - \bar{f}(\bar{x}_1)| \leqq \bar{\lambda}|\bar{x}_2 - \bar{x}_1| = \bar{\lambda}\frac{\bar{b}-\bar{a}}{b-a}|x_2 - x_1|.$$

*) Die im vorigen Paragraphen zugelassene Veränderlichkeit von ε schließen wir hier wieder aus.

Es gibt folglich zu jedem Grade n ein Polynom $P_n(x) = \overline{P}_n(\overline{x})$ höchstens $n$ten Grades, so daß

$$|\overline{f}(\overline{x}) - \overline{P}_n(\overline{x})| = |f(x) - P_n(x)| \leqq \overline{K}\frac{\overline{b}-\overline{a}}{b-a}\overline{\lambda}\cdot\frac{1}{n}$$

ist, im ganzen Intervalle $a \leqq x \leqq b$ bezw. $\overline{a} \leqq \overline{x} \leqq \overline{b}$.

Indem wir $\frac{\overline{K}}{b-a} = L$ setzen und die Striche sonst fallen lassen, können wir dieses Resultat so aussprechen:

Satz IV. *Es gibt eine absolute numerische Konstante L, die folgende Eigenschaft hat: Ist $f(x)$ eine Funktion, die in einem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ von der Länge l der Lipschitz-Bedingung genügt:*

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq \lambda\,|x_2 - x_1|,$$

dann gibt es eine solche Folge von Polynomen $P_n(x)$, $n = 1, 2 \ldots$, je höchstens $n$ten Grades, daß im ganzen Intervalle $a \leqq x \leqq b$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq \frac{Ll\lambda}{n}$$

ist.

Wenn wir auf das ursprüngliche feste Intervall (a, b) zurückkommen und die Voraussetzung machen, daß $f^{(k-1)}(x)$ vorhanden ist und der Bedingung genügt

$$|f^{(k-1)}(x_2) - f^{(k-1)}(x_1)| \leqq \lambda\,|x_2 - x_1|,$$

so finden wir, indem wir wie vorhin die Bedeutung der verschiedenen Größen überlegen, daß es eine nur von k abhängige Konstante $\overline{K}^{(k)}$ gibt, so daß $f(x)$ mit einem Fehler, dessen absoluter Betrag nicht größer ist als $\overline{K}^{(k)}\lambda\cdot\frac{1}{n^k}$, durch ein Polynom $n$ten Grades dargestellt werden kann. Gehen wir dann zu einer Funktion $\overline{f}(\overline{x})$ über, die in $\overline{a} \leqq \overline{x} \leqq \overline{b}$ der Bedingung genügt

$$\left|\left[\frac{d^{k-1}}{d\overline{x}^{k-1}}\overline{f}(\overline{x})\right]_{\overline{x}_2} - \left[\frac{d^{k-1}}{d\overline{x}^{k-1}}\overline{f}(\overline{x})\right]_{\overline{x}_1}\right| \leqq \overline{\lambda}\,|\overline{x}_2 - \overline{x}_1|,$$

und wenden wir die Transformation $\frac{\overline{x}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} = \frac{x-a}{b-a}$ an, so bekommen wir für die transformierte Funktion $f(x)$

$$\left|\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}f(x)\right]_{x_2} - \left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}f(x)\right]_{x_1}\right|$$

$$= \left[\frac{\overline{b}-\overline{a}}{b-a}\right]^{k-1}\left|\left[\frac{d^{k-1}}{d\overline{x}^{k-1}}\overline{f}(\overline{x})\right]_{\overline{x}_2} - \left[\frac{d^{k-1}}{d\overline{x}^{k-1}}\overline{f}(\overline{x})\right]_{\overline{x}_1}\right|$$

$$\leqq \overline{\lambda}\left[\frac{\overline{b}-\overline{a}}{b-a}\right]^{k-1}|\overline{x}_2 - \overline{x}_1| = \overline{\lambda}\left[\frac{\overline{b}-\overline{a}}{b-a}\right]^{k}|x_2 - x_1|,$$

woraus folgt, indem wir diesmal $\frac{\overline{K}^{(k)}}{(b-a)^k} = L^{(k)}$ schreiben, und die gestrichenen Buchstaben sonst durch ungestrichene ersetzen,

Satz IVa. Es gibt eine nur von k abhängige Konstante $L^{(k)}$ mit folgender Eigenschaft: Ist $f(x)$ eine Funktion, deren $(k-1)$te Ableitung in einem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ von der Länge l der Lipschitz-Bedingung genügt

$$|f^{(k-1)}(x_2) - f^{(k-1)}(x_1)| \leqq \lambda |x_2 - x_1|,$$

dann gibt es eine solche Folge von Polynomen $P_n(x)$, $n = 1, 2 \ldots$, je höchstens $n$ten Grades, daß im ganzen Intervalle $a \leqq x \leqq b$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq \frac{L^{(k)} l^k \lambda}{n^k}$$

ist.

6. Allgemeine Stetigkeitsbedingung: $\varphi(n) = O\left[\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]$.

Wir kommen jetzt zu dem oben versprochenen allgemeinen Satz. Sei $f(x)$ eine gegebene beschränkte Funktion und sei $\omega(\delta)$ eine solche Funktion von δ, daß jedesmal die Ungleichung

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq \omega(\delta)$$

besteht, wenn $|x_2 - x_1| \leqq \delta$ ist, wie auch x_1, x_2 sonst in dem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ gewählt sein mögen.

Satz V. Es gibt eine absolute numerische Konstante A derart, daß man zu der Funktion $f(x)$ eine solche Folge von Polynomen $P_n(x)$, $n = 1, 2 \ldots$ bilden kann, daß im ganzen Intervalle $a \leqq x \leqq b$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq A\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

ist; $P_n(x)$ ist dabei höchstens $n$ten Grades.

Dieser Satz ist auf jede stetige Funktion anwendbar. Das ω kann aber erst definiert werden, wenn $f(x)$ gegeben ist; wir haben also keine gleichmäßige Abschätzung der Ordnung von $\varphi_f(n)$ für alle stetigen Funktionen, was, wie wir behauptet haben und später beweisen werden, nicht vorhanden ist.

Man zerlege das Intervall (a, b) in n gleiche Teile durch die Punkte $x^{(0)} = a, x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}, x^{(n)} = b$. Sei $\overline{f}(x)$ die stetige Funktion von x, die in den Teilungspunkten mit $f(x)$ übereinstimmt und zwischen je zwei aufeinanderfolgenden derselben linear ist. Ist dann x irgend ein Punkt des Intervalls, und $x^{(i)} \leqq x \leqq x^{(i+1)}$, so ist

$$|f(x) - f(x^{(i)})| \leqq \omega\left(\frac{b-a}{n}\right),$$

$$|\overline{f}(x) - f(x^{(i)})| = |\overline{f}(x) - \overline{f}(x^{(i)})| \leqq \omega\left(\frac{b-a}{n}\right),$$

also

$$|f(x) - \overline{f}(x)| \leqq 2\omega\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Die Funktion $\overline{f}(x)$ genügt der Lipschitz-Bedingung

$$|\overline{f}(x_2) - \overline{f}(x_1)| \leqq \frac{\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)}{\frac{b-a}{n}} |x_2 - x_1|,$$

wie aus ihrer Definition sofort ersichtlich ist. Es gibt daher eine Folge von Polynomen $n$ten Grades, so daß mit der Konstanten L des Satzes IV

$$|\overline{f}(x) - P_n(x)| \leqq L(b-a)\frac{\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)}{\frac{b-a}{n}} \cdot \frac{1}{n} = L\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

ist. Setzen wir $L + 2 = \varDelta$, so ist schließlich

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq |f(x) - \overline{f}(x)| + |\overline{f}(x) - P_n(x)|$$

$$\leqq \varDelta\omega\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

ABSCHNITT II.

Obere Abschätzungen der Genauigkeitsgrenze $\tau(n)$.

(Annäherung durch endliche trigonometrische Summen.)

1. Lipschitz-Bedingung: $\tau(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

In diesem Abschnitt soll von der Funktion $f(x)$ angenommen werden, daß sie für alle reellen Werte von x definiert und stetig ist und periodisch mit der Periode 2π, und daß die weiteren Bedingungen, die in den Voraussetzungen aufgestellt werden, überall erfüllt sind. Unter $\tau_f(n)$ verstehen wir die Genauigkeitsgrenze der gleichmäßigen Annäherung von $f(x)$ für alle reellen Werte von x durch eine endliche trigonometrische Summe höchstens n ter Ordnung.

Wir werden zunächst die Methode des Satzes I zum Beweise des hierher gehörigen entsprechenden Satzes brauchen, dann aber später die Sätze I und II selbst auf das Problem der trigonometrischen Annäherung direkt übertragen.

Fangen wir also wieder mit der Voraussetzung an, daß $f(x)$ der Lipschitz-Bedingung genügt

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq \lambda\, |x_2 - x_1|.$$

Satz VI. Wenn die Funktion $f(x)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, so ist $\tau_f(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Wir wollen eine Folge von trigonometrischen Summen konstruieren, die eine Annäherung von dieser Ordnung der Genauigkeit leistet.

Sei

$$I_m(x) = \frac{h_m}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left(\frac{\sin m \frac{u-x}{2}}{m \sin \frac{u-x}{2}} \right)^4 du,$$

$$\frac{1}{h_m} = \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin m \frac{u}{2}}{m \sin \frac{u}{2}} \right)^4 du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin mu}{m \sin u} \right]^4 du;$$

dann ist

$$I_m(x) = h_m \int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2v) \left[\frac{\sin mv}{m \sin v}\right]^4 dv$$

$$= h_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2u) \left[\frac{\sin mu}{m \sin u}\right]^4 du,$$

da der Integrand die Periode π hat.

$$f(x) = 2 h_m \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \left[\frac{\sin mu}{m \sin u}\right]^4 du = h_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \left[\frac{\sin mu}{m \sin u}\right]^4 du.$$

$$I_m(x) - f(x) = h_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2u) - f(x)] \left[\frac{\sin mu}{m \sin u}\right]^4 du.$$

$$\frac{1}{2h_m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin mu}{m \sin u}\right]^4 du > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du$$

$$> \int_0^{c=\frac{1}{2e}} \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du \geqq \frac{1}{c_1} \cdot \frac{1}{m},$$

$$\frac{1}{c_1} = \int_0^c \left[\frac{\sin u}{u}\right]^4 du,$$

nach Abschätzung I.

$$|f(x+2u) - f(x)| \leqq \lambda\, |2u| = 2\lambda\, |u|.$$

$$\left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2u) - f(x)] \left[\frac{\sin mu}{m \sin u}\right]^4 du \right|$$

$$\leqq 2\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |u| \left[\frac{\sin mu}{m \sin u}\right]^4 du = 4\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \left[\frac{\sin mu}{m \sin u}\right]^4 du$$

$$= 4\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 \left[\frac{u}{\sin u}\right]^4 du \leqq \frac{\pi^4 \lambda}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du,$$

da $\frac{u}{\sin u} \leqq \frac{\pi}{2}$ für $0 \leqq u \leqq \frac{\pi}{2}$ ist.

Es ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u \left[\frac{\sin mu}{mu}\right]^4 du = \frac{1}{m^2} \int_0^{\frac{m\pi}{2}} v \left[\frac{\sin v}{v}\right]^4 dv < \frac{c_3}{m^2},$$

wo

$$c_3 = \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 u}{u^3} du$$

ist.

$$|f(x) - I_m(x)| \leqq \frac{c_1 m}{2} \cdot \frac{\pi^4 \lambda}{4} \cdot \frac{c_3}{m^2},$$

oder, wenn wir $\frac{c_1 c_3 \pi^4 \lambda}{8} = K_1$ setzen,

$$|f(x) - I_m(x)| \leqq K_1 \cdot \frac{1}{m}.$$

Um bei dem Satz I eine Polynomdarstellung zu bekommen, mußten wir unser damaliges Integral $I_m(x)$ durch ein Polynom annähern. Diese Rechnung bleibt uns hier erspart. Denn das $I_m(x)$ ist jetzt, wenn wir m auf ungerade Werte beschränken, schon eine endliche trigonometrische Summe von der gesuchten Form.

Um das einzusehen, machen wir zunächst auf einen ganz elementaren Hilfssatz aufmerksam, der fast ohne Beweis einleuchtet, von dem wir aber hier eine und später eine andere Anwendung machen werden.

Hilfssatz I. Jedes Produkt einer trigonometrischen Summe $p$ter Ordnung mit einer trigonometrischen Summe $q$ter Ordnung ist eine trigonometrische Summe höchstens $(p+q)$ter Ordnung.

Hier bedeutet „trigonometrische Summe $p$ter Ordnung" wie sonst in dieser Abhandlung immer einen Ausdruck von der Form

$$a_0 + a_1 \cos x + \cdots + a_p \cos px$$
$$+ b_1 \sin x + \cdots + b_p \sin px.$$

Wegen der bekannten Formeln

$$\cos rx \cos sx = \tfrac{1}{2}[\cos(r+s)x + \cos(r-s)x],$$
$$\sin rx \cos sx = \tfrac{1}{2}[\sin(r+s)x + \sin(r-s)x],$$
$$\sin rx \sin sx = \tfrac{1}{2}[\cos(r-s)x - \cos(r+s)x],$$

ist der Satz für jedes einzelne Glied des Produktes richtig, also für das ganze Produkt.

Durch wiederholte Anwendung dieses Hilfssatzes bekommen wir

Hilfssatz Ia. Die $h$te Potenz einer trigonometrischen Summe $p$ter Ordnung ist eine trigonometrische Summe höchstens hpter Ordnung.

Und daraus folgern wir weiter:

Hilfssatz Ib. Jede ganze rationale Funktion $p$ten Grades von $\sin x$ und $\cos x$ ist eine trigonometrische Summe höchstens $p$ter Ordnung.

Für den Augenblick brauchen wir nur den Hilfssatz Ia. Bekanntlich ist für ungerades m

$$\frac{\sin m\frac{u-x}{2}}{\sin\frac{u-x}{2}} = 2\left[\frac{1}{2} + \cos(u-x) + \cos 2(u-x) + \cdots + \cos\left(\frac{m-1}{2}\right)(u-x)\right],$$

also eine trigonometrische Summe $\left(\frac{m-1}{2}\right)$ter Ordnung*). Folglich ist $\left(\frac{\sin m\frac{u-x}{2}}{m\sin\frac{u-x}{2}}\right)^4$ eine trigonometrische Summe höchstens $2(m-1)$ter Ordnung in $u-x$, und $I_m(x)$ ist eine solche in x.

Sei n irgend eine positive ganze Zahl, m die größte ungerade Zahl, die der Ungleichung $2(m-1) \leqq n$ genügt. Man setze dann $T_n(x) = I_m(x)$. $T_n(x)$ ist eine trigonometrische Summe höchstens $n$ter Ordnung, und es ist

$$|f(x) - T_n(x)| \leqq \frac{K_1}{m},$$

$$2(m+1) > n, \quad m > \frac{n-2}{2}, \quad \frac{1}{m} < \frac{2}{n-2} = \frac{2}{n}\cdot\frac{n}{n-2},$$

für $n \geqq 3$. Für diese n ist

$$\frac{n}{n-2} \leqq 3, \quad \frac{1}{m} \leqq \frac{6}{n}.$$

Für $n = 1$, $n = 2$ ist $m = 1$, und die Ungleichung $\frac{1}{m} \leqq \frac{6}{n}$ ist noch richtig. Setzen wir $6K_1 = K$, so ist

---

*) Man beweist diese Identität, indem man mit $\sin\frac{u-x}{2}$ multipliziert und die rechte Seite umformt.

$$|f(x) - T_n(x)| \leqq K \cdot \frac{1}{n}.$$

Das K hängt von dem Koeffizienten λ der Lipschitz-Bedingung ab, kann aber diesem einfach proportional gewählt werden; wir dürfen schreiben

$$|f(x) - T_n(x)| \leqq \frac{\bar{L}\lambda}{n},$$

wo $\bar{L}$ eine absolute numerische Konstante ist.

2. Die $(k-1)$te Ableitung mit Lipschitz-Bedingung:

$$\tau(n) = O\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Satz VII. Wenn die Funktion $f(x)$ eine stetige $(k-1)$te Ableitung hat, welche einer Lipschitz-Bedingung genügt, so ist $\tau_f(n) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

Für die folgenden Überlegungen bildet der Wert $k = 1$ keine Ausnahme; wir werden mit dem allgemeinen Beweis von VII als speziellen Fall einen zweiten Beweis des schon besprochenen Satzes VI erhalten*).

$f(x)$ ist gegeben. Eine Funktion $f_1(x)$ werde folgendermaßen definiert:

Für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6} \leqq x \leqq 2\pi$ ist $f_1(x) = 0$;

für $\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{5\pi}{3}$ ist $f_1(x) = f(x)$;

und für die übrigen Werte von x im Intervalle $(0, 2\pi)$ soll $f_1(x)$ so definiert werden, daß seine $(k-1)$te Ableitung im ganzen Intervalle vorhanden ist und einer Lipschitz-Bedingung genügt. Daß das möglich ist, sieht man wie auf S. 32. Und endlich sei $f_1(x)$ für alle Werte von x periodisch mit der Periode 2π.

Sei $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$. $f_2(x)$ hat ebenfalls eine stetige $(k-1)$te Ableitung, die einer Lipschitz-Bedingung genügt; und in den Intervallen $\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{5\pi}{3}$, und in den Intervallen, die diesen kongruent sind nach dem Modul 2π, ist $f_2(x)$ identisch 0.

*) Für den leitenden Gedanken vgl. Lebesgue, „Sur l'approximation des fonctions“. Bulletin des sciences mathématiques, Ser. 2, Bd. XXII, 1898, S. 278 bis 287; S. 285—286.

Sei

$$f_1^{(1)}(x) = \frac{f_1(x)+f_1(-x)}{2}, \qquad f_1^{(2)}(x) = \frac{f_1(x)-f_1(-x)}{2},$$

$$f_1(x) = f_1^{(1)}(x)+f_1^{(2)}(x).$$

$f_1^{(1)}(x)$ ist eine gerade Funktion mit der Periode 2π, also eine eindeutige Funktion von $\cos x$. Dasselbe gilt von $\frac{f_1^{(2)}(x)}{\sin x}$; letztere Funktion ist stetig, weil der Zähler in der Nähe der Nullstellen des Nenners identisch verschwindet, vorausgesetzt, daß wir sie in diesen Punkten naturgemäß gleich 0 definieren. Aus dem Verschwinden von $f_1(x)$ in der Nähe der Punkte, wo

$$\sin x = -\frac{d}{dx}\cos x = 0$$

ist, folgt ferner, daß sowohl $\frac{f_1^{(2)}}{\sin x}$ als auch $f_1^{(1)}$ eine stetige $(k-1)$te Ableitung nach $\cos x$ hat, die einer Lipschitz-Bedingung genügt in Bezug auf diese Veränderliche.

Folglich gibt es nach Satz II Polynome $P_{1n}^{(1)}(\cos x)$, $P_{1n}^{(2)}(\cos x)$ je höchstens $n$ten Grades in $\cos x$, und Konstanten $K_1^{(1)}$, $K_1^{(2)}$, so daß für alle reellen Werte von x

$$|f_1^{(1)}(x) - P_{1n}^{(1)}(\cos x)| \leqq \frac{K_1^{(1)}}{n^k},$$

$$\left|\frac{f_1^{(2)}(x)}{\sin x} - P_{1n}^{(2)}(\cos x)\right| \leqq \frac{K_1^{(2)}}{n^k}$$

ist. Oder, wenn wir $P_{1n}^{(1)}(\cos x)$ mit $T_{1n}^{(1)}(x)$ und $\sin x\, P_{1n}^{(2)}(\cos x)$ mit $T_{1n}^{(2)}(x)$ bezeichnen, so sind $T_{1n}^{(1)}$, $T_{1n}^{(2)}$ nach Hilfssatz Ib endliche trigonometrische Summen, und zwar höchstens $(n+1)$ter Ordnung, und es ist

$$|f_1^{(1)}(x) - T_{1n}^{(1)}(x)| \leqq \frac{K_1^{(1)}}{n^k},$$

$$|f_1^{(2)}(x) - T_{1n}^{(2)}(x)| \leqq \frac{K_1^{(2)}}{n^k}.$$

Indem wir mit $f_2(x)$ als Funktion von $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ebenso verfahren, und die verschiedenen Annäherungssummen addieren, bekommen wir eine Darstellung von $f(x)$ durch endliche trigonometrische Summen, deren Genauigkeit in der Tat von der Ordnung von $\frac{1}{n^k}$ ist.

3. Allgemeine Stetigkeitsbedingung: $\tau(n) = O\left[\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]$.

Legen wir nunmehr der Funktion $f(x)$ keine weitere Bedingung auf, als daß sie stetig ist und die Periode 2π hat, und bilden wir wie in I, 6 die Funktion $\omega(\delta)$ so, daß

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq \omega(\delta)$$

ist, wenn $|x_2 - x_1| \leqq \delta$ ist, so bekommen wir dem Satz V entsprechend:

Satz VIII. *Es gibt eine absolute numerische Konstante $\bar{\Lambda}$ derart, daß man zu der Funktion $f(x)$ eine solche Folge von trigonometrischen Summen $T_n(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ bilden kann, daß für alle Werte von x*

$$|f(x) - T_n(x)| \leqq \bar{\Lambda}\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

ist; $T_n(x)$ ist dabei höchstens $n$ter Ordnung.

Wir teilen ein Intervall von der Länge 2π in n gleiche Teile, bilden die durch das einbeschriebene Polygon dargestellte Funktion $\bar{f}(x)$, wie auf S. 40—41, und definieren $\bar{f}(x)$ außerhalb des zuerst gewählten Intervalls durch die Bedingung, daß es periodisch mit der Periode 2π sein soll. Wir haben genau so wie vorher

$$|f(x) - \bar{f}(x)| \leqq 2\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$|\bar{f}(x) - T_n(x)| \leqq \bar{L} \cdot \frac{\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{\bar{L}}{2\pi}\,\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

und, wenn wir $\frac{\bar{L}}{2\pi} + 2 = \bar{\Lambda}$ setzen,

$$|f(x) - T_n(x)| \leqq \bar{\Lambda}\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

ABSCHNITT III.

Die spezielle Funktion $|x|$.

1. Untere Abschätzung von $\varphi(n)$.

Wir haben uns bis jetzt mit oberen Abschätzungen der Annäherungsgrenzen $\varphi(n)$ und $\tau(n)$ beschäftigt. Bevor wir dazu übergehen, in derselben allgemeinen Weise Abschätzungen dieser Funktionen nach unten zu suchen, wollen wir uns bei der Untersuchung von $\varphi(n)$ in dem besonders wichtigen speziellen Falle aufhalten, daß die darzustellende Funktion $f(x)$ gleich $|x|$ ist, in dem Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$. Die Kurve $y = f(x)$ wird in der (x, y)-Ebene durch eine gebrochene Linie dargestellt. Da $f(x)$ offenbar einer Lipschitz-Bedingung genügt, ist $\varphi(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, nach Satz I. Wir wollen hier zeigen, daß $\varphi(n)$ nicht $o\left(\frac{1}{n \log n}\right)$ ist, und sogar daß $\frac{1}{n \log n} = O(\varphi(n))$ ist.

Obgleich es sich hierbei um Annäherung durch ganze rationale Funktionen handelt, werden wir auf einem etwas indirekten Wege zum Ziel kommen, wobei wir von trigonometrischen Annäherungen wesentlich Gebrauch machen werden. Wir wenden zwei Hilfssätze an, die sich auf trigonometrische Summen beziehen. Der eine ist der schon auf S. 45 ausgesprochene Hilfssatz Ib. Der andere ist von Lebesgue*), und der Beweis, den ich hier gebe, ist ebenfalls im wesentlichen von Lebesgue.

Hilfssatz II. Es gibt eine Konstante K mit folgender Eigenschaft: Sei $f(x)$ irgend eine beschränkte integrable periodische Funktion mit der Periode 2π, $T_n(x)$ irgend eine trigonometrische Summe $n$ter oder niedrigerer Ordnung, $S_n(x)$ die Teilsumme $n$ter Ordnung der Fourier-Reihe für $f(x)$ $(n > 1)$; ist überall $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$**), so ist überall $|f(x) - S_n(x)| < K\varepsilon \log n$.

---

*) Nr. 13, S. 15; vgl. S. 12. Siehe auch Fejér, „Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen“, Journal für Mathematik, Bd. CXXXVIII, 1910, S. 22—53; S. 23—31.

**) Für den betrachteten Wert von n; ε ist nicht etwa eine Konstante, die einmal für alle n gelten soll.

Der Rest $f(x)-S_n(x)$ ist identisch derselbe, den wir bekommen würden, wenn wir $f(x)-T_n(x)$ statt $f(x)$ in eine Fourier-Reihe entwickeln und den entsprechenden Rest bei dieser Entwicklung bilden würden. Nach Voraussetzung ist $|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$. Es genügt also, wenn wir folgende Behauptung beweisen:

Hilfssatz IIa. Es gibt eine solche Konstante K, daß, wenn $g(x)$ irgend eine integrable periodische Funktion mit der Periode 2π ist, deren absoluter Betrag überall $\leqq \varepsilon$ ist, dann die Differenz dieser Funktion und der $n$ten Partialsumme ihrer Fourier-Entwicklung überall $\leqq K\varepsilon \log n$ ist $(n>1)$.

Diesen Hilfssatz IIa werden wir später auch für sich brauchen. Es ist nur nötig, den Beweis für $\varepsilon=1$ zu führen; der Satz folgt dann offenbar allgemein.

Sei $s_n(x)$ die Teilsumme $n$ter Ordnung in der Fourier-Entwicklung von $g(x)$. Nach der bekannten Formel ist

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-x)}{2\sin\left(\frac{u-x}{2}\right)}\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} g(x+2t)\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x+2t)\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt,$$

da der Integrand jetzt die Periode π hat. Da $|g|\leqq 1$ ist, haben wir

$$|s_n(x)| \leqq \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{|\sin t|}\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt.$$

Sei dieser Ausdruck mit ϱ_n bezeichnet. Es ist

$$|g(x)-s_n(x)| \leqq 1+\varrho_n.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2(2n+1)}} + \int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Da $\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)t} \leqq \frac{\sin t}{t}$ in $\left(0, \frac{\pi}{2(2n+1)}\right)$ ist, ist für diese Werte von t

$$\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right| = (2n+1)\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)t}\cdot\frac{t}{\sin t} \leqq 2n+1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Andererseits ist

$$\int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt < \int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t}.$$

In $\left(\frac{\pi}{2(2n+1)}, \frac{\pi}{2}\right)$ ist $\frac{t}{\sin t} \leqq \frac{\pi}{2}$, $\quad \frac{1}{\sin t} \leqq \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{t}$.

$$\int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt < \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\log\frac{\pi}{2} - \log\frac{\pi}{2(2n+1)}\right] = \frac{\pi}{2}\log(2n+1).$$

$$\varrho_n < \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\log(2n+1)\right] = 1 + \log(2n+1),$$

$$|g(x) - s_n(x)| < 2 + \log(2n+1).$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{2+\log(2n+1)}{\log n} = 1.$$

Dieses Verhältnis hat also für $n \geqq 2$ eine endliche obere Grenze. Wenn wir diese mit K bezeichnen, haben wir

$$|g(x) - s_n(x)| < K\log n.$$

Nach diesen Hilfssätzen liegt es nahe, die Größenordnung des Restes in der Fourier-Entwicklung von $|\sin x|$ zu untersuchen, da für diese Entwicklung explizite Formeln aufgestellt werden können. Sei die Reihe in der Form angesetzt

$$|\sin x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx + b_m\sin mx).$$

$$\pi b_m = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\sin mx\,dx = 0.$$

$$\begin{aligned}
\pi a_m &= \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos mx\, dx \\
&= 2\int_0^{\pi} \sin x \cos mx\, dx \\
&= \int_0^{\pi} [\sin(m+1)x - \sin(m-1)x]\, dx \\
&= 0, \qquad m \text{ ungerade} \\
&\text{bezw. } \frac{2}{m+1} - \frac{2}{m-1}, \qquad m \text{ gerade.}
\end{aligned}$$

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi}\left[1 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)\cos 4x + \cdots\right].$$

Der Rest im Punkte 0 nach dem Gliede $n$ter Ordnung ist offenbar dem absoluten Betrage nach $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n+1}$ (n gerade) bezw. $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$ (n ungerade) da $\sin 0 = 0$ ist.

Nach Hilfssatz II muß dann jede trigonometrische Summe $n$ter Ordnung irgendwo um wenigstens

$$\frac{1}{K \log n} \cdot \frac{2}{\pi(n+1)} \text{ bezw. } \frac{1}{K \log n} \cdot \frac{2}{\pi n}$$

von $|\sin x|$ abweichen, also insbesondere nach Hilfssatz Ib jedes Polynom $n$ten Grades in $\sin x$. Das ist aber gleichbedeutend damit, daß jedes Polynom $n$ten Grades in x um wenigstens diese Größe an einer Stelle des Intervalls $-1 \leqq x \leqq 1$ von $|x|$ abweichen muß, und wir haben also den Satz bewiesen:

Satz IX. Für die Annäherung der Funktion $|x|$ durch ganze rationale Funktionen von x im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ ist $\frac{1}{n \log n} = O(\varphi(n))$.

2. Beziehungen zu anderen Funktionen.

Man sieht sofort, daß der Satz IX von jedem Intervalle gilt, das den Punkt 0 im Innern enthält. Es ist auch leicht einzusehen, wie man das Resultat auf etwas allgemeinere Funktionen übertragen kann, zunächst auf irgend eine durch einen Polygonzug dargestellte Funktion, dann auf irgend eine Funktion, die durch Subtraktion einer solchen Polygonfunktion auf einen Rest reduziert werden kann, der etwa eine stetige zweite Ableitung hat.

Weniger trivial ist die Bemerkung, daß man auch umgekehrt direkt beweisen kann, daß Funktionen ausgedehnter Klassen wenigstens von eben so hoher Ordnung der Genauigkeit wie $|x|$ angenähert werden können. Wir werden folgenden Satz beweisen:

Satz X. Ist $f(x)$ eine stetige Funktion, die in einem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ eine Ableitung von beschränkter gesamter Schwankung V hat*), und ist $p_n(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, eine solche Folge von Polynomen bezw. höchstens $n$ten Grades, daß für $1 \leqq x \leqq 1$

$$\big|\,|x| - p_n(x)\big| \leqq \psi(n)$$

ist, dann gibt es auch eine Folge von Polynomen $P_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ je höchstens $n$ten Grades, so daß im Intervalle $a \leqq x \leqq b$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq V(b-a)\,\psi(n)$$

ist.

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_s$ irgend welche Werte des Intervalls $a < x < b$, der Größe nach geordnet, und $x_0 = a$, $x_{s+1} = b$. Sei $\bar{f}(x)$ die Funktion, die für $x = a, x_1, x_2, \ldots, x_s, b$ mit $f(x)$ übereinstimmt und zwischen diesen Punkten linear ist. Wenn wir

$$f(a) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad \ldots \quad f(b) = y_{s+1}$$

setzen, können wir $\bar{f}(x)$ in der Form schreiben

$$\bar{f}(x) = y_0 + l_0(x-a) + f_1(x) + \cdots + f_s(x),$$

wo wir $l_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ schreiben und $f_i(x)$ für $x \leqq x_i$ gleich 0, für $x \geqq x_i$ gleich $(l_i - l_{i-1})(x - x_i)$ definieren. Auf diese Weise wird $\bar{f}(x)$ aus einzelnen Winkelfunktionen aufgebaut; $y_0 + l_0(x-a)$ stimmt von a bis x_1 mit $\bar{f}(x)$ überein, $y_0 + l_0(x-a) + f_1(x)$ von a bis x_2, $y_0 + l_0(x-a) + f_1(x) + f_2(x)$ von a bis x_3 u. s. w.

Wir können $f_i(x)$ in der Form schreiben**)

$$f_i(x) = \frac{l_i - l_{i-1}}{2}(x - x_i + |x - x_i|).$$

---

*) D. h., V ist die obere Grenze der Summe

$$|f'(x^{(2)}) - f'(x^{(1)})| + \cdots + |f'(x^{(r)}) - f'(x^{(r-1)})|,$$

wo $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$ irgend welche Werte des Intervalls, in beliebiger Anzahl, der Größe nach geordnet, sind.

**) Vgl. Anfang der auf S. 46 zitierten Arbeit von Lebesgue.

Wir wollen diesen Ausdruck durch eine ganze rationale Funktion annähern.

Nach Voraussetzung ist

$$\big||x| - p_n(x)\big| \leqq \psi(n) \quad \text{für} \quad -1 \leqq x \leqq 1.$$

Ersetzen wir hierin x durch $\dfrac{x}{b-a}$:

$$\left|\left|\frac{x}{b-a}\right| - p_n\left(\frac{x}{b-a}\right)\right| \leqq \psi(n), \qquad -(b-a) \leqq x \leqq (b-a);$$

$$\big||x| - \bar{p}_n(x)\big| \leqq (b-a)\,\psi(n), \qquad -(b-a) \leqq x \leqq (b-a),$$

wenn wir $\bar{p}_n(x) = (b-a)\,p_n\left(\dfrac{x}{b-a}\right)$ setzen.

$$\big||x - x_i| - \bar{p}_n(x - x_i)\big| \leqq (b-a)\,\psi(n), \qquad -(b-a) \leqq x - x_i \leqq (b-a);$$

$$\big|(x - x_i + |x - x_i|) - (x - x_i + \bar{p}_n(x - x_i))\big| \leqq (b-a)\,\psi(n)$$

für $x_i - (b-a) \leqq x \leqq x_i + (b-a)$, also insbesondere für $a \leqq x \leqq b$.

$$\left|\frac{l_i - l_{i-1}}{2}(x - x_i + |x - x_i|) - \frac{l_i - l_{i-1}}{2}(x - x_i + \bar{p}_n(x - x_i))\right|$$

$$\leqq \frac{|l_i - l_{i-1}|}{2}(b-a)\,\psi(n), \qquad a \leqq x \leqq b.$$

$$\frac{l_i - l_{i-1}}{2}(x - x_i + |x - x_i|) = f_i(x);$$

$$\frac{l_i - l_{i-1}}{2}(x - x_i + \bar{p}_n(x - x_i))$$

ist ein Polynom höchstens $n$ten Grades in x, das wir mit $\bar{p}_{ni}(x)$ bezeichnen können. Setzen wir

$$P_n(x) = y_0 + l_0(x - a) + \bar{p}_{n1}(x) + \cdots + \bar{p}_{ns}(x),$$

so ist

$$|\bar{f}(x) - P_n(x)| \leqq \frac{|l_1 - l_0| + |l_2 - l_1| + \cdots + |l_s - l_{s-1}|}{2}(b-a)\,\psi(n).$$

Nach dem Mittelwertsatz ist

$$l_i = f'(\xi_i), \qquad x_i < \xi_i < x_{i+1},$$

und folglich der Definition von V gemäß

$$|l_1 - l_0| + |l_2 - l_1| + \cdots + |l_s - l_{s-1}| \leqq V,$$

und diese Beziehung ist von der Anzahl und der Verteilung der Punkte $x_1 \ldots x_s$ ganz unabhängig.

$$|\bar{f}(x) - P_n(x)| \leqq \frac{V(b-a)}{2}\,\psi(n).$$

Diese Ungleichung, worin die Teilungspunkte $x_1, \ldots, x_s$ rechts gar nicht auftreten, ist richtig bei jeder Wahl derselben. Wegen der Stetigkeit von $f(x)$ können wir die Punkte so verteilen, daß $|f(x) - \bar{f}(x)|$ gleichmäßig beliebig klein wird. Sei nun n irgend eine positive ganze Zahl. Seien die Punkte $x_1, \ldots, x_s$ so gewählt, daß

$$|f(x) - \bar{f}(x)| \leqq \frac{V(b-a)}{2} \psi(n)$$

ist. Bilden wir das diesem $\bar{f}(x)$ entsprechende Polynom $P_n(x)$, so ist

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq V(b-a)\psi(n).$$

Wir haben also das, was gesucht wurde.

Die Kenntnisse, die wir in den vorangehenden Seiten gewonnen haben, gestatten uns nicht, diesen letzten Satz anzuwenden, um weitere Resultate zu bekommen. Aber er ist deswegen interessant, weil er die Äquivalenz zweier zunächst scheinbar verschiedener Probleme ans Licht bringt. Wenn es einmal gelingen würde, zu zeigen, daß $|x|$ von einer bestimmten höheren Ordnung als $\frac{1}{n}$ angenähert werden kann, so würde dasselbe für jede Funktion folgen, die eine Ableitung von beschränkter Schwankung hat; und umgekehrt, wenn man eine einzige solche Funktion konstruieren könnte, deren Annäherung von keiner höheren Ordnung der Genauigkeit als $\frac{1}{n}$ sein könnte, würde der entsprechende Satz für die Funktion $|x|$ bewiesen sein.

ABSCHNITT IV.

Untere Abschätzungen von $\varphi(n)$ und $\tau(n)$ bei allgemeineren Klassen von Funktionen.

1. Nicht-Existenz einer gleichmässigen oberen Abschätzung für die Gesamtheit der stetigen Funktionen.

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einem Satze, von dem schon in der Einleitung die Rede war, und der folgendermaßen ausgesprochen werden kann:

Satz XI. Ist $\psi(n)$ irgend eine positive nie zunehmende Funktion der positiven ganzzahligen Veränderlichen n, die für $n = \infty$ den Limes 0 hat, dann gibt es eine im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ stetige Funktion $f(x)$, so daß für alle Werte von n

$$\varphi_f(n) \geqq \psi(n)$$

ist.

Sei $\chi(0) = \chi(1) = \chi(2) = \psi(1)$, $\chi(n) = \psi(n-2)$ für $n \geqq 3$. Für nicht-ganzzahliges n sei $\chi(n)$ linear definiert zwischen je zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. Man setze einfach

$$f(x) = \chi\left(\frac{1}{\pi x}\right) \cos\frac{1}{x}, \qquad 0 < x \leqq 1; \qquad f(0) = 0.$$

Diese Funktion ist offenbar stetig.

$$f\left(\frac{1}{\pi}\right) = -\chi(1), \quad f\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \chi(2), \quad f\left(\frac{1}{3\pi}\right) = -\chi(3), \quad \ldots$$

$$f\left(\frac{1}{(n+2)\pi}\right) = (-1)^n \chi(n+2) = (-1)^n \psi(n).$$

$f(x)$ nimmt also an $(n+2)$ Punkten des Intervalls Werte an, die absolut genommen $\geqq \psi(n)$ sind. Würde ein Polynom $n$ten Grades im ganzen Intervalle, oder auch nur an diesen $(n+2)$ Punkten um weniger als $\psi(n)$ von $f(x)$ abweichen, so müßte es $(n+1)$ mal das Vorzeichen wechseln, was nicht möglich ist.

Setzt man $\chi(n) = 1$ für die ganzen Zahlen n, für welche $\psi(n-2) > 1$ ist — das kann nur für eine endliche Anzahl von Werten von n eintreten — so kann man sogar erreichen, daß im ganzen Intervalle $|f(x)| \leqq 1$ ist, während die Ungleichung $\varphi_f(n) \geqq \psi(n)$, von einer endlichen Anzahl von Werten von n abgesehen, bestehen bleibt.

Der Satz XI zeigt, daß es keine einzige Funktion $\omega(n) = o(1)$ gibt, so daß für alle stetigen Funktionen $f(x)$ die Abschätzungsfunktion $\varphi_f(n) = O(\omega(n))$ wäre; denn, wenn man etwa $\psi(n) = \sqrt{\omega(n)}$ nimmt und die entsprechende Funktion $f(x)$ wie vorhin konstruiert, so ist $\omega(n) = o(\varphi_f(n))$, d. h., jedes beliebige Vielfache von $\omega(n)$ wird für jeden Wert von n von einer gewissen Stelle an von $\varphi_f(n)$ übertroffen.

2. Beispiele dafür, dass bei Lipschitz-Bedingung $\varphi(n)$ bezw. $\tau(n)$ nicht $o\left(\frac{1}{n}\right)$ ist; Verallgemeinerungen.

Um weiter in derselben Richtung zu gehen, wollen wir folgende Resultate herleiten, die den Sätzen I und VI gewissermaßen komplementär sind:

Satz XII. Es gibt Funktionen, die einer Lipschitz-Bedingung genügen, und für die trotzdem $\varphi(n)$ nicht $o\left(\frac{1}{n}\right)$ ist*).

Satz XIII. Es gibt Funktionen, die periodisch sind mit der Periode 2π, und die einer Lipschitz-Bedingung genügen, für die trotzdem $\tau(n)$ nicht $o\left(\frac{1}{n}\right)$ ist.

Wir beweisen diese Sätze so, daß wir Beispiele solcher Funktionen konstruieren; wir werden zunächst den Satz XIII erhalten, und XII als eine Folge daraus ableiten. Satz XIII ist schon von Lebesgue bewiesen worden, und zwar in einer allgemeineren Fassung, auf die wir später zurückkommen werden; ich gebe im wesentlichen den Lebesgueschen Beweis wieder, und brauche dieselbe Methode weiter.

Wir betrachten zunächst eine Hilfsfunktion $\chi_n(x, \alpha)$. Diese Funktion werde im Intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ folgendermaßen definiert:

Sei α eine Zahl zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Sei η eine positive Zahl**).

Sei n eine ganze Zahl, die folgenden Ungleichungen genügt:

$$\frac{6\pi}{2n+1} \leqq \alpha. \tag{5a}$$

$$\frac{1}{1+\eta} \log\left(n+\frac{1}{2}\right) > \left|\log\frac{\alpha}{\pi}\right|. \tag{5b}$$

$$\frac{1}{6}\,\frac{\eta}{1+\eta}\left(1-\frac{\log 3}{\log 4}\right)\log n > \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \tag{5c}$$

---

*) Dieser Satz hat natürlich erst dann einen Sinn, wenn von einem bestimmten Intervalle die Rede ist; ist er aber für ein solches Intervall richtig, so ist er es auch für jedes Intervall.

**) Zum Beweise der vorliegenden Sätze ist es durchaus hinreichend, $\eta = 1$ zu setzen. Die Willkür in der Wahl von η wird erst bei einer späteren Gelegenheit gebraucht.

Sei p die größte ganze Zahl, für welche

$$\frac{2p\pi}{2n+1} \leqq \alpha$$

ist. Nach (5a) ist $p \geqq 3$; ferner ist $p < \frac{2n+1}{4}$.

Es ist klar, daß die Ungleichungen 5a ... 5c erfüllt sein werden, wenn man n nur groß genug wählt, und daß, wenn sie für einen Wert von n gelten, das auch für alle größeren Werte von n der Fall ist.

Sei nun

$$\chi_n(x, \alpha) = 0, \qquad 0 \leqq x \leqq \frac{4\pi}{2n+1};$$

$$\chi_n(x, \alpha) = \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)\frac{x}{2}, \quad \frac{4\pi}{2n+1} \leqq x \leqq \frac{2p\pi}{2n+1};$$

$$\chi_n(x, \alpha) = 0, \qquad \frac{2p\pi}{2n+1} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Außerhalb des Intervalls $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sei

$$\chi_n(x, \alpha) = \chi_n(\pi - x, \alpha), \quad \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi;$$

$$\chi_n(x, \alpha) = \chi_n(-x, \alpha), \quad -\pi \leqq x \leqq 0;$$

und $\chi_n(x, \alpha)$ sei periodisch mit der Periode 2π. Die Beziehungen $\chi_n(x, \alpha) = \chi_n(\pi - x, \alpha)$, $\chi_n(x, \alpha) = \chi_n(-x, \alpha)$ gelten dann natürlich für alle x, auch außerhalb des Intervalls $(-\pi, \pi)$. Die so definierte Funktion ist offenbar stetig, und man sieht leicht ein, daß sie einer Lipschitz-Bedingung genügt; es ist

$$(6) \qquad |\chi_n(x_2, \alpha) - \chi_n(x_1, \alpha)| \leqq \tfrac{1}{2}|x_2 - x_1|.$$

Betrachten wir nämlich zunächst den Fall, daß x_1 und x_2 einem einzigen Intervalle angehören, wo $\chi_n(x, \alpha)$ die Form $\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\frac{x}{2}$ hat; in dem Falle ist

$$\left|\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\frac{x_2}{2} - \frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\frac{x_1}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2n+1}|x_2 - x_1| \frac{2n+1}{2}\left|\cos\frac{(2n+1)\xi}{2}\right|,$$

$$(x_1 \leqq \xi \leqq x_2),$$

$$\leqq \tfrac{1}{2}|x_2 - x_1|.$$

Berücksichtigt man die Symmetrieeigenschaften von $\chi_n(x, \alpha)$ und auch die offenbare Tatsache, daß aus

$$|f(x_2)-f(x_1)| \leqq \lambda\,|x_2-x_1|, \qquad |f(x_3)-f(x_2)| \leqq \lambda\,|x_3-x_2|,$$

die Folgerung

$$|f(x_3)-f(x_1)| \leqq \lambda\,|x_3-x_1|$$

gezogen werden kann, wenn x_2 zwischen x_1 und x_3 liegt, so erkennt man, daß die Ungleichung (6) für alle Werte von x_1 und x_2 besteht.

Die Lebesguesche Funktion ist etwas einfacher als diese. Wir haben diese Definition angesetzt, um dieselbe Funktion auch zum Beweise des Satzes XII benutzen zu können.

Sei die Teilsumme n ter Ordnung der Fourier-Reihe für $\chi_n(x, \alpha)$ mit $s_n(x)$, der Rest mit $r_n(x)$ bezeichnet.

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \chi_n(x+2t, \alpha)\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt,$$

nach der allgemeinen Formel. (Ob wir $\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}}$ oder $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ schreiben, ist gleichgültig, da der Integrand die Periode π hat.)

Betrachten wir nur den Punkt $x = 0$; dort ist

$$r_n(0) = \chi_n(0, \alpha) - s_n(0) = -s_n(0),$$

$$-r_n(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \chi_n(2t, \alpha)\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \chi_n(2t, \alpha)\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$$

$$= \frac{2}{(2n+1)\pi}\left(\int_{\frac{2\pi}{2n+1}}^{\frac{p\pi}{2n+1}} \frac{\sin^2(2n+1)t}{\sin t}\,dt \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{p\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{2n+1}} \sin(2n+1)\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt\right).$$

Im ersten Integral ist der Integrand stets positiv.

$$\int_{\frac{2\pi}{2n+1}}^{\frac{p\pi}{2n+1}} \frac{\sin^2(2n+1)t}{\sin t}\,dt = \sum_{i=3}^{p} \int_{\frac{(i-1)\pi}{2n+1}}^{\frac{i\pi}{2n+1}} \frac{\sin^2(2n+1)t}{\sin t}\,dt$$

$$> \sum_{i=3}^{p} \int_{\frac{(i-1)\pi+\frac{\pi}{6}}{2n+1}=\alpha_i}^{\frac{i\pi-\frac{\pi}{6}}{2n+1}=\beta_i} \frac{\sin^2(2n+1)t}{\sin t}\,dt > \frac{1}{4}\sum_{i=3}^{p}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\frac{dt}{\sin t}$$

$$> \frac{1}{4}\sum_{i=3}^{p}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\frac{dt}{t} > \frac{1}{4}\sum_{i=3}^{p}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\frac{dt}{\frac{i\pi}{2n+1}}$$

$$= \frac{2n+1}{4\pi}\sum_{i=3}^{p}\frac{1}{i}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}dt = \frac{2n+1}{4\pi}\sum_{i=3}^{p}\frac{1}{i}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i=3}^{p}\frac{1}{i} > \frac{1}{6}\int_{3}^{p+1}\frac{dt}{t} = \frac{1}{6}\left[\log(p+1)-\log 3\right]$$

$$= \frac{1}{6}\log(p+1)\left[1-\frac{\log 3}{\log(p+1)}\right].$$

Aus $p \geqq 3$ folgt $\dfrac{\log 3}{\log(p+1)} \leqq \dfrac{\log 3}{\log 4}$.

$$\frac{(p+1)\pi}{2n+1} > \frac{\alpha}{2}, \qquad p+1 > \frac{(2n+1)\alpha}{2\pi},$$

(da p die größte ganze Zahl ist, für welche noch $\dfrac{2p\pi}{2n+1} \leqq \alpha$ ausfällt);

$$\log(p+1) > \log\left(n+\frac{1}{2}\right) + \log\frac{\alpha}{\pi} > \frac{\eta}{1+\eta}\log\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

(nach 5b)

$$> \frac{\eta}{1+\eta}\log n.$$

$$\frac{1}{6}\log(p+1)\left[1-\frac{\log 3}{\log(p+1)}\right] > \frac{1}{6}\cdot\frac{\eta}{1+\eta}\left(1-\frac{\log 3}{\log 4}\right)\log n.$$

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{p\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{2n+1}} \sin(2n+1)\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt\right|$$

$$< \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Mit Rücksicht auf (5c) ist dann

$$\int_{\frac{2\pi}{2n+1}}^{\frac{p\pi}{2n+1}} + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{p\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{2n+1}} > \frac{1}{12}\cdot\frac{\eta}{1+\eta}\left(1-\frac{\log 3}{\log 4}\right)\log n.$$

$$\frac{2}{(2n+1)\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n+\frac{1}{2}} > \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2n}, \qquad n \geqq 1.$$

Sei

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{\eta}{1+\eta}\left(1-\frac{\log 3}{\log 4}\right) = l^{(\eta)}.$$

$l^{(\eta)}$ ist eine Konstante, die unter allen den willkürlich gebliebenen Größen nur von η abhängt.

$$|r_n(0)| > l^{(\eta)}\,\frac{\log n}{n}.$$

Damit haben wir die wesentliche Eigenschaft der Funktion $\chi_n(x, \alpha)$.

Wir wollen nun daraus eine Funktion $\chi(x)$ konstruieren, die diese Eigenschaft hat, nicht allein in Bezug auf einen einzigen Index n, sondern in Bezug auf unendlich viele solche.

Sei n_1 eine ganze Zahl, welche für $\alpha = \frac{\pi}{3}$ den Ungleichungen 5a..5c genügt, und außerdem den folgenden:

$$(7) \qquad n_1^{\eta} > 3, \qquad n_1^{\eta} > \frac{2K}{l^{(\eta)}}, \qquad \frac{4}{2n_1+1} < 1.$$

Dabei soll K die Konstante des Hilfssatzes IIa bedeuten. Der Bestimmtheit halber sei n_1 die kleinste ganze Zahl, die diesen Bedingungen genügt. Sie werden natürlich auch durch jede größere Zahl erfüllt sein.

Sei n_2 die kleinste ganze Zahl, für welche

$$n_2 \geqq n_1^{1+\eta}$$

ist. Aus dieser Ungleichung und den Ungleichungen für n_1 wollen wir nun eine Reihe von Folgerungen ziehen.

$$\text{a)} \qquad \frac{2n_2+1}{2n_1+1} > \frac{2n_2}{2n_1+1} > \frac{2n_2}{2.2n_1} \geqq \frac{1}{2}n_1^{\eta} > \frac{3}{2} = \frac{6\pi}{4\pi},$$

$$\frac{6\pi}{2n_2+1} < \frac{4\pi}{2n_1+1}.$$

b) $$\frac{1}{1+\eta}\log\left(n_2+\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{1+\eta}\log n_2 \geqq \log n_1$$

$$> \log\frac{2n_1+1}{4} = \left|\log\frac{4}{2n_1+1}\right| \qquad \text{((7), dritte Ungleichung).}$$

c) $$\frac{1}{6}\frac{\eta}{1+\eta}\left(1-\frac{\log 3}{\log 4}\right)\log n_2 > \frac{1}{6}\frac{\eta}{1+\eta}\left(1-\frac{\log 3}{\log 4}\right)\log n_1 > \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

D. h., die Ungleichungen 5a . . . 5c sind sämtlich erfüllt, wenn wir $\alpha = \frac{4\pi}{2n_1+1}$, $n = n_2$ nehmen.

Außerdem finden wir

d) $$\frac{2n_2+1}{4n_1} > \frac{n_2}{2n_1} \geqq \frac{1}{2}n_1^{\eta} > \frac{K}{l^{(\eta)}},$$

$$\frac{K}{2n_2+1} < \frac{l^{(\eta)}}{4n_1}.$$

Definieren wir jetzt der Reihe nach die Zahlen $n_3, n_4 \ldots$ durch die folgenden Ungleichungen:

$$n_2^{1+\eta} \leqq n_3 < n_2^{1+\eta}+1,$$
$$n_3^{1+\eta} \leqq n_4 < n_3^{1+\eta}+1,$$

u. s. w. Dann finden wir jedesmal, daß die Ungleichungen 5a . . . 5c durch $\alpha = \frac{4\pi}{2n_{i-1}+1}$, $n = n_i$ erfüllt sind, und

(8) $$\frac{K}{2n_i+1} < \frac{l^{(\eta)}}{4n_{i-1}}.$$

Die Reihe der Zahlen $n_1, n_2 \ldots$ ist nach den gemachten Festsetzungen eindeutig bestimmt, sobald man η einen festen Wert beigelegt hat.

Sei v_2 ein Symbol, das die Bedeutung 0 oder 1 haben soll, je nachdem der Rest nach den Gliedern $n_2$ter Ordnung in der Fourier-Entwicklung von $\chi_{n_1}\left(x, \frac{\pi}{3}\right)$ im Punkte 0 absolut genommen $\geqq$ oder $< \frac{l^{(\eta)}}{2}\frac{\log n_2}{n_2}$ ist. Sei $v_3 = 0$ oder 1, je nachdem der Rest nach Gliedern $n_3$ter Ordnung in der Entwicklung von

(9) $$\chi_{n_1}\left(x, \frac{\pi}{3}\right) + v_2\,\chi_{n_2}\left(x, \frac{4\pi}{2n_1+1}\right)$$

für $x = 0$ absolut genommen $\geqq$ oder $< \frac{l^{(\eta)}}{2} \frac{\log n_3}{n_3}$ ist. Sei v_4 ähnlich definiert, indem man n_4 statt n_3 schreibt und der Funktion (9) ein Glied $v_3 \chi_{n_3}\left(x, \frac{4\pi}{2n_2+1}\right)$ hinzufügt, u. s. w. Auch die Folge $v_2, v_3, v_4, \ldots$ ist dann eindeutig bestimmt.

Man bilde endlich die Funktion

$$\chi(x) = \chi_{n_1}\left(x, \frac{\pi}{3}\right) + v_2 \chi_{n_2}\left(x, \frac{4\pi}{2n_1+1}\right) + v_3 \chi_{n_3}\left(x, \frac{4\pi}{2n_2+1}\right) + \cdots$$

Für irgend einen festen Wert von x ist höchstens ein Glied dieser Reihe von 0 verschieden, da die Funktionen χ_{n_i} so definiert sind, daß die Intervalle, in denen sie von 0 verschieden sind, nicht über einander greifen; die Konvergenz der Reihe ist also keinem Zweifel unterworfen. Man braucht ferner keine allgemeinen Reihensätze anzuwenden, um zu sehen, daß $\chi(x)$ stetig ist und der Lipschitz-Bedingung

$$|\chi(x_2) - \chi(x_1)| \leqq \tfrac{1}{2} |x_2 - x_1|$$

genügt, wenn x_1 und x_2 irgend zwei Werte von x sind. Man sieht das durch Anwendung derselben Überlegungen, die im Falle der einfachen Funktion $\chi_n(x, \alpha)$ gebraucht wurden. Die Häufung der Übergangsstellen von einer analytischen Definition zu einer anderen in der Nähe der Punkte $0, \pi, \ldots$ bringt wirklich keine neue Komplikation. Seien x_1, x_2 irgend zwei Werte von x, und $x_1 \leqq x_2$. Gehören sie nicht einem Intervalle an, wo $\chi(x)$ durch einen einzigen analytischen Ausdruck definiert ist, so kann man zwei Werte x', x'' finden, $x_1 \leqq x' \leqq x'' \leqq x_2$, so daß x_1 und x' einem solchen Intervalle angehören bezw. zusammenfallen und x'' und x_2 ebenfalls, und so daß $\chi(x)$ in x' und x'' verschwindet. Wir haben dann

$$|\chi(x') - \chi(x_1)| \leqq \tfrac{1}{2} |x' - x_1|,$$
$$|\chi(x_2) - \chi(x'')| \leqq \tfrac{1}{2} |x_2 - x''|,$$

wie bei der Betrachtung von $\chi_n(x, \alpha)$, und natürlich

$$|\chi(x'') - \chi(x')| = 0 \leqq \tfrac{1}{2} |x'' - x'|,$$

also

$$|\chi(x_2) - \chi(x_1)| \leqq \tfrac{1}{2} |x_2 - x_1|.$$

Ferner ist

$$\chi(-x) = \chi(x), \qquad \chi(\pi - x) = \chi(x).$$

Der Rest nach den Gliedern n_i ter Ordnung in der Fourier-Reihe für $\chi(x)$ im Punkte 0 ist gleich

$$\text{Rest}\,[\chi_{n_1}+v_2\chi_{n_2}+\cdots+v_{i-1}\chi_{n_{i-1}}]+\text{Rest}\,[v_i\chi_{n_i}]$$
$$+\text{Rest}\,[v_{i+1}\chi_{n_{i+1}}+\cdots].$$

Diese drei Reste seien mit R_1, R_2, R_3 bezeichnet. Ist $v_i = 0$, so ist nach der Definition von v_i

$$|R_1| \geqq \frac{l^{(\eta)}}{2}\,\frac{\log n_i}{n_i}.$$

Ist $v_i = 1$, so ist

$$|R_2| > l^{(\eta)}\,\frac{\log n_i}{n_i},\quad |R_1| < \frac{l^{(\eta)}}{2}\,\frac{\log n_i}{n_i}.$$

Jedenfalls ist

$$|R_1+R_2| \geqq \frac{l^{(\eta)}}{2}\,\frac{\log n_i}{n_i}.$$

Die Funktion $v_{i+1}\chi_{n_{i+1}}+\cdots$ ist dem absoluten Betrage nach stets $\leqq \dfrac{1}{2n_{i+1}+1}$; nach dem Hilfssatz II a ist also

$$|R_3| < \frac{K\log n_i}{2n_{i+1}+1},$$

und die Anwendung von (8) ergibt

$$|R_3| < \frac{l^{(\eta)}}{4}\,\frac{\log n_i}{n_i}.$$

Für jeden der unendlich vielen Indizes $n_1, n_2 \ldots$ gilt folglich die Ungleichung

$$|R_1+R_2+R_3| > \frac{l^{(\eta)}}{4}\,\frac{\log n_i}{n_i}.$$

Daraus folgt sofort der Satz XIII. Denn wir wissen für jeden der Indizes n_i, nach Hilfssatz II, daß jede trigonometrische Summe $n_i$ter Ordnung irgendwo um wenigstens

$$\frac{1}{K\log n_i}\cdot\frac{l^{(\eta)}}{4}\cdot\frac{\log n_i}{n_i} = \frac{l^{(\eta)}}{4K}\cdot\frac{1}{n_i}$$

von $\chi(x)$ abweichen muß. Das heißt, $\chi(x)$ ist in der Tat eine solche Funktion, daß $\tau\chi(n)$ nicht $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ist.

Auch der Satz XII läßt sich jetzt leicht ableiten. Da die Funktion $\chi(x)$ periodisch mit der Periode 2π und außerdem gerade ist, ist sie eine eindeutige Funktion von $\cos x$. Diese Funktion von $\cos x$ genügt jedoch keiner Lipschitz-Bedingung in Bezug auf ihr Argument; die Differenz $|x_2 - x_1|$, welche in der schon aufgestellten Lipschitz-Bedingung vorkommt, kann jedes Vielfache von $|\cos x_2 - \cos x_1|$ übertreffen. Aber $\chi(x)$ genügt noch einer Symmetriebedingung, nämlich $\chi(\pi - x) = \chi(x)$, und ist demzufolge auch eine eindeutige Funktion von $\sin x$, $= \psi(\sin x)$. Diese Funktion genügt nun in der Tat einer Lipschitz-Bedingung in Bezug auf ihr Argument, da sie in der Nähe der gefährlichen Punkte, wo $\frac{d}{dx}\sin x = 0$ ist, den konstanten Wert 0 hat. Seien $\sin x_1$, $\sin x_2$ irgend zwei Werte von $\sin x$. Wir können annehmen, daß x_1 und x_2 dem Intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ angehören, und zwar im ungünstigsten Falle, da $\chi(x)$ nur in Punkten solcher Intervalle von 0 verschieden ist, wo $|\cos x| > \cos\frac{\pi}{3}$ ist, daß die Ungleichungen

$$-\frac{\pi}{3} \leqq x_1 \leqq \frac{\pi}{3}, \qquad -\frac{\pi}{3} \leqq x_2 \leqq \frac{\pi}{3}$$

bestehen. Wir haben dann

$$|\sin x_2 - \sin x_1| = |x_2 - x_1|\,|\cos \xi|, \quad x_1 \leqq \xi \leqq x_2 \ (\text{bezw. } x_2 \leqq \xi \leqq x_1),$$

$$\geqq |x_2 - x_1| \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}|x_2 - x_1|;$$

$$|\psi(\sin x_2) - \psi(\sin x_1)| = |\chi(x_2) - \chi(x_1)|$$

$$\leqq \tfrac{1}{2}|x_2 - x_1| \leqq |\sin x_2 - \sin x_1|;$$

ψ genügt also dieser Lipschitz-Bedingung.

Man nehme an, es wäre für die Darstellung von $\psi(x)$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ durch Polynome, $\varphi_\psi(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Wenn wir als Argument von ψ wieder $\sin x$ schreiben, würde diese Annahme besagen, daß $\psi(\sin x)$ mit der genannten Ordnung der Genauigkeit durch eine Folge von Polynomen in $\sin x$ dargestellt werden kann, also, nach Hilfssatz I b, durch eine Folge von trigonometrischen Summen in x. Das ist, wie wir wissen, eben nicht möglich. Es ist also $\psi(x)$ tatsächlich eine Funktion von x, die einer Lipschitz-Bedingung genügt, und für die $\varphi_\psi(n)$ nicht $o\left(\frac{1}{n}\right)$ ist. Wir haben hier das spezielle Intervall $(-1, 1)$ vor Augen gehabt; aber, wie schon bemerkt worden, läßt sich der Satz sofort auf ein beliebiges Intervall übertragen.

Die größere Allgemeinheit in der Formulierung des Satzes bei Lebesgue (für den Fall der trigonometrischen Annäherung) besteht darin, daß er ihn nicht nur für den Fall einer Lipschitz-Bedingung aufstellt, sondern in der allgemeineren Form, die dem Satze VIII entspricht, allerdings nur unter gewissen Annahmen betreffend die Beschaffenheit der Funktion $\omega(\delta)$. Der Beweis gestaltet sich folgendermaßen.

Wir nehmen an, wie wir schon an einer anderen Stelle getan haben, daß $\omega(\delta)$ bei wachsendem δ eine nie abnehmende Funktion und $\lim\limits_{\delta=0} \omega(\delta) = 0$ ist, aber auch noch, daß $\frac{\omega(\delta)}{\delta}$ nie zunimmt. Diese letzte Einschränkung ist der Natur der Sache nicht fremd, denn sie sagt aus gewissermaßen, daß $\omega(\delta)$ für kleines δ nicht zu stark gegen 0 konvergieren soll; und eine derartige Annahme ist ganz naturgemäß, denn wäre für irgend eine Funktion $\lim\limits_{\delta=0} \frac{\omega(\delta)}{\delta} = 0$, so würde das bedeuten, daß die Funktion für jeden Wert von x eine verschwindende Ableitung hat, also gleich einer Konstanten ist, ein trivialer Fall. Allein die Annahme, die wir gemacht haben, und zu der wir $\omega(\delta) > 0$ für $\delta > 0$ hinzufügen, verlangt etwas mehr, als daß $\lim\limits_{\delta=0} \frac{\omega(\delta)}{\delta}$ nicht 0 sein soll.

Wir wollen eine solche Funktion $\chi(x)$ konstruieren, daß $\tau_\chi(n)$ nicht $o\left(\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$ ist.

An Stelle der Reihe der Indizes n_i bilden wir eine Reihe von Zahlen ν_i, wie folgt: Sei ν_1 die kleinste ganze Zahl, die mit $\alpha = \frac{\pi}{3}$ den Ungleichungen 5a ... 5c genügt; (wir geben η irgend einen festen positiven Wert); sei ν_i, $i = 2, 3, \ldots$ die kleinste ganze Zahl, die diesen Ungleichungen mit $\alpha = \frac{4\pi}{2\nu_{i-1}+1}$ und außerdem der folgenden genügt:

$$(10) \qquad \frac{K}{2\pi}\,\omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_i+1}\right) < \frac{l^{(\eta)}}{4}\cdot\frac{1}{\nu_{i-1}}\,\omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_{i-1}+1}\right)\cdot\frac{2\nu_{i-1}+1}{2\pi}.$$

Wenn $\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}$ definiert worden sind, kann man immer eine solche Zahl ν_i bestimmen, da $\lim\limits_{\nu=\infty} \omega\left(\frac{2\pi}{2\nu+1}\right) = 0$ ist. Mit diesen Indizes definieren wir dann die Funktionen

$$\chi_1\left(x, \frac{\pi}{3}\right), \ldots, \chi_{\nu_i}\left(x, \frac{4\pi}{2\nu_{i-1}+1}\right), \ldots$$

Den Zahlen v_i entsprechend führen wir eine Reihe von Symbolen w_i ein, wo $w_i = 0$ oder 1 sein soll, je nachdem der Rest nach Gliedern $\nu_i$ter Ordnung für $x = 0$ in der Fourier-Reihe für $\chi_{\nu_1} + w_2 \chi_{\nu_2} + \cdots + w_{i-1} \chi_{\nu_{i-1}}$ absolut genommen

$$\geqq \text{ oder } < \frac{l^{(\eta)}}{2} \cdot \frac{\log \nu_i}{\nu_i} \cdot \omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_i + 1}\right) \cdot \frac{2\nu_i + 1}{2\pi}$$

ist. Und wir setzen

$$\chi(x) = \omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_1 + 1}\right) \cdot \frac{2\nu_1 + 1}{2\pi} \chi_{\nu_1} + \omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_2 + 1}\right) \cdot \frac{2\nu_2 + 1}{2\pi} \cdot w_2 \chi_{\nu_2}$$
$$+ \omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_3 + 1}\right) \cdot \frac{2\nu_3 + 1}{2\pi} \cdot w_3 \chi_{\nu_3} + \cdots$$

Überzeugen wir uns, daß $\chi(x)$ tatsächlich der Bedingung genügt

$$|\chi(x_2) - \chi(x_1)| \leqq \omega(\delta) \quad \text{wenn } |x_2 - x_1| \leqq \delta \text{ ist.}$$

Da wir angenommen haben, daß $\omega(\delta)$ bei wachsendem δ nicht abnimmt, brauchen wir nur zu zeigen, daß

$$|\chi(x_2) - \chi(x_1)| \leqq \omega(|x_2 - x_1|)$$

ist. Seien x_1, x_2 zunächst zwei Werte, die einem Intervalle angehören, wo $\chi(x)$ einen einzigen analytischen Ausdruck hat, etwa

$$\omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_i + 1}\right) \cdot \frac{2\nu_i + 1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\nu_i + 1} \sin(2\nu_i + 1)\frac{x}{2}.$$

(Die anderen Ausdrücke, die durch Symmetrie oder Periodizität daraus entstehen, sind ebenso zu behandeln). Wir können im Intervalle

$$-\frac{\pi}{2} \leqq (2\nu_i + 1)\frac{x}{2} \leqq \frac{\pi}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2\nu_i + 1} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2\nu_i + 1}$$

zwei Werte $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ so finden, daß

$$\sin(2\nu_i + 1)\frac{\bar{x}_1}{2} = \sin(2\nu_i + 1)\frac{x_1}{2},$$

$$\sin(2\nu_i + 1)\frac{\bar{x}_2}{2} = \sin(2\nu_i + 1)\frac{x_2}{2}$$

und

$$|\bar{x}_2 - \bar{x}_1| \leqq |x_2 - x_1|$$

ist.

$$\left|\sin(2\nu_i + 1)\frac{\bar{x}_2}{2} - \sin(2\nu_i + 1)\frac{\bar{x}_1}{2}\right| \leqq \frac{2\nu_i + 1}{2} |\bar{x}_2 - \bar{x}_1|.$$

$$\omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_i + 1}\right) \cdot \frac{2\nu_i + 1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\nu_i + 1} \left|\sin(2\nu_i + 1)\frac{x_2}{2} - \sin(2\nu_i + 1)\frac{x_1}{2}\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2}\cdot\omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_i+1}\right)\cdot\frac{2\nu_i+1}{2\pi}\,|\overline{x}_2-\overline{x}_1|$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_i+1}\right)}{\frac{2\pi}{2\nu_i+1}}\cdot\frac{(|\overline{x}_2-\overline{x}_1|)}{\omega(|\overline{x}_2-\overline{x}_1|)}\cdot\omega(|\overline{x}_2-\overline{x}_1|)$$

$$\leqq \frac{1}{2}\,\omega(|\overline{x}_2-\overline{x}_1|)$$

(da $|\overline{x}_2-\overline{x}_1| \leqq \frac{2\pi}{2\nu_i+1}$ und $\frac{\omega(\delta)}{\delta}$ eine nicht zunehmende Funktion ist)

$$\leqq \tfrac{1}{2}\,\omega(|x_2-x_1|),$$

da $|\overline{x}_2-\overline{x}_1| \leqq |x_2-x_1|$ ist und $\omega(\delta)$ bei wachsendem δ nicht abnimmt. Jetzt seien x_1, x_2 irgend zwei Werte von x. Wir finden auf der durch x_1 und x_2 begrenzten Strecke zwei Werte x', x'' wie auf S. 63;

$$\begin{aligned}
&|\chi(x')-\chi(x_1)| \leqq \tfrac{1}{2}\,\omega(|x'-x_1|) \leqq \tfrac{1}{2}\,\omega(|x_2-x_1|),\\
&|\chi(x'')-\chi(x')| = 0,\\
&|\chi(x_2)-\chi(x'')| \leqq \tfrac{1}{2}\,\omega(|x_2-x''|) \leqq \tfrac{1}{2}\,\omega(|x_2-x_1|),
\end{aligned}$$

also

$$|\chi(x_2)-\chi(x_1)| \leqq \omega(|x_2-x_1|).$$

Nachdem wir das haben, ist die Sache ganz einfach. Wir spalten den Rest nach Gliedern ν_i ter Ordnung in der Fourier-Reihe für $\chi(x)$ im Punkte $x = 0$ in drei Teile R_1, R_2, R_3, wie vorhin. Ist $w_i = 1$, so ist

$$|R_2| \geqq \omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_i+1}\right)\cdot\frac{2\nu_i+1}{2\pi}\cdot l^{(\eta)}\,\frac{\log\nu_i}{\nu_i}.$$

Sowohl bei $w_i = 1$ als bei $w_i = 0$ ist dann

$$|R_1+R_2| \geqq \frac{l^{(\eta)}}{2}\cdot\frac{\log\nu_i}{\nu_i}\cdot\omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_i+1}\right)\cdot\frac{2\nu_i+1}{2\pi}.$$

$$\left|\omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_{i+1}+1}\right)\cdot\frac{2\nu_{i+1}+1}{2\pi}\cdot w_{i+1}\,\chi_{\nu_{i+1}}+\cdots\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2\nu_{i+1}+1}\cdot\omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_{i+1}+1}\right)\cdot\frac{2\nu_{i+1}+1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\,\omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_{i+1}+1}\right).$$

$$|R_2| \leqq K \log \nu_i \cdot \frac{1}{2\pi}\, \omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_{i+1}+1}\right)$$

$$< \log \nu_i \cdot \frac{l^{(\eta)}}{4} \cdot \frac{1}{\nu_i}\, \omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_i+1}\right) \cdot \frac{2\nu_i+1}{2\pi},$$

nach (10).

$$|R_1+R_2+R_3| > \frac{l^{(\eta)}}{4} \cdot \frac{\log \nu_i}{\nu_i} \cdot \omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_i+1}\right) \cdot \frac{2\nu_i+1}{2\pi};$$

$$\frac{\omega\left(\dfrac{2\pi}{2\nu_i+1}\right)}{\dfrac{2\pi}{2\nu_i+1}} \geqq \frac{\omega\left(\dfrac{2\pi}{\nu_i}\right)}{\dfrac{2\pi}{\nu_i}},$$

also

$$\frac{1}{\nu_i}\, \omega\left(\frac{2\pi}{2\nu_i+1}\right) \cdot \frac{2\nu_i+1}{2\pi} \geqq \frac{1}{2\pi}\, \omega\left(\frac{2\pi}{\nu_i}\right);$$

$$|R_1+R_2+R_3| > \frac{l^{(\eta)}}{8\pi}\, \omega\left(\frac{2\pi}{\nu_i}\right) \log \nu_i.$$

Es folgt sofort, daß jede trigonometrische Summe ν_i ter Ordnung um wenigstens $\frac{l^{(\eta)}}{8\pi K}\, \omega\left(\frac{2\pi}{\nu_i}\right)$ von $\chi(x)$ abweicht, daß folglich $\tau_\chi(n)$ nicht $o\left(\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$ sein kann.

Für den Fall der Polynomdarstellung setzen wir $\chi(x) = \psi(\sin x)$, und berücksichtigen wieder die Tatsache, daß wir zu einem Wertepaar $\sin x_1$, $\sin x_2$ im ungünstigsten Falle solche Werte von x_1, x_2 finden können, daß

$$|\sin x_2 - \sin x_1| \geqq \tfrac{1}{2}\, |x_2 - x_1|$$

ist.

$$|\psi(\sin x_2) - \psi(\sin x_1)| = |\chi(x_2) - \chi(x_1)| \leqq \omega(|x_2 - x_1|)$$

$$\leqq \omega(2\,|\sin x_2 - \sin x_1|) \leqq 2\omega(|\sin x_2 - \sin x_1|),$$

wegen $\frac{\omega(2\delta)}{2\delta} \leqq \frac{\omega(\delta)}{\delta}$. Setzen wir $2\omega = \omega_1$, so ist

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)| \leqq \omega_1(|x_2 - x_1|)$$

für x_1, x_2 in $(-1, 1)$; und ω_1 ist natürlich eine ebenso allgemeine Funktion wie ω. Wir finden dann, daß für die Indizes $n = \nu_i$ und $-1 \leqq x \leqq 1$

$$\varphi_\psi(n) > \frac{l^{(\eta)}}{8\pi K}\,\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{l^{(\eta)}}{16\pi K}\,\omega_1\left(\frac{2\pi}{n}\right) > \frac{l^{(\eta)}}{16\pi K}\,\omega_1\left(\frac{2}{n}\right)$$

ist. (2 ist die Länge des Intervalls). Mit den Einzelheiten der Ausdehnung auf ein beliebiges Intervall will ich mich hier nicht aufhalten. Das Resultat bezieht sich nur auf die Größenordnung des Fehlers; der konstante Faktor wird nicht durch diese Methode als proportional der Länge des Intervalls gegeben.

Eine andere Verallgemeinerung der Sätze XII und XIII ist eine solche, die Sätzen II und VII entspricht. Ich führe den Beweis für den Fall $k = 4$*).

Sei $\chi_n(x, \alpha)$ ähnlich definiert wie vorhin, nur daß wir n jetzt den Ungleichungen

$$\text{(5 a)} \qquad \frac{6\pi}{2n+1} \leqq \alpha,$$

$$\text{(5 b}'\text{)} \qquad \frac{1}{2}\log\left(n + \frac{1}{2}\right) > \left|\log\frac{\alpha}{\pi}\right|,$$

$$\text{(5 c}'\text{)} \qquad \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^5}\left(1 - \frac{\log 3}{\log 4}\right)\log n > \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

unterwerfen**) und die Definition von $\chi_n(x, \alpha)$ in

$$\frac{4\pi}{2n+1} \leqq x \leqq \frac{2p\pi}{2n+1}$$

durch

$$\chi_n(x, \alpha) = \frac{1}{(2n+1)^4}\sin^3(2n+1)\frac{x}{2}\left|\sin(2n+1)\frac{x}{2}\right|$$

ersetzen. (Bei ungeradem k würden wir einfach

$$\frac{1}{(2n+1)^k}\sin^k(2n+1)\frac{x}{2}$$

zu setzen haben).

$$-r_n(0) = \frac{2}{(2n+1)^4\pi}\left(\int_{\frac{2\pi}{2n+1}}^{\frac{p\pi}{2n+1}} \frac{|\sin^5(2n+1)t|}{\sin t}\,dt\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{p\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{2n+1}} \sin^3(2n+1)\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\left|\sin(2n+1)\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt\right).$$

---

*) Ich kürze die Rechnungen ab, wo sie den früheren genau entsprechen.

**) Wir führen hier kein unbestimmtes η ein.

$$\int_{\frac{2\pi}{2n+1}}^{\frac{p\pi}{2n+1}} \frac{|\sin^5(2n+1)t|}{\sin t}\,dt > \sum_{i=3}^{p} \int_{\frac{(i-1)\pi+\frac{\pi}{6}}{2n+1}=\alpha_i}^{\frac{i\pi-\frac{\pi}{6}}{2n+1}=\beta_i} \frac{|\sin^5(2n+1)t|}{\sin t}\,dt$$

$$> \frac{1}{2^5}\sum_{i=3}^{p}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\frac{dt}{\sin t} > \frac{1}{2^5}\cdot\frac{2}{3}\log(p+1)\left[1-\frac{\log 3}{\log(p+1)}\right]$$

(indem wir die Zwischenrechnungen von S. 59—60 wieder anwenden)

$$> \frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{\log 3}{\log 4}\right)\log n.$$

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{p\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{2n+1}}\right| < \frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^5}\left(1-\frac{\log 3}{\log 4}\right)\log n.$$

$$\frac{2}{(2n+1)^4\pi} \geqq \frac{2}{(3n)^4\pi}, \qquad n \geqq 1.$$

Sei

$$l = \frac{2}{3^4\pi}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^5}\left(1-\frac{\log 3}{\log 4}\right).$$

Dann ist

$$|r_n(0)| > l\,\frac{\log n}{n^4}.$$

Sei ν_1 die kleinste ganze Zahl, die für $\alpha = \frac{\pi}{3}$ den Ungleichungen 5a, 5b′, 5c′ genügt. Sei ν_i, $i = 2,3,\ldots$ definiert als die kleinste ganze Zahl, die denselben Bedingungen für $\alpha = \frac{4\pi}{2\nu_{i-1}+1}$ und auch der folgenden genügt:

$$\frac{K}{(2\nu_i+1)^4} < \frac{l}{4\nu_{i-1}^4},$$

wo K dieselbe Bedeutung hat wie früher. Nachdem man eine Reihe von Zahlen w_i den jetzigen Verhältnissen entsprechend definiert hat — wir brauchen die genauen Formeln nicht aufzuschreiben — setze man

$$\chi(x) = \chi_{\nu_1}\left(x, \frac{\pi}{3}\right) + w_2\chi_{\nu_2}\left(x, \frac{4\pi}{2\nu_1+1}\right) + \cdots$$

Man kommt sofort zu den auf diese Funktion bezüglichen Ungleichungen

$$|R_1 + R_2| \geqq \frac{l}{2} \frac{\log \nu_i}{\nu_i^4},$$

$$|R_3| < \frac{K \log \nu_i}{(2\nu_{i+1}+1)^4} < \frac{l}{4} \frac{\log \nu_i}{\nu_i^4},$$

(11) $$|R_1 + R_2 + R_3| > \frac{l}{4} \frac{\log \nu_i}{\nu_i^4}.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß $\chi(x)$ eine stetige dritte Ableitung hat, welche einer Lipschitz-Bedingung genügt. Wegen der Symmetrieeigenschaften der Funktion genügt es, wenn wir das für das Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nachweisen. Ist x ein Punkt dieses Intervalls, wo $\chi(x)$ von 0 verschieden ist, so hat $\chi(x)$ in einer ganzen Nachbarschaft des Punktes die Form

(12) $$\chi(x) = \pm \frac{1}{m^4} \sin^4 m \frac{x}{2},$$

wo m eine positive ganze Zahl ist.

$$\pm 2\chi'(x) = \frac{4}{m^3} \sin^3 m \frac{x}{2} \cos m \frac{x}{2}, \quad \text{u. s. w.}$$

Die dritte Ableitung hat die Form

$$\chi'''(x) = \frac{1}{m} \sin m \frac{x}{2} p(x),$$

wo $p(x)$ ein Polynom in $\sin m \frac{x}{2}$ und $\cos m \frac{x}{2}$ ist*). In einem von 0 verschiedenen Punkte, wo $\chi(x)$ gleich 0 ist, ist $\chi(x)$ nach jeder Seite hin entweder gleich einem Ausdruck (12) oder identisch gleich 0. Jedenfalls existieren erste, zweite, und dritte Ableitungen nach rechts und nach links, und diese Werte sind alle gleich einander und gleich 0. Wir haben noch das Verhalten im Punkte 0 zu untersuchen. Sei h ein von 0 verschiedener Wert im Intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ist $\chi(h) \neq 0$, so ist

---

*) Explizit ist $\pm \chi'''(x) = \frac{1}{m} \sin m \frac{x}{2} \left[3 \cos^3 m \frac{x}{2} - 5 \sin^2 m \frac{x}{2} \cos m \frac{x}{2}\right].$

$$\chi(h) = \pm \frac{1}{m^4} \sin^4 m \frac{h}{2},$$

und zwar mit einem solchen Wert von m, daß $h > \frac{4\pi}{m}$ ist, also

$$|\chi(h)| \leqq \frac{1}{m^4} < \left(\frac{1}{4\pi}\right)^4 h^4.$$

Diese Ungleichung gilt natürlich auch, wenn $\chi(h) = 0$ ist.

$$\left| \frac{\chi(h) - \chi(0)}{h - 0} \right| = \left| \frac{\chi(h)}{h} \right| < \left(\frac{1}{4\pi}\right)^4 h^3;$$

$$\lim_{h=0} \frac{\chi(h) - \chi(0)}{h - 0} = 0.$$

D. h., $\chi'(x)$ ist im Punkte 0 vorhanden und gleich 0. (Explizit sprechen wir hier natürlich nur von der Ableitung nach rechts, da wir uns auf das Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ beschränken, aber die Resultate lassen sich sofort auf jedes andere Intervall übertragen.)

Für einen von 0 verschiedenen Punkt h ist

$$\chi'(h) = 0 \text{ oder } |\chi'(h)| = \left| \frac{2}{m^3} \sin^3 m \frac{h}{2} \cos m \frac{h}{2} \right| \leqq \frac{2}{m^3} < 2 \left(\frac{1}{4\pi}\right)^3 h^3,$$

$$\lim_{h=0} \frac{\chi'(h) - \chi'(0)}{h - 0} = 0,$$

$\chi''(0) = 0$; und ebenso findet man, daß $\chi'''(0)$ existiert und gleich 0 ist, auch daß $\chi'''(x)$ für $x = 0$ den Limes 0 hat. Die dritte Ableitung von $\chi(x)$ ist folglich ausnahmslos vorhanden und stetig.

Wenn man auf die analytische Definition der Ableitung zurückgreift in den Intervallen, wo sie von 0 verschieden ist, sieht man durch wesentlich dieselben Betrachtungen, die wir bei anderen Gelegenheiten angewendet haben, daß sie einer Lipschitz-Bedingung genügt.

$\chi(x)$ ist wieder eine eindeutige Funktion von $\sin x$, $= \psi(\sin x)$.

$$\frac{d}{d \sin x} \psi(\sin x) = \frac{d}{dx} \chi(x) \cdot \frac{dx}{d \sin x} = \frac{1}{\cos x} \chi'(x);$$

$$\frac{d^2}{(d \sin x)^2} \psi(\sin x) = \frac{1}{\cos^2 x} \chi''(x) + \frac{\sin x}{\cos^3 x} \chi'(x);$$

$$\frac{d^3}{(d \sin x)^3} \psi(\sin x) = \frac{1}{\cos^3 x} \chi'''(x) + 3 \frac{\sin x}{\cos^4 x} \chi''(x) + \frac{1 + 2 \sin^2 x}{\cos^5 x} \chi'(x).$$

Da überall, wo nicht $\chi'(x) = \chi''(x) = \chi'''(x) = 0$ stattfindet, $\cos x > \frac{1}{2}$ ist, sind die beiden letzten Glieder dieses Ausdrucks stetige Funktionen mit stetiger erster Ableitung, während das erste Glied einer Lipschitz-Bedingung genügt, da $\chi'''(x)$ es tut; dasselbe gilt also von dem ganzen Ausdruck, als Funktion von x angesehen. Und da diese Funktion in der Nähe der Punkte, wo $\frac{d}{dx}\sin x = 0$ ist, identisch verschwindet, genügt sie einer Lipschitz-Bedingung auch in Bezug auf $\sin x$. Aus (11) folgt, daß für die unendlich vielen Werte $n = \nu_i$ von n jedes Polynom $n$ten Grades in x in $(-1, 1)$ um wenigstens $\frac{l}{4K}\cdot\frac{1}{n^4}$ von $\psi(x)$ abweichen muß; und das entsprechende gilt natürlich betreffend die Darstellung von $\chi(x)$ durch eine trigonometrische Summe. Für allgemeines k könnten wir ohne wesentliche Änderung des eben dargelegten Beweises die Sätze ableiten:

Satz XIV. *Es gibt Funktionen, die eine $(k-1)$te Ableitung haben, welche einer Lipschitz-Bedingung genügt, und für die trotzdem $\varphi(n)$ nicht $o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ ist.*

Satz XIVa. *Es gibt Funktionen, die periodisch sind mit der Periode 2π, und die eine $(k-1)$te Ableitung besitzen, welche einer Lipschitz-Bedingung genügt, für die aber $\tau(n)$ nicht $o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ ist.*

3. Beispiele dafür, dass bei Lipschitz-Bedingung $\frac{1}{n^{1+\eta}} = O(\varphi(n))$ bezw. $\frac{1}{n^{1+\eta}} = O(\tau(n))$ ist.

(Methode des vorigen Paragraphen.)

Bei dem Satz XII haben wir zu dem Intervalle $(-1, 1)$ eine Funktion $\psi(x)$ konstruiert, von der wir bewiesen haben, daß sie einer Lipschitz-Bedingung genügt, daß jedoch für die unendlich vielen Indizes n_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$\varphi_\psi(n) > \frac{g}{n}$$

ist, wo g eine Konstante ist, auf deren genauere Bestimmung es hier nicht ankommt. Wir können nicht behaupten, daß das für *jeden* Wert von n eintritt. Aber für einen beliebigen Wert von n können wir doch etwas aussagen. Sei

$$n_i < n \leqq n_{i+1}.$$

(Von den endlich vielen Werten $n \leqq n_1$ können wir absehen). Jedes Polynom $n$ten Grades kann als ein Polynom n_{i+1}ten Grades angesehen werden, und muß daher um wenigstens $\frac{g}{n_{i+1}}$ von $\psi(x)$ abweichen. Andererseits ist nach Definition der n

$$n_{i+1} < n_i^{1+\eta} + 1 < n^{1+\eta},$$

da $n \geqq n_i + 1$ ist*). η ist dabei irgend eine positive Zahl; allein $\psi(x)$ ist erst dann definiert, wenn η gegeben ist. Das ergibt:

Satz XV. Zu jeder positiven Zahl η gibt es Funktionen, die einer Lipschitz-Bedingung genügen, für die aber $\frac{1}{n^{1+\eta}} = O(\varphi(n))$ ist.

Und natürlich ebenso:

Satz XVa. Zu jeder positiven Zahl η gibt es Funktionen, die periodisch sind mit der Periode 2π, und die einer Lipschitz-Bedingung genügen, für die aber $\frac{1}{n^{1+\eta}} = O(\tau(n))$ ist.

4. Elementare Behandlung desselben Problemes im Falle von $\varphi(n)$. Verschärfung und Verallgemeinerung.

Wenn man nur den Satz XV haben will, und XII nicht verlangt, kann man sehr viel einfacher zum Ziele kommen, durch ganz elementare Betrachtungen, die denen des ersten Paragraphen dieses Abschnitts nachgebildet sind. Wir nehmen statt $(-1, 1)$ das Intervall $(0, 1)$; die Änderung ist ganz unwesentlich. Man betrachte dort die Funktion

$$\psi(x) = x^{p+2} \cos \frac{1}{x^p}, \quad x \neq 0; \quad \psi(0) = 0.$$

p soll dabei eine positive ganze Zahl sein. $\psi(x)$ genügt einer Lipschitz-Bedingung und hat sogar eine stetige erste Ableitung:

$$\psi'(x) = (p+2)\, x^{p+1} \cos \frac{1}{x^p} + px \sin \frac{1}{x^p}, \quad x \neq 0; \quad \psi'(0) = 0.$$

---

*) $(n_i + 1)^{1+\eta} = (n_i + 1)(n_i + 1)^{\eta} = n_i (n_i + 1)^{\eta} + (n_i + 1)^{\eta} > n_i^{1+\eta} + 1$ für positives η.

An den Punkten $\frac{1}{x^p} = \pi, 2\pi, \ldots, (n+2)\pi$ ist $\psi(x)$ mit abwechselndem Vorzeichen gleich $\pm x^{p+2}$, also dem absoluten Betrage nach

$$\geqq \left(\frac{1}{[(n+2)\pi]^{\frac{1}{p}}}\right)^{p+2} \geqq \frac{1}{(3n\pi)^{\frac{p+2}{p}}} = \frac{1}{(3\pi)^{1+\frac{2}{p}}} \cdot \frac{1}{n^{1+\frac{2}{p}}}$$

$$\geqq \frac{1}{27\pi^3} \cdot \frac{1}{n^{1+\frac{2}{p}}}$$

für alle positiven ganzzahligen Werte von n und p. Ist η irgend eine positive Zahl, so nehmen wir p so groß, daß $\frac{2}{p} < \eta$ ist, und wir haben das, was der Satz XV verlangt, und zwar noch mehr, da $\psi(x)$ eine stetige Ableitung hat.

Allgemeiner beweisen wir fast ebenso leicht:

Satz XVI. Ist k eine positive ganze Zahl, und η eine positive Zahl, so gibt es Funktionen, die k stetige Ableitungen haben, für die aber $\frac{1}{n^{k+\eta}} = O(\varphi(n))$ ist.

Wir setzen

$$\psi(x) = x^{k(p+1)+1} \cos \frac{1}{x^p}, \quad x \neq 0; \quad \psi(0) = 0.$$

Für $0 < x \leqq 1$ hat die erste Ableitung einen Faktor $x^{(k-1)(p+1)+1}$, und die $k$te Ableitung einen Faktor x, während der andere Faktor ein Polynom in x, $\cos\frac{1}{x^p}$ und $\sin\frac{1}{x^p}$, also für $0 < x \leqq 1$ beschränkt ist; für $x = 0$ ist $\psi^{(k)}(x)$ gleich 0. $\psi^{(k)}(x)$ ist also im ganzen Intervalle vorhanden und stetig. An den $(n+2)$ Punkten $x^p = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \ldots, \frac{1}{(n+2)\pi}$ ist $\psi(x)$ von abwechselndem Vorzeichen und absolut genommen

$$\geqq \left(\frac{1}{[(n+2)\pi]^{\frac{1}{p}}}\right)^{k(p+1)+1} \geqq \frac{1}{(3\pi)^{k+\frac{k+1}{p}}} \cdot \frac{1}{n^{k+\frac{k+1}{p}}}$$

$$\geqq \frac{1}{(3\pi)^{2k+1}} \cdot \frac{1}{n^{k+\frac{k+1}{p}}},$$

und wir brauchen nur $\frac{k+1}{p} < \eta$ zu machen.

Man kann den Satz XV auch in einem anderen Sinne verschärfen. Sei

$$\psi(x) = x^{p+2} e^{-\frac{1}{x^p}} \cos e^{\frac{1}{x^p}}, \quad 0 < x \leqq 1; \quad \psi(0) = 0.$$

$$\psi'(x) = (p+2)\, x^{p+1} e^{-\frac{1}{x^p}} \cos e^{\frac{1}{x^p}} + pxe^{-\frac{1}{x^p}} \cos e^{\frac{1}{x^p}} + px \sin e^{\frac{1}{x^p}},$$
$$0 < x \leqq 1; \qquad \psi'(0) = 0.$$

$\psi(x)$ hat also eine stetige erste Ableitung. Die Funktion ist gleich $\pm\, x^{p+2} e^{-\frac{1}{x^p}}$ für

$$e^{\frac{1}{x^p}} = \pi, 2\pi \ldots, \qquad \frac{1}{x^p} = \log \pi, \quad \log 2\pi \ldots,$$

$$x^{p+2} e^{-\frac{1}{x^p}} = \frac{1}{\pi (\log \pi)^{1+\frac{2}{p}}} \cdot \frac{1}{2\pi (\log 2\pi)^{1+\frac{2}{p}}} \ldots;$$

$\psi(x)$ hat $(n+2)$ mal mit abwechselndem Vorzeichen einen absoluten Betrag

$$\geqq \frac{1}{(n+2)\,\pi\, [\log (n+2)\,\pi]^{1+\frac{2}{p}}} \geqq \frac{1}{3n\pi\, (\log 3n\pi)^{1+\frac{2}{p}}}.$$

$$\log 3n\pi = \log n + \log 3\pi < 2 \log n, \quad (n > 3\pi);$$

$$\frac{1}{(n+2)\,\pi\, [\log (n+2)\,\pi]^{1+\frac{2}{p}}} \geqq \frac{1}{3\pi \,.\, 2^{1+\frac{2}{p}}} \cdot \frac{1}{n (\log n)^{1+\frac{2}{p}}}$$
$$\geqq \frac{1}{3\pi \,.\, 2^3} \cdot \frac{1}{n (\log n)^{1+\frac{2}{p}}}$$

für $n > 3\pi$. Sobald n eine bestimmte endliche Grenze übertrifft, muß also jedes Polynom n ten Grades um diesen Betrag von $\psi(x)$ abweichen. Zu jedem $\eta > 0$ können wir dann ein $\psi(x)$ konstruieren, das eine stetige erste Ableitung hat, so daß

$$\frac{1}{n (\log n)^{1+\eta}} = O(\varphi_\psi(n))$$

ist. Mittels der Funktion

$$\psi(x) = x^{p+2} e^{-\frac{1}{x^p}} e^{-e^{\frac{1}{x^p}}} \cos e^{e^{\frac{1}{x^p}}}$$

würden wir auf $\frac{1}{n \log n\,(\log\log n)^{1+\eta}}$ kommen, u. s. w. Daß es mit dieser Methode nicht gelingen kann, die untere Abschätzung etwa auf $\frac{1}{n}$ oder $\frac{1}{n \log n}$ zu bringen, ist deswegen evident, weil jede Funktion, die einer Lipschitz-Bedingung genügt, in einem endlichen Intervalle eine beschränkte gesamte Schwankung haben muß; die Summe der absoluten Beträge der Werte, die mit abwechselndem Vorzeichen angenommen werden, muß konvergieren.

5. Beziehung zwischen trigonometrischer und polynomischer Annäherung.

Im vorigen Paragraphen ist nur von Annäherung durch Polynome die Rede gewesen. Die dort auseinandergesetzte Methode kann durch folgenden Satz auf das Problem der Darstellung durch trigonometrische Summen anwendbar gemacht werden:

Satz XVII. Ist $f(x)$ eine solche Funktion, periodisch oder nicht, daß es für unendlich viele Werte von n eine trigonometrische Summe $T_n(x)$ von der $n$ten oder einer niedrigeren Ordnung gibt, so daß im ganzen Intervalle $-\pi \leqq x \leqq \pi$ die Ungleichung

$$|f(x) - T_n(x)| \leqq \frac{g}{n^k}$$

besteht, wo k und g von n unabhängige positive Konstante sind, so gibt es auch für unendlich viele Werte von $\bar{n}$ ein Polynom $P_{\bar{n}}(x)$ höchstens $\bar{n}$ten Grades, so daß in demselben Intervalle

$$|f(x) - P_{\bar{n}}(x)| \leqq \frac{G}{\bar{n}^k}$$

ist, wo G eine von $\bar{n}$ unabhängige Konstante bedeutet.

Ist die Voraussetzung für alle Werte von n erfüllt, so kann auch $\bar{n}$ alle ganzzahligen Werte durchlaufen.

Diese letzte Bemerkung fügen wir ihres eigenen Interesses wegen hinzu; für die Anwendung brauchen wir sie nicht.

Ich zeige zunächst, nach Fréchet*), daß die Koeffizienten der trigonometrischen Summen $T_n(x)$ beziehungsweise gleichmäßig gegen die Koeffizienten der Fourier-Reihe von $f(x)$ konvergieren müssen. Da $f(x)$ durch eine gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen dargestellt werden kann, ist es notwendig stetig.

Seien u_{np}, v_{np} die Koeffizienten von $\cos px$, $\sin px$, in $T_n(x)$, und a_p, b_p die entsprechenden Koeffizienten in der Fourier-Reihe.

$$u_{np} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\cos px\,dx, \quad a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos px\,dx;$$

$$|u_{np} - a_p| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[T_n(x) - f(x)]\cos px\,dx\right| \leqq \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi.\frac{g}{n^k} = \frac{2g}{n^k}.$$

Für irgend ein festes p ist also $\lim\limits_{n=\infty} u_{np} = a_p$, und ebenso $\lim\limits_{n=\infty} v_{np} = b_p$; die Größe $\frac{2g}{n^k}$ ist ferner von p unabhängig. Dabei haben wir keinen Gebrauch gemacht von der besonderen Art der Konvergenz; der Satz muß von jeder gleichmäßig konvergenten Folge von trigonometrischen Summen gelten.

Wir haben nur eine einfache Folgerung daraus nötig:

$$|u_{np}| \leqq |a_p| + \frac{2g}{n^k} \leqq |a_p| + 2g \leqq 2M + 2g,$$

wenn M das Maximum von $|f(x)|$ in $(-\pi, \pi)$ bedeutet; und $|v_{n,p}| \leqq 2M + 2g$. D. h., es gibt eine feste, von n und p unabhängige Grenze, unterhalb deren jeder Koeffizient jedes T_n liegt.

$$\begin{aligned} T_n(x) &= u_0 + u_1\cos x + \cdots + u_n \cos nx \\ &\quad + v_1 \sin x + \cdots + v_n \sin nx \end{aligned}$$

(indem wir den ersten Index n der Koeffizienten fortlassen)

$$\begin{aligned} &= u_0 + u_1 \cos 20y + \cdots + u_n \cos 20ny \\ &\quad + v_1 \sin 20y + \cdots + v_n \sin 20ny, \end{aligned}$$

wo $x = 20y$ gesetzt wird. Für $|x| \leqq \pi$ ist $|y| < \frac{1}{2e}$;

$$\begin{aligned} \cos my &= 1 - \frac{m^2 y^2}{2!} + \cdots + (-1)^s \frac{m^{2s} y^{2s}}{(2s)!} \\ &\quad + (-1)^{s+1} \frac{m^{2s+2} y^{2s+2}}{(2s+2)!} + \cdots \\ &= p_{sm} + r_{sm}. \end{aligned}$$

*) Nr. 8, S. 15 oben; Beweis in der zweiten Arbeit, S. 54—55 des Bandes.

$$\sin my = my - \frac{m^3 y^3}{3!} + \cdots + (-1)^{s-1} \frac{m^{2s-1} y^{2s-1}}{(2s-1)!}$$
$$+ (-1)^s \frac{m^{2s+1} y^{2s+1}}{(2s+1)!} + \cdots$$
$$= q_{sm} + t_{sm}.$$

Wir brauchen nur den Fall zu betrachten, daß m gerade und $\leqq 20n$ ist. Sei

$$s = 10n, \qquad 2s \geqq m;$$

$$\frac{m^2}{(2s+3)(2s+4)} < 1, \quad \frac{m^2}{(2s+2)(2s+3)} < 1, \quad y^2 < 1.$$

Jedes Glied von r_{sm} und t_{sm} ist nicht kleiner, absolut genommen, als das folgende Glied.

$$|r_{sm}| \leqq \frac{m^{2s+2} |y|^{2s+2}}{(2s+2)!} \leqq \frac{(20n)^{2s+2} |y|^{2s+2}}{(2s+2)!}$$

$$= \frac{(20n)^2 y^2}{(2s+1)(2s+2)} \cdot \frac{(20n)^{20n} y^{20n}}{(20n)!} < \frac{(20n)^{20n} \left(\frac{1}{2e}\right)^{20n}}{(20n)!}.$$

Wie bei der Abschätzung von $m!$ auf S. 21 ist

$$\log (20n)! > \log ((20n)^{20n} e^{-20n}),$$

folglich

$$|r_{sm}| < \frac{1}{2^{20n}}.$$

Ebenso ist

$$|t_{sm}| < \frac{1}{2^{20n}}.$$

D. h., es gibt zu jedem in $T_n(x)$ vorkommenden sinus und cosinus ein Polynom in y, also in x, dessen Grad höchstens $\bar{n} = 20n$ ist, und dessen größte Abweichung vom betreffenden sinus resp. cosinus für alle betrachteten Werte von $x \leqq \frac{1}{2^{\bar{n}}}$ ist. Da $|u_p|, |v_p| \leqq 2(M+g)$ ist, kann jedes Glied der Summe $T_n(x)$ mit einem kleineren Fehler als $\frac{2(M+g)}{2^{\bar{n}}}$ und die ganze Summe mit einem kleineren Fehler als $\frac{2(M+g).2n}{2^{\bar{n}}} = 2(M+g)\frac{\bar{n}}{10} \cdot \frac{1}{2^{\bar{n}}}$ durch ein Polynom höchstens $\bar{n}$ten Grades dargestellt werden; dieses Polynom werde mit $P_{\bar{n}}(x)$ bezeichnet. Sei H das Maximum von $2\frac{\bar{n}}{10} \cdot \frac{1}{2^{\bar{n}}} \cdot \bar{n}^k$ für positives ganzzahliges $\bar{n}$. Ein solches Maximum ist sicherlich vorhanden.

$$|T_n(x) - P_{\bar{n}}(x)| \leqq \frac{H(M+g)}{\bar{n}^k},$$

$$|f(x) - T_n(x)| \leqq \frac{g}{n^k} = \frac{20^k g}{\bar{n}^k},$$

$$|f(x) - P_{\bar{n}}(x)| \leqq \frac{20^k g + H(M+g)}{\bar{n}^k},$$

und man hat somit die gesuchte Darstellung, wenn man

$$G = 20^k g + H(M+g)$$

setzt.

Sind die Summen $T_n(x)$ für alle Werte $n = 1, 2, \ldots$ gegeben, so hat man die $P_{\bar{n}}(x)$ zunächst für alle Zahlen der Reihe $\bar{r} = 20, 40, \ldots$, und es ist dann einfach, auch die Zwischenwerte von $\bar{n}$ unterzubringen. Und es werde ferner bemerkt, daß wir ebenso leicht andere Voraussetzungen über den Verlauf der Konvergenz machen können, als daß die Genauigkeit von der Ordnung einer Potenz von $\frac{1}{n}$ ist. Aber wir wollen den Satz so anwenden, wie wir ihn ausgesprochen haben.

6. Anwendung der Methode des Paragraphen 4 auf $\tau(n)$.

Sei η eine positive Zahl, und sei $0 < \varepsilon < \eta$. Man bilde nach der Methode des Paragraphen 4 eine Funktion $\psi(x)$ so, daß $\varphi_\psi(n) > \frac{h}{n^{1+\varepsilon}}$ in $(0, 1)$ ist, wo h eine Konstante bedeutet. Man definiere $\psi(x)$ dann in $(-\pi, 0)$ und $(1, \pi)$ so, daß der Lipschitz-Bedingung noch Genüge geleistet wird, z. B. $\psi(x) = 0$ in $(-\pi, 0)$, und $\psi(x)$ gleich einer linearen Funktion in $(1, \pi)$, die sich für $x = 1$ dem schon bestimmten Wert $\psi(1)$ stetig anschließt und für $x = \pi$ gleich 0 ist. ψ sei dann für alle Werte von x durch die Festsetzung bestimmt, daß es periodisch mit der Periode 2π sein soll. In dem Intervalle $(-\pi, \pi)$ gilt natürlich noch die Ungleichung $\varphi_\psi(n) > \frac{h}{n^{1+\varepsilon}}$.

Gäbe es, für unendlich viele Zahlen n, trigonometrische Summen $n$ter oder niedrigerer Ordnung $T_n(x)$, so daß in $(-\pi, \pi)$, also für alle Werte von x,

$$|\psi(x) - T_n(x)| \leqq \frac{g}{n^{1+\eta}}$$

wäre, dann gäbe es dementsprechend Polynome $P_{\bar{n}}(x)$ höchstens $\bar{n} = 20n^{\text{ten}}$ Grades, so daß

$$|\psi(x) - P_{\bar{n}}(x)| \leqq \frac{G}{\bar{n}^{1+\eta}}$$

wäre im ganzen Intervalle $-\pi \leqq x \leqq \pi$. Das ist aber nur für eine endliche Anzahl von Werten von n möglich, da der Ausdruck rechts für hinreichend große $\bar{n}$ sicherlich kleiner ist als $\frac{h}{\bar{n}^{1+\varepsilon}}$. Für alle Werte von n, jedenfalls von einer gewissen Stelle an, ist folglich $\tau_\psi(n) \geqq \frac{g}{n^{1+\eta}}$; und damit haben wir den Satz XVa wieder. Ferner sei bemerkt, daß wir erreichen können, wenn wir in $(1, \pi)$ etwas vorsichtiger über $\psi(x)$ verfügen, daß $\psi'(x)$ überall vorhanden und stetig ist.

Ganz ähnlich erhält man aus XVI den

Satz XVIa. Ist k eine positive ganze Zahl, und η eine positive Zahl, so gibt es Funktionen, die k stetige Ableitungen haben und periodisch sind mit der Periode 2π, für die aber $\frac{1}{n^{k+\eta}} = O(\tau(n))$ ist.

7. Existenz von Ableitungen als notwendige Bedingung, damit $\varphi_f(n)$ bezw. $\tau_f(n) = O\left(\frac{1}{n^{2k+\eta}}\right)$ ist.

Bis jetzt haben wir uns damit beschäftigt, zu zeigen, daß gewisse Bedingungen hinreichend oder nicht hinreichend sind, damit eine vorgelegte Funktion mit einer gegebenen Genauigkeit durch eine Folge von Polynomen bezw. von endlichen trigonometrischen Summen darstellbar ist. Wir wollen jetzt in gewissen Fällen eine notwendige Bedingung solcher Darstellbarkeit ableiten.

Satz XVIII. Ist $f(x)$ eine solche Funktion, daß in einem bestimmten Intervalle $\varphi_f(n) = O\left(\frac{1}{n^{2k+\eta}}\right)$ ist, $\eta > 0$, dann hat $f(x)$ im ganzen Intervalle, höchstens mit Ausnahme der Endpunkte, $2k$ stetige Ableitungen.

Satz XVIIIa. Ist $f(x)$ eine solche periodische Funktion, daß $\tau_f(n) = O\left(\frac{1}{n^{2k+\eta}}\right)$ ist, $\eta > 0$, dann hat $f(x)$ überall $2k$ stetige Ableitungen.

Wir beweisen zunächst den zweiten dieser beiden Sätze, und leiten den ersten als eine Folge daraus ab. Wir wollen einfach $k = 1$ nehmen; der allgemeine Beweis erfordert nur eine wiederholte Anwendung derselben Schlußweisen.

Ist $\tau_f(n) = O\left(\frac{1}{n^{2+\eta}}\right)$, so bedeutet das, daß bei passender Wahl einer Konstanten g

$$\tau_f(n) \leqq \frac{g}{n^{2+\eta}}$$

ist, für alle Werte von n. Der Definition von $\tau_f(n)$ gemäß gibt es eine Folge von trigonometrischen Summen $T_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, je höchstens $n$ter Ordnung, deren größte Abweichungen von $f(x)$ jedesmal um beliebig wenig größer als $\tau_f(n)$ sind*).

Es gibt z. B. eine solche Folge $T_n(x)$, daß überall

$$|f(x) - T_n(x)| \leqq \frac{g_1}{n^{2+\eta}}$$

ist, wo g_1 irgend eine Konstante $> g$ bedeutet. Dann haben wir nach Hilfssatz II, wenn $S_n(x)$ die Teilsumme $n$ter Ordnung der Fourier-Reihe für $f(x)$ bedeutet, sobald $n > 1$ ist,

$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{K g_1 \log n}{n^{2+\eta}},$$

oder, wenn $0 < \varepsilon < \eta$ und H größer als das Maximum von $\frac{K g_1 \log n}{n^{\eta - \varepsilon}}$ für ganzzahliges n ist**),

$$(13) \qquad |f(x) - S_n(x)| < \frac{H}{n^{2+\varepsilon}}.$$

Die Fourier-Reihe (die nach (13) konvergiert) sei:

$$\begin{aligned} f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx + \cdots \end{aligned}$$

Die Reihe, die durch zweimalige gliedweise Differentiation daraus entsteht, lautet folgendermaßen:

---

*) Es ist bekannt, wie schon erwähnt worden, daß die untere Grenze $\tau_f(n)$ tatsächlich erreicht werden kann, wir haben es aber nicht nötig, diesen Satz vorauszusetzen.

**) Und auch größer als das Maximum von $|f(x) - S_1(x)|$, um den Fall $n = 1$ mit einzuschließen.

$$(14)\qquad \begin{aligned}&-a_1 \cos x - 2^2 a_2 \cos 2x - \cdots - n^2 a_n \cos nx - \cdots\\ &-b_1 \sin x - 2^2 b_2 \sin 2x - \cdots - n^2 b_n \sin nx - \cdots\end{aligned}$$

Zunächst wissen wir natürlich nicht, ob diese Reihe konvergiert und eine zweite Ableitung von $f(x)$ darstellt; das ist eben, was wir beweisen wollen. Sei

$$a_h \cos hx + b_h \sin hx = u_h.$$

Dann ist

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots,$$

und die zweite Reihe ist

$$(15)\qquad -(u_1 + 2^2 u_2 + 3^2 u^3 + \cdots).$$

Betrachten wir die Reihe

$$(16)\qquad u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots \text{*)}.$$

Sei

$$\begin{aligned}
r_n &= u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots,\\
\varrho_{nn'} &= (n+1)\,u_{n+1} + (n+2)\,u_{n+2} + \cdots + n'\,u_{n'}, \quad n' > n.\\
\varrho_{nn'} &= (n+1)\,[u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n'}]\\
&\qquad + u_{n+2} + \cdots + u_{n'}\\
&\qquad\qquad + \cdots\\
&\qquad\qquad\qquad + u_n'\\
&= (n+1)(r_n - r_{n'}) + (r_{n+1} - r_{n'}) + \cdots + (r_{n'-1} - r_{n'})\\
&= (n+1)\,r_n + r_{n+1} + \cdots + r_{n'-1} - n'\,r_{n'}.
\end{aligned}$$

Nach der Ungleichung (13) ist

$$|r_n| < \frac{H}{n^{2+\varepsilon}},$$

$$|(n+1)\,r_n| < \frac{n+1}{n}\cdot\frac{H}{n^{1+\varepsilon}} \leqq \frac{2H}{n^{1+\varepsilon}};$$

$$|n'\,r_{n'}| < \frac{H}{n'^{1+\varepsilon}} < \frac{H}{n^{1+\varepsilon}};$$

$$|r_{n+1} + \cdots + r_{n'-1}| < H\left[\frac{1}{(n+1)^{2+\varepsilon}} + \cdots + \frac{1}{(n'-1)^{2+\varepsilon}}\right]$$

$$< H\int_n^\infty \frac{dt}{t^{2+\varepsilon}} = -\left[\frac{H}{1+\varepsilon}\cdot\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right]_n^\infty = \frac{H}{1+\varepsilon}\cdot\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}.$$

---

*) Diese ist natürlich **nicht** die Reihe, die aus der ursprünglichen Fourier-Reihe durch einmalige gliedweise Differentiation entsteht.

Durch Kombination dieser Ungleichungen erhalten wir

$$|\varrho_{n n'}| < \frac{H\left(3+\frac{1}{1+\varepsilon}\right)}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Daraus folgt erstens, daß die Reihe (16) konvergiert, und zweitens, daß, wenn wir

$$\varrho_n = (n+1)\, u_{n+1} + (n+2)\, u_{n+2} + \cdots$$

setzen,

$$|\varrho_n| \leqq \frac{H\left(3+\frac{1}{1+\varepsilon}\right)}{n^{1+\varepsilon}}$$

ist.

Wiederholen wir das eben angewandte Verfahren, so erkennen wir, daß auch die Reihe (15) konvergiert, und, wenn wir

$$\bar{r}_n = (n+1)^2\, u_{n+1} + (n+2)^2\, u_{n+2} + \cdots$$

setzen,

$$|\bar{r}_n| \leqq \frac{H\left(3+\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\left(3+\frac{1}{\varepsilon}\right)}{n^{\varepsilon}}.$$

Die Glieder der betrachteten Reihen hängen natürlich implizit von x ab; in der letzten Ungleichung kommt x aber rechts nicht vor, die Reihe (14) konvergiert also gleichmäßig für alle Werte von x, und stellt somit eine stetige zweite Ableitung von $f(x)$ dar. Damit ist der Satz XVIII a bewiesen, in dem betrachteten Falle $k = 1$.

Sei $f(x)$ nunmehr eine Funktion, die der Voraussetzung des Satzes XVIII genügt, im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$; die Wahl des Intervalls ist für die Richtigkeit des Satzes gleichgültig. $f(\sin x)$ erfüllt dann als Funktion von x betrachtet die Voraussetzung des Satzes XVIII a; denn eine ganze rationale Funktion von $\sin x$ ist nach Hilfssatz 1 b eine trigonometrische Summe in x. Folglich hat $f(\sin x)$ eine stetige zweite Ableitung nach x, also auch nach $\sin x$, wenn man von den Punkten absieht, wo $\frac{d}{dx}\sin x = 0$, $\sin x = \pm 1$ ist. Und das ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß $f(x)$ im ganzen Intervalle $(-1, 1)$, von den Endpunkten abgesehen, eine stetige zweite Ableitung nach x hat.

Der Beweis gelingt noch unter etwas geringeren Voraussetzungen, wenn wir nämlich $\varphi_f(n)$ bezw. $\tau_f(n)$ nur

$$= O\left(\frac{1}{n^2(\log n)^{2+\varepsilon}}\right) \text{ oder } O\left(\frac{1}{n^2(\log n)^2(\log\log n)^{1+\varepsilon}}\right) \text{ usw.}$$

annehmen. Das, was zum Beweise wesentlich ist, kommt da zum Vorschein, wo wir den Rest

$$|r_{n+1}+r_{n+2}+\cdots| \leqq H\left[\frac{1}{(n+1)^{2+\varepsilon}}+\frac{1}{(n+2)^{2+\varepsilon}}+\cdots\right]$$

abgeschätzt haben. Mit der Voraussetzung $\tau_f(n) = O\left(\frac{1}{n^2(\log n)^{2+\varepsilon}}\right)$ würden wir haben statt dessen

$$|r_n| \leqq \frac{H}{n^2(\log n)^{1+\varepsilon}},$$

$$|r_{n+1}+r_{n+2}+\cdots| \leqq H\left[\frac{1}{(n+1)^2(\log(n+1))^{1+\varepsilon}}+\cdots\right]$$

$$< H\int_n^\infty \frac{dt}{t^2(\log t)^{1+\varepsilon}} < \frac{H}{(\log n)^{1+\varepsilon}}\int_n^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{H}{n(\log n)^{1+\varepsilon}};$$

und das ist noch allgemeines Glied einer konvergenten Reihe. Es ist klar, daß statt der Funktion $\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}$ irgend eine Funktion $\frac{1}{n^2\log n\,\omega(n)}$ genügt, wenn nur $\omega(t)$ eine solche monoton zunehmende positive Funktion von t ist, das das Integral von einer konstanten unteren Grenze a bis ∞ von $\frac{dt}{t\,\omega(t)}$ konvergiert.

8. Beweis, dass die hinreichende Bedingung des Satzes I nicht notwendig ist.

Die Frage liegt jetzt nahe, ob es nur an der Unvollkommenheit der Methoden liegt, daß wir nicht zugleich notwendige und hinreichende Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion mit einer gegebenen Ordnung der Genauigkeit gefunden haben, ob es z. B. Tatsache ist, daß das Bestehen einer Lipschitz-Bedingung nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, damit für eine vorgelegte Funktion $\varphi(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ wird. Es ist aber leicht zu sehen, daß dem nicht so ist.

Sei $f(x)$ irgend eine gerade Funktion von x, $P_n(x)$ ein Polynom $n$ten Grades; man nehme an, es sei für $-a \leqq x \leqq a$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq \varepsilon.$$

Dann ist

$$\left|f(x) - \frac{P_n(x) + P_n(-x)}{2}\right| \leqq \left|\frac{f(x) - P_n(x)}{2}\right| + \left|\frac{f(x) - P_n(-x)}{2}\right|$$
$$= \left|\frac{f(x) - P_n(x)}{2}\right| + \left|\frac{f(-x) - P_n(-x)}{2}\right| \leqq \varepsilon,$$

und $\frac{P_n(x) + P_n(-x)}{2}$ ist ein **gerades** Polynom höchsten $n$ten Grades. Ist also eine gerade Funktion in einem Intervalle, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist, mit einer gegebenen Genauigkeit überhaupt durch Polynome darstellbar, so kann sie mit ebenso großer Genauigkeit durch gerade Polynome dargestellt werden.

Auf die Funktion $|x|$ in $(-1,1)$ angewendet, zeigt diese Überlegung, daß die Funktion mit einem Fehler, der wenigstens von der Ordnung von $\frac{1}{n}$ klein ist, durch gerade Polynome höchstens $n$ten Grades in x, also durch Polynome höchstens $\frac{n}{2}$ten Grades in x^2 dargestellt werden kann. Da $|x| = \sqrt{x^2}$ ist, folgt daraus, daß $\sqrt{x}$ im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ mit dieser Genauigkeit durch Polynome in x dargestellt werden kann, obgleich $\sqrt{x}$ in dem Intervalle natürlich keiner Lipschitz-Bedingung genügt*).

Derselbe Grad der Annäherung ist möglich für jede Funktion, die etwa in $0 \leqq x \leqq 1$ einer Lipschitz-Bedingung genügt **in Bezug auf** $\sqrt{x}$; denn wir können $f(x) = f((\sqrt{x})^2) = f((-\sqrt{x})^2)$ als eine gerade Funktion von $\sqrt{x}$ schreiben.

*) Von der Äquivalenz der beiden Probleme, $|x|$ in $(-1,1)$ und $\sqrt{x}$ in $(0,1)$ darzustellen, hat **de la Vallée Poussin** schon Gebrauch gemacht; siehe Zitat No. 14, S. 15.

ABSCHNITT V.

Abschätzung von $\varphi(n)$ bei mehreren Veränderlichen.

1. Analogon einer Lipschitz-Bedingung: $\varphi(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Wir wollen in diesem Abschnitt einige von den Sätzen, die wir betreffend die Darstellung stetiger Funktionen einer Variablen durch Polynome gefunden haben, auf Funktionen von zwei Variablen ausdehnen. Es wird im allgemeinen ersichtlich sein, daß dieselben Methoden ohne prinzipielle Änderung auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen zu übertragen sind. Nur wenn die Verallgemeinerung weniger unmittelbar erscheint, werden wir darauf eingehen.

Sei $f(x, y)$ eine für $0 \leqq x \leqq c$, $0 \leqq y \leqq c$, $c = \frac{1}{2\sqrt{2}e}$ definierte stetige Funktion von x und y. B sei ein ganz im Innern dieses Quadrates gelegener abgeschlossener Bereich; der Abstand eines Punktes von B von dem Rande des Quadrats soll also ein positives Minimum haben. Die speziellen Bedingungen, denen $f(x)$ unterworfen wird, sollen dann im ganzen Quadrate erfüllt sein; die Funktion $\varphi_f(n)$, die wir abschätzen wollen, soll sich dagegen nur auf den Bereich B beziehen. $\varphi_f(n)$ ist also die untere Grenze der größten Abweichung eines Polynoms $n$ten oder niedrigeren Grades in x und y von $f(x, y)$ im Bereiche B.

Satz XIX. Genügt $f(x, y)$ einer Bedingung

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \leqq \lambda \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

wo λ eine Konstante bedeutet, so ist $\varphi_f(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Sei

$$I_m(x, y) = \frac{k_m}{4} \int_0^c \int_0^c f(u, v) \left[\frac{\sin m\sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}}{m\sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}}\right]^4 du\, dv,$$

$$\frac{1}{k_m} = \int_0^c \int_0^c \left[\frac{\sin m\sqrt{u^2 + v^2}}{m\sqrt{u^2 + v^2}}\right]^4 du\, dv.$$

Durch Substitution von u, v für $u - x$, $v - y$ geht I_m über in

$$I_m(x, y) = \frac{k_m}{4} \int_{-y}^{c-y} \int_{-x}^{c-x} f(x+u,\ y+v) \left[\frac{\sin m\sqrt{u^2 + v^2}}{m\sqrt{u^2 + v^2}}\right]^4 du\, dv.$$

Wir nehmen an, daß (x, y) in B liegt. Sei ε eine positive Größe, die kleiner ist als der kleinste Abstand eines Punktes von B von einer Seite des Quadrates. Sei die Fläche des Kreises mit dem Radius ε um den Nullpunkt mit Q, der Rest des Integrationsgebietes mit R bezeichnet.

$$I_m(x, y) = \frac{k_m}{4}\left[\int\int_Q + \int\int_R f(x+u,\ y+v)\left[\frac{\sin m\sqrt{u^2+v^2}}{m\sqrt{u^2+v^2}}\right]^4 du\, dv\right].$$

$$1 = k_m\int_0^c\int_0^c = \frac{k_m}{4}\int_{-c}^{c}\int_{-c}^{c}\left[\frac{\sin m\sqrt{u^2+v^2}}{m\sqrt{u^2+v^2}}\right]^4 du dv.$$

Sei der Teil dieses Integrationsgebietes, der außerhalb Q liegt, mit $\overline{R}$ bezeichnet.

$$I_m(x, y) - f(x, y)$$

$$= \frac{k_m}{4}\left[\int\int_Q [f(x+u,\ y+v) - f(x, y)]\left[\frac{\sin m\sqrt{u^2+v^2}}{m\sqrt{u^2+v^2}}\right]^4 du\, dv\right.$$

$$\left. + \int\int_R f(x+u,\ y+v)\,[\ldots]^4 du\, dv - \int\int_{\overline{R}} f(x,y)\,[\ldots]^4 du\, dv\right].$$

Sei M eine solche Konstante, daß $|f(x, y)| \leqq M$ ist im ganzen Quadrate $0 \leqq x \leqq c,\ 0 \leqq y \leqq c$. In R und $\overline{R}$ ist

$$\left|\frac{\sin m\sqrt{u^2+v^2}}{m\sqrt{u^2+v^2}}\right| \leqq \frac{1}{m\varepsilon};$$

$$\left|\int\int_R\right| \leqq \frac{M}{m^4\varepsilon^4}\int\int_R du\, dv \leqq \frac{4Mc^2}{m^4\varepsilon^4} \leqq \frac{4Mc^2}{m^3\varepsilon^4},$$

$$\left|\int\int_{\overline{R}}\right| \leqq \frac{4Mc^2}{m^4\varepsilon^4} \leqq \frac{4Mc^2}{m^3\varepsilon^4}.$$

$$|f(x+u, y+v) - f(x, y)| \leqq \lambda\sqrt{u^2+v^2};$$

$$\left|\int\int_Q\right| \leqq \lambda\int\int_Q \sqrt{u^2+v^2}\left[\frac{\sin m\sqrt{u^2+v^2}}{m\sqrt{u^2+v^2}}\right]^4 du\, dv.$$

Sei

$$u = r\cos\theta, \qquad v = r\sin\theta.$$

$$\int\int_Q \sqrt{u^2+v^2}\left[\frac{\sin m\sqrt{u^2+v^2}}{m\sqrt{u^2+v^2}}\right]^4 du\, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} r\left[\frac{\sin mr}{mr}\right]^4 r dr d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^{\varepsilon} r^2\left[\frac{\sin mr}{mr}\right]^4 dr.$$

Durch Anwendung der Abschätzung, die wir im ersten Abschnitt mit IIIa bezeichnet haben, bekommen wir*)

$$\left|\iint_Q [f(x+u, y+v) - f(x,y)]\left[\frac{\sin m\sqrt{u^2+v^2}}{m\sqrt{u^2+v^2}}\right]^4 du\,dv\right| \leqq \frac{2\pi\lambda c_3^{(2,2)}}{m^3}.$$

Es ist

$$\frac{4}{k_m} = \int_{-c}^{c}\int_{-c}^{c}\left[\frac{\sin m\sqrt{u^2+v^2}}{m\sqrt{u^2+v^2}}\right]^4 du\,dv.$$

Wir werden diesen Wert vermindern, wenn wir die Integration nur über den Kreis vom Radius c um den Nullpunkt erstrecken. Führen wir dann Polarkoordinaten ein, so haben wir

$$\frac{4}{k_m} > \int_0^{2\pi}\int_0^{c} r\left[\frac{\sin mr}{mr}\right]^4 dr\,d\theta = 2\pi\int_0^c r\left[\frac{\sin mr}{mr}\right]^4 dr.$$

Eine Abschätzung dieser Größe nach unten haben wir noch nicht berechnet.

$$\int_0^c r\left[\frac{\sin mr}{mr}\right]^4 dr = \frac{1}{m^2}\int_{r=0}^{r=c} mr\left[\frac{\sin mr}{mr}\right]^4 d(mr)$$

$$= \frac{1}{m^2}\int_0^{mc}\frac{\sin^4 r}{r^3}dr \geqq \frac{1}{m^2}\int_0^c \frac{\sin^4 r}{r^3}dr.$$

Setzen wir $2\pi\int_0^c \frac{\sin^4 r}{r^3}dr = \frac{1}{\bar{c}_1}$, so ist

$$\frac{4}{k_m} > \frac{1}{\bar{c}_1 m^2}, \qquad \frac{k_m}{4} < \bar{c}_1 m^2.$$

$$|f(x,y) - I_m(x,y)| \leqq \bar{c}_1 m^2\left[\frac{2\pi\lambda c_3^{(2,2)}}{m^3} + \frac{8Mc^2}{m^3\varepsilon^4}\right].$$

Sei

$$K_1 = \bar{c}_1\left[2\pi\lambda c_3^{(2,2)} + \frac{8Mc^2}{\varepsilon^4}\right];$$

$$|f(x,y) - I_m(x,y)| \leqq \frac{K_1}{m}.$$

In dem Annäherungspolynom für $\left[\frac{\sin m(u-x)}{m(u-x)}\right]^{2\varkappa}$ auf S. 27 und

*) Wir haben hier einen anderen Wert von c als dort, nämlich $\frac{1}{2\sqrt{2}\,e}$ statt $\frac{1}{2e}$; aber die Gültigkeit der Abschätzung ist von dem Zahlwert von c ganz unabhängig.

in der Abschätzung des Restes sei $\varkappa = k = 2$, und sei $\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}$ statt $(u-x)$ eingesetzt. In dem Integrationsgebiete, wo wir die Annäherung anwenden wollen, ist überall

$$\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2} < \frac{1}{2e}.$$

$$\left|\left[\frac{\sin m\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}}{m\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}}\right]^4 - \pi_m^{(2)}\left(\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}\right)\right| < \frac{c_4^{(2,2)}}{m^3}.$$

Da $\pi_m^{(2)}$ als ganze rationale Funktion in $\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}$ nur gerade Potenzen enthält, ist es zugleich ein Polynom in $u-x$ und $v-y$, und zwar höchstens vom Grade $4(m-1)$.

Sei

$$\Pi_m(x,y) = \frac{k_m}{4}\int_0^c\int_0^c f(u,v)\,\pi_m^{(2)}\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}\,du\,dv.$$

$$|I_m(x,y)-\Pi_m(x,y)| \leqq \frac{k_m}{4}\int_0^c\int_0^c M\cdot\frac{c_4^{(2,2)}}{m^3}\,du\,dv$$

$$\leqq \bar{c}_1 m^2\cdot\frac{c^2 M c_4^{(2,2)}}{m^3}.$$

$$|f(x,y)-\Pi_m(x,y)| \leqq (K_1 + Mc^2\bar{c}_1 c_4^{(2,2)})\frac{1}{m}.$$

Sei n irgend eine positive ganze Zahl, $m-1$ die größte ganze Zahl $\leqq \frac{n}{4}$, $P_n(x,y) = \Pi_m(x,y)$, $4(K_1+Mc^2\bar{c}_1c_4^{(2,2)}) = K$. $P_n(x,y)$ ist ein Polynom höchstens vom $n$ten Grade, und es ist

$$|f(x,y)-P_n(x,y)| < K\cdot\frac{1}{n}.$$

Bei festem Bereiche B kann K auch hier als mit λ proportional angenommen werden.

Wir wollen uns einen Augenblick dabei aufhalten, zu sehen, daß wir auch bei der Verallgemeinerung auf s Variable $x_1, \ldots, x_s$ durch Einführung von Polarkoordinaten auf Integrale wesentlich derselben Form kommen als diejenigen, mit denen wir es bisher zu tun hatten. Es möge sich z. B. um das Integral

$$\int\int\cdots\int\left[\frac{\sin m\sqrt{u_1^2+\cdots+u_s^2}}{m\sqrt{u_1^2+\cdots+u_s^2}}\right]^{2\varkappa} du_1\ldots du_s$$

handeln, wo die Integration über die s-dimensionale Kugel zu erstrecken ist, die durch die Ungleichung $\sqrt{u_1^2+\cdots+u_s^2} \leqq c$ definiert wird. Wir setzen

$$\begin{aligned}
u_1 &= r\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{s-2}\cos\theta_{s-1}\\
u_2 &= r\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{s-2}\sin\theta_{s-1}\\
u_3 &= r\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\sin\theta_{s-2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_s &= r\sin\theta_1.
\end{aligned}$$

In der Funktionaldeterminante dieser Transformation ist jede Kolonne, bis auf diejenige, die aus den Differentialquotienten nach r besteht, durch r teilbar; die Determinante hat folglich die Form $r^{s-1}\psi(\theta_1,\ldots,\theta_{s-1})$. Wenn wir mit Q die s-dimensionale Kugel bezeichnen, über die wir zu integrieren haben, so ist das entsprechende Gebiet der Werte der neuen Veränderlichen

$$0 \leqq r \leqq c,\quad -\frac{\pi}{2} \leqq \theta_1 \leqq \frac{\pi}{2},\ \ldots,\ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta_{s-2} \leqq \frac{\pi}{2},\quad -\pi \leqq \theta_{s-1} \leqq \pi;$$

denn es gibt zu jedem Wertsystem $(x_1,\ldots,x_s)$ von Q, von dem Nullpunkt abgesehen, ein und nur ein Wertsystem $(r,\theta_1,\ldots,\theta_{s-1})$, das diesen Ungleichungen genügt. Aus der Möglichkeit dieser Auflösung erkennt man auch, daß die Funktionaldeterminante nicht identisch verschwindet.

$$\int\int\cdots\int\int\left[\frac{\sin m\sqrt{u_1^2+\cdots+u_s^2}}{m\sqrt{u_1^2+\cdots+u_s^2}}\right]^{2\varkappa} du_1\ldots du_s$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^c r^{s-1}\psi(\theta_1,\ldots,\theta_{s-1})\left[\frac{\sin mr}{mr}\right]^{2\varkappa} dr\,d\theta_1\ldots d\theta_{s-2}\,d\theta_{s-1}$$

$$=\gamma\int_0^c r^{s-1}\left[\frac{\sin mr}{mr}\right]^{2\varkappa} dr,$$

wo γ eine von 0 verschiedene Konstante bedeutet*).

Das Integral hat die bekannte Form. Bei gegebenem s wird es klar sein, wie groß man den Exponenten $2\varkappa$ zu wählen hat, um die Durchführung der Abschätzungen zu ermöglichen.

2. Dasselbe bei den $(k-1)$ten Ableitungen: $\varphi(n) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

Satz XX. Ist $f(x, y)$ eine Funktion, deren Ableitungen $(k-1)$ter Ordnung sämtlich vorhanden sind und

*) Daß $\gamma \neq 0$ ist, ersieht man sofort, wenn man $\int_Q\ldots\int dx_1\ldots dx_s$ berechnet.

der Bedingung

$$\left| f_{x^i y^{k-1-i}}(x_2, y_2) - f_{x^i y^{k-1-i}}(x_1, y_1) \right| \leqq \lambda \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

genügen, so ist $\varphi_f(n) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

Ich behandle ausführlich wieder nur den Fall $k = 3$.

Zunächst ist

$$f(x+u, y+v) = f(x, y) + [f_x(x, y) \, . \, u + f_y(x, y) \, . \, v]$$
$$+ \frac{1}{2!} [f_{xx}(x + \theta u, y + \theta v) u^2 + 2 f_{xy}(x + \theta u, y + \theta v) \, . \, uv + f_{yy}(x + \theta u, y + \theta v) . v^2],$$

$0 \leqq \theta \leqq 1$.

Nach Voraussetzung ist

$$| f_{xx}(x + \theta u, y + \theta v) - f_{xx}(x, y) | \leqq \lambda \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \text{u. s. w.}$$

$$f(x+u, y+v) = f(x, y) + [u f_x + v f_y]_{(x, y)}$$
$$+ \frac{1}{2!} [u^2 f_{xx} + 2uv f_{xy} + v^2 f_{yy}]_{(x, y)} + \theta_1 \frac{4\lambda}{2!} \left(\sqrt{u^2 + v^2}\right),$$

$$f(x+2u, y+2v) = f(x, y) + 2 [u f_x + v f_y]_{(x, y)}$$
$$+ \frac{2^2}{2!} [u^2 f_{xx} + 2uv f_{xy} + v^2 f_{yy}]_{(x, y)} + 2^3 \theta_2 \frac{4\lambda}{2!} \left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)^3,$$

$$f(x+3u, y+3v) = f(x, y) + 3 [u f_x + v f_y]_{(x, y)}$$
$$+ \frac{3^2}{2!} [u^2 f_{xx} + 2uv f_{xy} + v^2 f_{yy}]_{(x, y)} + 3^3 \theta_3 \frac{4\lambda}{2!} \left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)^3,$$

$$0 \leqq \theta_1, \theta_2, \theta_3 \leqq 1.$$

$$| f(x+3u, y+3v) - 3 f(x+2u, y+2v) + 3 f(x+u, y+v) - f(x, y) |$$
$$\leqq \lambda_1 \left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)^3,$$

wo λ_1 für die Konstante $(3^3 + 3 \, . \, 2^3 + 3) \frac{4\lambda}{2!}$ gesetzt ist; die Glieder niedrigerer Ordnung fallen weg. Man beachte, daß die linearen Gleichungen, auf deren Auflösung durch die Binomialkoeffizienten es hier ankommt, genau dieselben sind wie im Falle einer Variablen; der Satz, den wir dort für ein allgemeines k aufgestellt haben, ist hier ohne Änderung anwendbar. Bei beliebig vielen Variablen würde das noch der Fall sein.

Es ist jetzt klar, wie wir das Integral $I_m(x, y)$ zu definieren haben:

$$I_m(x, y) = \frac{k_m}{4}\int_0^c\int_0^c f(u, v)\left\{\frac{1}{3^2}\left[\frac{\sin m\sqrt{\left(\frac{u-x}{3}\right)^2+\left(\frac{v-y}{3}\right)^2}}{m\sqrt{\left(\frac{u-x}{3}\right)^2+\left(\frac{v-y}{3}\right)^2}}\right]^6\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2^2}\left[\frac{\sin m\sqrt{\left(\frac{u-x}{2}\right)^2+\left(\frac{v-y}{2}\right)^2}}{m\sqrt{\left(\frac{u-x}{2}\right)^2+\left(\frac{v-y}{2}\right)^2}}\right]^6 + 3\left[\frac{\sin m\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}}{m\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}}\right]^6\right\} du\, dv,$$

$$\frac{1}{k_m} = \int_0^c\int_0^c\left[\frac{\sin m\sqrt{u^2+v^2}}{m\sqrt{u^2+v^2}}\right]^6 du\, dv.$$

$$I_m(x, y) = \frac{k_m}{4}\left\{\int_{-\frac{y}{3}}^{\frac{c-y}{3}}\int_{-\frac{x}{3}}^{\frac{c-x}{3}} f(x+3u, y+3v)\left[\frac{\sin m\sqrt{u^2+v^2}}{m\sqrt{u^2+v^2}}\right]^6 du\, dv\right.$$

$$-3\int_{-\frac{y}{2}}^{\frac{c-y}{2}}\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{c-x}{2}} f(x+2u, y+2v)\left[\frac{\sin m\sqrt{u^2+v^2}}{m\sqrt{u^2+v^2}}\right]^6 du\, dv$$

$$\left.+3\int_{-y}^{c-y}\int_{-x}^{c-x} f(x+u, y+v)\left[\frac{\sin m\sqrt{u^2+v^2}}{m\sqrt{u^2+v^2}}\right]^6 du\, dv\right\};$$

$$f(x, y) = \frac{k_m}{4}\int_{-c}^{c}\int_{-c}^{c} f(x, y)\left[\frac{\sin m\sqrt{u^2+v^2}}{m\sqrt{u^2+v^2}}\right]^6 du\, dv.$$

Sei ε eine positive Größe, die kleiner ist als ein Drittel der kleinsten Entfernung eines Punktes des Bereiches B von einer Seite des Quadrates; sei Q der Kreis vom Radius ε um den Nullpunkt, R der übrige Teil des Quadrates $-c \leqq u \leqq c$, $-c \leqq v \leqq c$, M das Maximum von $f(u, v)$ im Quadrate. Für (x, y) in B:

$$|f(x, y) - I_m(x, y)| \leqq \frac{k_m}{4}\left[\iint_Q \lambda_1\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3\left[\frac{\sin m\sqrt{u^2+v^2}}{m\sqrt{u^2+v^2}}\right]^6 du\, dv\right.$$

$$\left.+8\iint_R M\left[\frac{\sin m\sqrt{u^2+v^2}}{m\sqrt{u^2+v^2}}\right]^6 du\, dv\right].$$

$$\iint_Q = \lambda_1\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} r^4\left[\frac{\sin mr}{mr}\right]^6 dr\, d\theta \leqq \frac{2\pi\lambda_1 c_3^{(3,4)}}{m^5};$$

$$\iint_R \leqq \frac{M}{m^6\varepsilon^6}\iint_R du\, dv \leqq \frac{4Mc^2}{m^6\varepsilon^6} \leqq \frac{4Mc^2}{m^5\varepsilon^6};$$

$$\frac{4}{k_m} = \int_{-c}^{c}\int_{-c}^{c}\left[\frac{\sin m\sqrt{u^2+v^2}}{m\sqrt{u^2+v^2}}\right]^6 du\,dv > 2\pi\int_0^c r\left[\frac{\sin mr}{mr}\right]^6 dr > \frac{1}{\bar{c}_1 m^2},$$

$$\frac{1}{\bar{c}_1} = 2\pi\int_0^c \frac{\sin^6 r}{r^5}\,dr.$$

$$|f(x,y) - I_m(x,y)| \leqq \bar{c}_1 m^2\left[\frac{2\pi\lambda_1 c_3^{(3,4)}}{m^5} + \frac{32Mc^2}{m^5\varepsilon^6}\right] = \frac{K_1}{m^3},$$

$$K_1 = \bar{c}_1\left(2\pi\lambda_1 c_3^{(3,4)} + \frac{32Mc^2}{\varepsilon^6}\right).$$

Ersetzen wir in $I_m(x, y)$ die Klammerausdrücke durch die entsprechenden Annäherungspolynome, so erhalten wir

$$\Pi_m(x,y) = \frac{k_m}{4}\int_0^c\int_0^c f(u,v)\left[\frac{1}{3^2}\pi_m^{(3)}\left(\sqrt{\left(\frac{u-x}{3}\right)^2+\left(\frac{v-y}{3}\right)^2}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{3}{2^2}\pi_m^{(3)}\left(\sqrt{\left(\frac{u-x}{2}\right)^2+\left(\frac{v-y}{2}\right)^2}\right) + 3\pi_m^{(3)}\left(\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}\right)\right]du\,dv,$$

ein Polynom höchstens $6(m-1)$ten Grades in $u-x$ und $v-y$.

$$|I_m(x,y) - \Pi_m(x,y)| \leqq \frac{k_m}{4}\int_0^c\int_0^c M\left(\frac{1}{3^2}+\frac{3}{2^2}+3\right)\frac{c_4^{(3,4)}}{m^5}\,du\,dv$$
$$\leqq \bar{c}_1 m^2\cdot\frac{4c^2 M c_4^{(3,4)}}{m^5}.$$

Sei n irgend eine positive ganze Zahl, $m-1$ die größte ganze Zahl $\leqq \frac{n}{6}$,

$$P_n(x,y) = \Pi_m(x,y), \qquad K = 6^3(K_1 + 4Mc^2\bar{c}_1 c_4^{(3,4)}).$$

$P_n(x, y)$ ist ein Polynom höchstens $n$ten Grades, und es ist

$$|f(x,y) - P_n(x,y)| \leqq K\cdot\frac{1}{n^3}.$$

3. Untere Abschätzungen.

Um für den Fall der Funktionen zweier Variabler das Analogon der Sätze XII und XIV zu bekommen, haben wir keine neuen Überlegungen nötig. Denn unsere früheren Funktionen ψ, die wir zum Beweise der genannten Sätze konstruiert haben, können als Funktionen von x und y aufgefaßt werden, die in Bezug auf y konstant sind. Sie genügen den Voraussetzungen der Sätze XIX resp. XX in Bezug auf beide Variable, und trotzdem können sie durch keine Folge von Polynomen in x und y besser als mit einer Genauigkeit von der Ordnung von $\frac{1}{n}$ resp. $\frac{1}{n^k}$ dargestellt werden, weil man sonst durch Festhalten von y eine solche Darstellung für die Funktionen von x allein bekommen würde, was nicht möglich ist. Die Abschätzungen der Ordnung von $\varphi(n)$, die wir eben erhalten haben, sind folglich, wie diejenigen der Sätze I und II, in diesem Sinne die besten ihrer Art.

Inhalt.

Lebenslauf.

Ich, Dunham Jackson, protestantischer Konfession, wurde am 24. Juli 1888 zu Bridgewater im Staate Massachusetts der Vereinigten Staaten von Nordamerika als Sohn des Normalschullehrers William Dunham Jackson geboren, und bin amerikanischer Staatsangehöriger.

Ich besuchte bis 1904 die städtischen Schulen meiner Heimatsstadt, und studierte dann auf der Harvard-Universität zu Cambridge, V. St. A., wo ich 1908 den Grad A. B. (baccalaureus artium) und 1909 den Grad A. M. (magister artium) erwarb. Im Jahre 1908—1909 war ich außerdem als Assistent für Astronomie an der Harvard-Universität angestellt. Von Michaelis 1909 bis Ostern 1911 war ich auf der Göttinger Universität, seit Ostern dieses Jahres auf der Bonner Universität immatrikuliert.

Ich habe Vorlesungen und Übungen mathematischer oder mathematisch-naturwissenschaftlicher Natur bei den folgenden Herren besucht:

Auf der Harvard-Universität: Bôcher, Bouton, Brenke, Byerly, Coolidge, Lyman, Osgood, Sabine, Whittemore, Willson.

Zu Göttingen: Haar, Hartmann, Hilbert, Klein, Koebe, Landau, Prandtl, Toeplitz, Voigt, Zermelo.

Zu Bonn: Study.

Allen meinen Lehrern, besonders den Herren Bôcher und Osgood, bin ich zu herzlichstem Danke verpflichtet; vor allem ist es mir eine Freude, bei dieser Gelegenheit Herrn Professor Landau für die Anregung danken zu dürfen, welche mir durch seine wissenschaftliche Belehrung und durch den persönlichen Verkehr mit ihm zuteil geworden ist.