Zapiski Imperatorskoi
Akademii Nauk
V. 62
1890
p. 1–24

ЗАПИСКИ
ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

ТОМЪ ШЕСТЬДЕСЯТЪ ВТОРОЙ.

(съ 14 рисунками, 15 картами и 2 таблицами)

САНКТПЕТЕРБУРГЪ, 1890.

ПРОДАЕТСЯ У КОМИССІОНЕРОВЪ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ:
И. Глазунова, въ С. П. Б. Эггерса и Комп., въ С. П. Б.
Н. Киммеля, въ Ригѣ.

Цѣна 7 руб. 70 коп.

ОБЪ ОДНОМЪ ВОПРОСѢ Д. И. МЕНДЕЛѢЕВА.

А. Марковъ.

Читано въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 24 Октября 1889 года.

Въ настоящей статьѣ мы будемъ разсматривать совокупность тѣхъ цѣлыхъ функцій

$$f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \dots + p_{n-1} z + p_n,$$

степень которыхъ не превосходитъ даннаго цѣлаго числа n, а численныя значенія не превосходятъ другаго даннаго числа L для всѣхъ значеній перемѣнной z, лежащихъ между данными предѣлами a и $b > a$.

Итакъ

$$-L < f(z) < +L \text{ при } a < z < b.$$

Спрашивается, какого предѣла не превосходитъ численное значеніе производной

$$f'(x) = np_0 x^{n-1} + (n-1) p_1 x^{n-2} + \dots + 2p_{n-2} x + p_{n-1}$$

отъ $f(x)$ по x?

Такой вопросъ поставленъ Д. И. Менделѣевымъ, при $n=2$, въ его сочиненіи «Изслѣдованіе водныхъ растворовъ по удѣльному вѣсу» (§ 86).

Отвѣтъ зависитъ отъ того насколько опредѣлено число x.

Мы различимъ два случая:

1) x число данное,

2) x произвольное число между a и b.

Соотвѣтственно этому разсмотримъ двѣ задачи.

Задача № 1.

Для даннаго числа x найти наибольшее численное значеніе $f'(x)$.

Рѣшеніе.

Обозначимъ черезъ y ту изъ разсматриваемыхъ нами функцій $f(z)$, для которой $f'(x)$ численно достигаетъ наибольшаго значенія.

По условіямъ вопроса

$$-L \leqq y \leqq +L$$

для всѣхъ значеній z, лежащихъ между a и b.

Изъ всѣхъ этихъ значеній z обратимъ особое вниманіе на тѣ, при которыхъ y равняется $\pm L$.

Пусть въ возрастающемъ порядкѣ они будутъ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_s.$$

Обозначивъ черезъ

$$y(\alpha_i)$$

значеніе y при $z = \alpha_i$, равное $\pm L$, замѣтимъ, что рядъ $s-1$ отношеній

$$\frac{y(\alpha_2)}{y(\alpha_1)}, \frac{y(\alpha_3)}{y(\alpha_2)}, \ldots, \frac{y(\alpha_s)}{y(\alpha_{s-1})}$$

долженъ содержать по крайней мѣрѣ $n-1$ чиселъ равныхъ -1.

Дѣйствительно, въ противномъ случаѣ между цѣлыми функціями $n-2^{\text{ой}}$ степени отъ z нетрудно найти безчисленное множество такихъ, отношенія которыхъ къ y при

$$z = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$$

числа отрицательныя.

Если затѣмъ, умноживъ одну изъ нихъ

$$\varphi(z)$$

на $(z-x)^2$ и на достаточно малое положительное число ε, произведеніе

$$\varepsilon (z-x)^2 \varphi(z)$$

прибавимъ къ y, то получимъ цѣлую функцію

$$Y = y + \varepsilon (z-x)^2 \varphi(z)$$

$n^{\text{ой}}$ степени отъ z и притомъ такую, что

при $a < z < b$ численное значеніе $Y < L$

и при $z = x$ $\qquad \frac{dY}{dz} = \frac{dy}{dz}$.

Наконецъ, если умножимъ Y на отношеніе числа L къ наибольшему численному значенію Y при $a < z < b$, то полученная такимъ образомъ новая функція будетъ принадлежать къ числу разсматриваемыхъ нами функцій $f(z)$ и при $z = x$ ея производная численно больше $\frac{dy}{dz}$.

Итакъ s не меньше n и рядъ отношеній

$$\frac{y(\alpha_2)}{y(\alpha_1)}, \frac{y(\alpha_3)}{y(\alpha_2)}, \ldots, \frac{y(\alpha_s)}{y(\alpha_{s-1})} \tag{1}$$

содержитъ не менѣе $n-1$ чиселъ равныхъ -1.

Если -1 встрѣчается n разъ въ ряду (1), то, какъ извѣстно, y приводится къ

$$\pm L \cos n \arccos \frac{2z-a-b}{b-a} = \pm f_0(z).$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\pm nL}{\sqrt{(z-a)(b-z)}} \sin n \arccos \frac{2z-a-b}{b-a} = \pm f_0'(z).$$

Изслѣдуемъ условія, при которыхъ наибольшее численное значеніе $f'(x)$ дѣйствительно равно численному значенію $f_0'(x)$.

Такъ какъ мы занимаемся численными значеніями, то изъ всѣхъ функцій $f(z)$ можемъ ограничиться только тѣми, для которыхъ $f'(x)$ имѣетъ одинаковый знакъ съ $f_0'(x)$.

Положимъ для краткости

$$\frac{b-a}{2}\cos\frac{i\pi}{n}+\frac{b+a}{2}=\xi_{n-i} \text{ при } i=0,\ 1,\ 2,\ldots,n$$

и

$$f(z)-f_0(z)=\varphi(z).$$

Разсматривая значеніе $f(z)$ и $f_0(z)$ при

$$z=\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ldots,\xi_n,$$

находимъ

$$\begin{array}{llll} f_0(\xi_n) = +L & \text{и потому} & \varphi(\xi_n) & \leqq 0 \\ f_0(\xi_{n-1})=-L & \text{»} \quad \text{»} & \varphi(\xi_{n-1}) & \geqq 0 \\ f_0(\xi_{n-2})=+L & \text{»} \quad \text{»} & \varphi(\xi_{n-2}) & \leqq 0 \\ \ldots\ldots & & & \\ f_0(\xi_0)=(-1)^n L & \text{и потому} & (-1)^n\varphi(\xi_0) & \leqq 0. \end{array}$$

Слѣдовательно уравненіе

$$\varphi(z)=0$$

должно имѣть по одному корню

между ξ_0 и ξ_1, между ξ_1 и $\xi_2,\ldots$, между ξ_{n-1} и ξ_n.

Иначе сказать, функція $\varphi(z)$ должна разлагаться на вещественные множители первой степени относительно z:

$$\varphi(z)=q(z-\eta_1)(z-\eta_2)\ldots(z-\eta_n),$$

при чемъ

$$a=\xi_0\leqq\eta_1\leqq\xi_1\leqq\eta_2\leqq\xi_2\leqq\ldots\leqq\xi_{n-1}\leqq\eta_n\leqq\xi_n=b.$$

Что касается коэффиціента q, то онъ долженъ быть отрицательнымъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$f'(x)=f_0'(x)+\left(\frac{1}{x-\eta_1}+\frac{1}{x-\eta_2}+\ldots+\frac{1}{x-\eta_n}\right)\varphi(x)$$

и

$$f_0'(x)=\frac{2^{2n-1}nL}{(b-a)^n}(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_{n-1})$$

такъ какъ $f_0'(z)$ обращается въ нуль при

$$z=\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\xi_{n-1}$$

и старшій членъ цѣлой функціи $f_0(z)$ равенъ

$$\frac{2^{2n-1}Lz^n}{(b-a)^n}.$$

Остановимся сначала на томъ случаѣ, когда x лежитъ внѣ предѣловъ a и b.

Тогда каждое изъ выраженій

$$\frac{\varphi(x)}{x-\eta_1},\ \frac{\varphi(x)}{x-\eta_2},\ldots,\ \frac{\varphi(x)}{x-\eta_n}$$

имѣетъ знакъ противуположный знаку $f_0'(x)$ и потому

$$\text{числ. знач. } f'(x)<\text{числ. знач. } f_0'(x).$$

Итакъ, если x лежитъ внѣ предѣловъ a и b, то наибольшее численное значеніе $f'(x)$ равно численному значенію $f_0'(x)$.

Положимъ теперь, что x заключается между ξ_{i-1} и ξ_i.

Тогда

$$\frac{\varphi(x)}{x-\eta_i}=q(x-\eta_1)(x-\eta_2)\ldots(x-\eta_{i-1})(x-\eta_{i+1})\ldots(x-\eta_n)$$

имѣетъ знакъ противуположный знаку $f_0'(x)$.

Остается разсмотрѣть знакъ суммы

$$\frac{x-\eta_i}{x-\eta_1}+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_2}+\ldots+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_{i-1}}+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_i}+\ldots+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_n}=\Sigma,$$

которую мы для краткости обозначаемъ одною буквою Σ.

У насъ $f(z)$ означаетъ какую угодно изъ цѣлыхъ функцій $n^{\text{ой}}$ степени отъ z, удовлетворяющихъ условіямъ

$$-L<f(z)<+L \text{ при } a<z<b$$

и

$$\frac{f'(x)}{f_0'(x)}>0.$$

Поэтому числа

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

могутъ получать какія угодно значенія, лишь бы только имѣли мѣсто неравенства

$$\xi_0 \leqq \eta_1 \leqq \xi_1 \leqq \eta_2 \leqq \xi_2 \leqq \ldots \leqq \xi_{n-1} \leqq \eta_n \leqq \xi_n$$

и коэффиціентъ q численно былъ достаточно малъ.

Принявъ во вниманіе это замѣчаніе, нетрудно убѣдиться, что наименьшее (предѣльное) значеніе суммы Σ равно наименьшему изъ чиселъ

$$\frac{x-\xi_{i-1}}{x-\xi_0} + \frac{x-\xi_{i-1}}{x-\xi_1} + \ldots + \frac{x-\xi_{i-1}}{x-\xi_{n-1}} = (x-\xi_{i-1})\left\{\frac{f_0''(x)}{f_0'(x)} + \frac{1}{x-a}\right\}$$

и

$$\frac{x-\xi_i}{x-\xi_1} + \frac{x-\xi_i}{x-\xi_2} + \ldots + \frac{x-\xi_i}{x-\xi_n} = (x-\xi_i)\left\{\frac{f_0''(x)}{f_0'(x)} + \frac{1}{x-b}\right\}.$$

Если наименьшее значеніе Σ число положительное, то и всѣ значенія Σ также числа положительныя и знакъ выраженія

$$\left(\frac{1}{x-\eta_1} + \frac{1}{x-\eta_2} + \ldots + \frac{1}{x-\eta_n}\right)\varphi(x)$$

противуположенъ знаку $f_0'(x)$; вмѣстѣ съ тѣмъ конечно

$$\text{числен. знач. } f'(x) < \text{числен. знач. } f_0'(x).$$

Если же наименьшее значеніе Σ число отрицательное, то неопредѣленными числами

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

можно распорядиться такъ, что $f'(x)$ численно превзойдетъ $f_0'(x)$.

Отсюда заключаемъ, что наибольшее численное значеніе $f'(x)$ равно численному значенію $f_0'(x)$ тогда и только тогда, когда x лежитъ внѣ предѣловъ a и b или

$$a < x < b, \ \frac{f_0''(x)}{f_0'(x)} + \frac{1}{x-a} > 0 \text{ и } \frac{f_0''(x)}{f_0'(x)} + \frac{1}{x-b} < 0 \qquad (2).$$

Вмѣсто дробныхъ выраженій

$$\frac{f_0''(x)}{f_0'(x)} + \frac{1}{x-a} \text{ и } \frac{f_0''(x)}{f_0'(x)} + \frac{1}{x-b}$$

можно разсматривать

$$(x-a)\, f_0''(x) + f_0'(x) \text{ и } (x-b)\, f_0''(x) + f_0'(x),$$

такъ какъ, во первыхъ, при соблюденіи неравенствъ (2) выраженія

$$(x-a)\, f_0''(x) + f_0'(x) \text{ и } (x-b)\, f_0''(x) + f_0'(x) \qquad (3)$$

имѣютъ одинаковые знаки и, во вторыхъ, наши неравенства (2) навѣрно имѣютъ мѣсто, если знаки выраженій (3) одинаковы и $a < x < b$.

Разсмотрѣвъ такимъ образомъ случай

$$y = f_0(z),$$

обратимся къ другимъ.

Если y не $= f_0(z)$, то по доказанному рядъ отношеній

$$\frac{y(\alpha_2)}{y(\alpha_1)}, \frac{y(\alpha_3)}{y(\alpha_2)}, \ldots, \frac{y(\alpha_s)}{y(\alpha_{s-1})} \qquad (1)$$

содержитъ $n-1$ чиселъ равныхъ -1.

Вмѣстѣ съ тѣмъ $s = n$ и изъ двухъ разностей

$$\alpha_1 - a, \ b - \alpha_n$$

должна обращаться въ нуль по крайней мѣрѣ одна.

Возьмемъ одну изъ функцій $f(z)$, удовлетворяющихъ нашимъ условіямъ.

Уравненіе

$$f(z) - y = 0$$

$n^{\text{ой}}$ или низшей степени относительно z имѣетъ по одному корню

между α_1 и α_2, между α_2 и α_3, ..., между α_{n-1} и α_n.

Иначе сказать, разность $f(z)-y$ должна разлагаться на вещественные множители первой степени относительно z:

$$f(z)-y=\psi(z)=(qz-r)(z-\eta_1)(z-\eta_2)\ldots(z-\eta_{n-1})$$

при чемъ

$$\alpha_1\leqq\eta_1\leqq\alpha_2\leqq\eta_2\leqq\ldots\leqq\alpha_{n-1}\leqq\eta_{n-1}\leqq\alpha_n,\ \frac{r}{q}\geqq\alpha_n \text{ или } \leqq\alpha_1.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$f'(x)=\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}+\left\{\frac{1}{x-\eta_1}+\frac{1}{x-\eta_2}+\ldots+\frac{1}{x-\eta_{n-1}}+\frac{1}{x-\eta_n}\right\}\psi(x),$$

гдѣ $\eta_n=\frac{r}{q}$.

Нетрудно также убѣдиться, что знакъ разности

$$qz-r$$

противуположенъ знаку $y(\alpha_n)$ при всѣхъ значеніяхъ z, лежащихъ между α_1 и α_n.

При соблюденіи указанныхъ нами условій числамъ

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

можно давать какія угодно значенія, лишь бы только числовая величина коэффиціента q была достаточно мала.

Допустимъ сначала, что x больше α_n.

Тогда при $\eta_n>x$ имѣютъ мѣсто неравенства

$$0<\frac{1}{x-\eta_1}+\frac{1}{x-\eta_2}+\ldots+\frac{1}{x-\eta_{n-1}}<\frac{1}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{x-\alpha_n}$$

$$0>\frac{1}{x-\eta_n}>-\infty$$

и неопредѣленностью чиселъ

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

можно воспользоваться такъ, что выраженіе

$$\left\{\frac{1}{x-\eta_1}+\frac{1}{x-\eta_2}+\ldots+\frac{1}{x-\eta_n}\right\}\psi(x)$$

будетъ имѣть какой угодно знакъ.

Слѣдовательно случай

$$x>\alpha_n$$

невозможенъ.

Совершенно также докажемъ, что x не меньше α_1.

Положимъ затѣмъ, что x заключается между α_i и α_{i+1}.

Тогда знакъ

$$\frac{\psi(x)}{x-\eta_i}$$

противуположенъ знаку

$$(-1)^{n-i-1}y(\alpha_n)$$

и для того, чтобы $f'(x)$ по числовой величинѣ было меньше $\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}$, знакъ суммы

$$\frac{x-\eta_i}{x-\eta_1}+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_2}+\ldots+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_i}+\ldots+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_n}$$

долженъ быть одинаковъ со знакомъ

$$(-1)^{n-i-1}y(\alpha_n)\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}.$$

А выраженіе

$$(-1)^{n-i-1}y(\alpha_n)\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}$$

число положительное, такъ какъ знакъ

$$(-1)^{n-i-1}y(\alpha_n)$$

одинаковъ со знакомъ $y(\alpha_{i+1})$ и со знакомъ $\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}$.

Съ другой стороны нетрудно убѣдиться, что наименьшее значеніе суммы

$$\frac{x-\eta_i}{x-\eta_1}+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_2}+\ldots+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_{i-1}}+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_i}+\ldots+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_{n-1}}+\frac{x-\eta_i}{x-\eta_n}$$

равно наименьшему изъ чиселъ

$$(x-\alpha_i)\left\{\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{x-\alpha_i}+\ldots+\frac{1}{x-\alpha_{n-1}}+\frac{1}{x-\alpha_n}\right\},$$

$$(x-\alpha_{i+1})\left\{\frac{1}{x-\alpha_2}+\frac{1}{x-\alpha_3}+\ldots+\frac{1}{x-\alpha_{i+1}}+\ldots+\frac{1}{x-\alpha_n}+\frac{1}{x-\alpha_1}\right\}$$

и потому не можетъ быть ни больше ни меньше нуля.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему условію

$$\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{x-\alpha_{n-1}}+\frac{1}{x-\alpha_n}=0 \qquad (4).$$

Наши разсужденія показываютъ также, что за исключеніемъ одного случая, когда одновременно

$$n=2,\ \alpha_1=a,\ \alpha_n=b,\ x=\frac{a+b}{2},$$

производная $f'(x)$ достигаетъ своего наибольшаго численнаго значенія только для двухъ функцій $f(z)$ и эти послѣднія отличаются другъ отъ друга только знакомъ.

Если же

$$n=2 \text{ и } x=\frac{a+b}{2},$$

то наибольшее численное значеніе $f'(x)$ равно $\frac{2L}{b-a}$ и соотвѣтствуетъ безчисленному множеству различныхъ функцій $f(z)$: именно, всѣмъ функціямъ вида

$$L\left\{\frac{2z-a-b}{b-a}+q(z-a)(z-b)\right\}$$

при

$$-\frac{2}{(b-a)^2}<q<\frac{2}{(b-a)^2}.$$

Вспомнимъ, что изъ двухъ разностей

$$\alpha_1-a,\ b-\alpha_n$$

одна по крайней мѣрѣ обращается въ нуль, и соотвѣтственно этому различимъ три случая:

1) $\alpha_1=a,\ \alpha_n<b$; 2) $\alpha_1>a,\ \alpha_n=b$; 3) $\alpha_1=a,\ \alpha_n=b$.

Если

$$\alpha_1=a \text{ и } \alpha_n<b,$$

то къ числамъ

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_n$$

можно прибавить еще нѣкоторое число

$$\alpha_{n+1},$$

которое больше b и удовлетворяетъ условію

$$y(\alpha_{n+1})=-y(\alpha_n),$$

такъ какъ при непрерывномъ возрастаніи z отъ α_n до $+\infty$ отношеніе

$$\frac{-y}{y(\alpha_n)}$$

также постоянно возрастаетъ отъ -1 до $+\infty$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$y=\pm L\cos n\arccos\frac{2z-a-\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}-a}=\pm f_1(z).$$

Неизвѣстное α_{n+1} согласно условію (4) должно удовлетворять уравненію

$$\sum\frac{1}{x-\frac{a+\alpha_{n+1}}{2}-\frac{\alpha_{n+1}-a}{2}\cos\frac{i\pi}{n}}=0,\ \text{т. е. } \frac{f_1''(x)}{f_1'(x)}+\frac{1}{x-a}=0$$

$(i=1,\ 2,\ldots,n)$

и кромѣ того неравенствамъ

$$\alpha_{n+1}>b>\frac{a+\alpha_{n+1}}{2}+\frac{\alpha_{n+1}-a}{2}\cos\frac{\pi}{n},$$

откуда

$$\frac{b-a\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}} > \alpha_{n+1} > b.$$

Слѣдовательно для того, чтобы случай

$$\alpha_1 = a,\quad \alpha_n < b$$

дѣйствительно имѣлъ мѣсто, одно изъ значеній α_{n+1}, удовлетворяющихъ уравненію

$$(x-a)\, f_1''(x) + f_1'(x) = 0 \qquad (5),$$

должно заключаться между

$$\frac{b-a\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}} \text{ и } b.$$

И только одно, такъ какъ въ противномъ случаѣ искомое нами наибольшее значеніе $f'(x)$ соотвѣтствовало бы нѣсколькимъ различнымъ функціямъ $f(z)$, а предыдущія разсужденія показываютъ невозможность этого.

Разсматривая затѣмъ сумму

$$\sum \frac{1}{x-\frac{a+\alpha_{n+1}}{2}-\frac{\alpha_{n+1}-a}{2}\cos\frac{i\pi}{n}}$$

$$(i = 1,\ 2, \ldots, n)$$

какъ функцію отъ α_{n+1}, замѣчаемъ, что при непрерывномъ возрастаніи α_{n+1} эта функція постоянно возрастаетъ за исключеніемъ тѣхъ значеній α_{n+1}, при которыхъ она обращается въ ∞.

Поэтому уравненіе (5) не можетъ имѣть кратныхъ корней.

Отсюда уже нетрудно заключить, что случай

$$\alpha_1 = a,\quad \alpha_n < b$$

имѣетъ мѣсто тогда и только тогда, когда при переходѣ α_{n+1} отъ b до $\frac{b-a\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}$ выраженіе

$$(x-a)\, f_1''(x) + f_1'(x)$$

мѣняетъ свой знакъ.

Замѣтимъ еще, что при $\alpha_{n+1} = b$ выраженіе

$$(x-a)\, f_1''(x) + f_1'(x)$$

обращается въ

$$(x-a)\, f_0''(x) + f_0'(x).$$

Совершенно также, введя новое перемѣнное число α_0 и положивъ

$$L \cos n \arccos \frac{2z-\alpha_0-b}{b-\alpha_0} = f_2(z)$$

убѣдимся, что случай

$$\alpha_1 > a,\quad \alpha_n = b$$

имѣетъ мѣсто тогда и только тогда, когда при переходѣ α_0 отъ $\frac{a-b\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}$ до a выраженіе

$$(x-b)\, f_2''(x) + f_2'(x)$$

мѣняетъ свой знакъ.

Тогда

$$y = \pm f_2(z),$$

при чемъ α_0 должно удовлетворять уравненію

$$(x-b)\, f_2''(x) + f_2'(x) = 0$$

и неравенствамъ

$$\alpha_0 < a < \frac{\alpha_0+b}{2} + \frac{b-\alpha_0}{2}\cos\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Обратимся къ случаю

$$\alpha_1 = a,\quad \alpha_n = b,$$

который имѣетъ мѣсто тогда и только тогда, когда не можетъ имѣть мѣста ни одинъ изъ предыдущихъ случаевъ.

Если

$$\alpha_1 = a \text{ и } \alpha_n = b,$$

то уравненіе

$$\frac{dy}{dz} = 0$$

$n-1^{\text{ой}}$ степени относительно z имѣетъ $n-2$ корня

$$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$$

между a и b и одинъ корень внѣ этихъ предѣловъ.

Обозначимъ этотъ послѣдній буквою β и предположимъ для опредѣленности $\beta > b$.

Въ такомъ случаѣ численное значеніе y, при возрастаніи z отъ b до β, возрастаетъ а, при дальнѣйшемъ возрастаніи z, сначала убываетъ до нуля и затѣмъ возрастаетъ безпредѣльно.

Вмѣстѣ съ тѣмъ конечно уравненіе

$$y^2 - L^2 = 0$$

$2n^{\text{ой}}$ степени относительно z имѣетъ кромѣ $n-2$ двукратныхъ корней

$$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$$

и двухъ простыхъ

$$a, b$$

еще два корня, которые мы обозначимъ буквами

$$\gamma \text{ и } \delta.$$

Эти послѣдніе два корня больше β.

Слѣдовательно

$$y^2 - L^2 = p_0^2 (z-\alpha_2)^2 (z-\alpha_3)^2 \ldots (z-\alpha_{n-1})^2 (z-a)(z-b)(z-\gamma)(z-\delta)$$

и

$$\frac{dy}{dz} = n p_0 (z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\ldots(z-\alpha_{n-1})(z-\beta),$$

откуда выводимъ дифференціальное уравненіе перваго порядка

$$y^2 - L^2 = \frac{(z-a)(z-b)(z-\gamma)(z-\delta)}{n^2 (z-\beta)^2} \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 \qquad (6).$$

Е. И. Золотаревъ въ своей статьѣ «Приложеніе эллиптическихъ функцій къ вопросамъ о функціяхъ наименѣе и наиболѣе отклоняющихся отъ нуля» выразилъ рѣшеніе послѣдняго уравненія посредствомъ эллиптическихъ функцій.

Не останавливаясь на формулахъ Е. И. Золотарева, покажемъ, какимъ образомъ можно свести нашу задачу къ тремъ алгебраическимъ уравненіямъ.

Для этой цѣли изъ уравненія (6) посредствомъ дифференцированія выводимъ

$$n^2 (z-\beta)^3 y = (z-a)(z-b)(z-\gamma)(z-\delta)(z-\beta) y'' \qquad (7).$$

$$+ \frac{1}{2}(z-a)(z-b)(z-\gamma)(z-\delta)(z-\beta)\left\{\frac{1}{z-a} + \ldots + \frac{1}{z-\delta} - \frac{2}{z-\beta}\right\} y'$$

Полагая затѣмъ

$$y = p_0 (z-\beta)^n + p_1' (z-\beta)^{n-1} + \ldots + p'_{n-2} (z-\beta)^2 + p'_n$$

располагаемъ обѣ части уравненія (7) по степенямъ $z-\beta$ и посредствомъ сравненія коэффиціентовъ приходимъ къ системѣ $n+1$ уравненій съ $n+2$ неизвѣстными

$$\frac{p_1'}{p_0}, \frac{p_2'}{p_0}, \ldots, \frac{p'_{n-2}}{p_0}, \frac{p'_n}{p_0}, \beta, \gamma, \delta.$$

Изъ этихъ уравненій нетрудно вывесть выраженія неизвѣстныхъ

$$\frac{p_1'}{p_0}, \frac{p_2'}{p_0}, \ldots, \frac{p'_{n-2}}{p_0}, \frac{p'_n}{p_0},$$

которыя входятъ въ нихъ линейнымъ образомъ черезъ остальныя три

$$\beta, \gamma, \delta.$$

Исключая

$$\frac{p_1'}{p_0}, \frac{p_2'}{p_0}, \ldots, \frac{p'_{n-2}}{p_0}, \frac{p'_n}{p_0},$$

приходимъ къ двумъ алгебраическимъ уравненіямъ съ неизвѣстными

$$\beta, \gamma, \delta.$$

А условіе (4) даетъ еще третье уравненіе

$$\left(\frac{y''}{y'}\right)_{z=x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-\beta} = 0 \qquad (8).$$

Что же касается коэффиціента p_0, то онъ опредѣляется изъ условія

$$y(a) = \pm L.$$

Къ такимъ же результатамъ придемъ и въ томъ случаѣ, когда β меньше a; только при $\beta < a$ числа γ и δ должны быть меньше β.

Для дальнѣйшаго важно замѣтить, что во всякомъ случаѣ выраженіе

$$\frac{(z-\gamma)(z-\delta)}{(z-\beta)^2}$$

больше единицы при всѣхъ значеніяхъ z, лежащихъ между a и b.

Покажемъ еще, что уравненіе (6) можно замѣнить двумя линейными дифференціальными уравненіями перваго порядка съ двумя неизвѣстными цѣлыми функціями.

При этомъ для опредѣленности будемъ считать

$$y(a) = L, \quad a < b < \beta < \gamma < \delta.$$

Пусть n число четное.

Тогда обозначивъ произведенія

$$(z-\alpha_2)(z-\alpha_4)\ldots(z-\alpha_{n-2}) \text{ и } (z-\alpha_3)(z-\alpha_5)\ldots(z-\alpha_{n-1})$$

соотвѣтственно буквами

$$U \text{ и } V$$

выводимъ

$$y - L = p_0(z-a)(z-\delta)V^2$$

$$y + L = p_0(z-b)(z-\gamma)U^2$$

$$y' = p_0\{2(z-a)(z-\delta)V' + (2z-a-\delta)V\}V$$

$$= p_0\{2(z-b)(z-\gamma)U' + (2z-b-\gamma)U\}U$$

$$= np_0(z-\beta)UV$$

и такимъ образомъ приходимъ къ желаемымъ двумъ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ перваго порядка

$$2(z-a)(z-\delta)V' + (2z-a-\delta)V = n(z-\beta)U$$

$$2(z-b)(z-\gamma)U' + (2z-b-\gamma)U = n(z-\beta)V.$$

Подобнымъ же образомъ при n нечетномъ, обозначивъ произведенія

$$(z-\alpha_2)(z-\alpha_4)\ldots(z-\alpha_{n-1}) \text{ и } (z-\alpha_3)(z-\alpha_5)\ldots(z-\alpha_{n-2})$$

соотвѣтственно буквами

$$U \text{ и } V,$$

приходимъ къ уравненіямъ

$$2(z-a)(z-b)(z-\gamma)V' + \{3z^2 - 2(a+b+\gamma)z + ab + a\gamma + b\gamma\}V = n(z-\beta)U$$

$$2(z-\delta)U' + U = n(z-\beta)V.$$

Примѣры.

I $n = 2$.

Въ этомъ случаѣ

$$f_0(z) = \frac{L}{(b-a)^2}\{8(z-a)(z-b) + (b-a)^2\},$$

$$f_0'(z) = \frac{8L}{(b-a)^2}(2z-a-b), \quad f_0''(z) = \frac{16L}{(b-a)^2}$$

$$(x-a)f_0''(x) + f_0'(x) = \frac{8L}{(b-a)^2}(4x-3a-b)$$

$$(x-b)f_0''(x) + f_0'(x) = \frac{8L}{(b-a)^2}(4x-3b-a).$$

Слѣдовательно

$$\text{при } x > \frac{3\,b+a}{4} \text{ и при } x < \frac{3\,a+b}{4}$$

наибольшее численное значеніе $f'(x)$ равно численному значенію

$$f_0'(x) = \frac{8\,L}{(b-a)^2}\,(2x - a - b).$$

Обращаясь затѣмъ къ функціямъ $f_1(z)$ и $f_2(z)$, находимъ

$$f_1(z) = \frac{L}{(\alpha_3-a)^2}\left\{8\,(z-a)\,(z-\alpha_3) + (\alpha_3 - a)^3\right\},$$

$$(x-a)\;f_1''(x) + f_1'(x) = \frac{8\,L}{(\alpha_3-a)^2}\,(4x - 3\,a - \alpha_3),$$

$$f_2(z) = \frac{L}{(b-\alpha_0)^2}\left\{8\,(z-\alpha_0)\,(z-b) + (b-\alpha_0)^3\right\},$$

$$(x-b)\;f_2''(x) + f_2'(x) = \frac{8\,L}{(b-\alpha_0)^2}\,(4x - 3b - \alpha_0),$$

$$\alpha_3 = 4x - 3a,\ \ \alpha_0 = 4x - 3b$$

и отсюда заключаемъ, что наибольшее численное значеніе $f'(x)$

$$\text{при } \frac{3a+b}{4} < x < \frac{a+b}{2} \text{ равно } \frac{-8L}{(\alpha_3-a)^2}\,(2x - \alpha_3 - a) = \frac{L}{x-a}$$

$$\text{а при } \frac{a+b}{2} < x < \frac{3b+a}{4} \text{ равно } \frac{8L}{(b-\alpha_0)^2}\,(2x - \alpha_0 - b) = \frac{L}{b-x}.$$

Что же касается функціи y, опредѣляемой дифференціальнымъ уравненіемъ (6), то при $n = 2$ она не играетъ въ нашемъ вопросѣ никакой роли.

II $n = 3$.

Полагая для упрощенія результатовъ

$$a = -1 \text{ и } b = +1,$$

находимъ

$$f_0(z) = L\,(4z^3 - 3z),\ f_0'(z) = 3L\,(4z^2 - 1),\ f_0''(z) = 24Lz$$

$$(x-a)\,f_0''(x) + f_0'(x) = 3L\,(12x^2 + 8x - 1) = 36L\,(x-\omega_1)\,(x-\omega_2)$$

$$(x-b)\,f_0''(x) + f_0'(x) = 3L\,(12x^2 - 8x - 1) = 36L\,(x-\omega')\,(x-\omega''),$$

гдѣ

$$\omega_1 = \frac{-2-\sqrt{7}}{6} < \omega' = \frac{2-\sqrt{7}}{6} < \omega_2 = \frac{-2+\sqrt{7}}{6} < \omega'' = \frac{2+\sqrt{7}}{6}.$$

Слѣдовательно

$$\text{при } x < \omega_1,\ \text{ при } \omega' < x < \omega_2 \text{ и при } x > \omega''$$

наибольшее численное значеніе $f'(x)$ равно численному значенію $f_0'(x) = 3\,L\,(4\,x^2 - 1)$.

Обращаясь затѣмъ къ функціямъ $f_1(z)$ и $f_2(z)$, находимъ

$$f_1(z) = L\left\{4\left(\frac{2z+1-\alpha_4}{\alpha_4+1}\right)^3 - 3\,\frac{2z+1-\alpha_4}{\alpha_4+1}\right\}$$

$$(x-a)\,f_1''(x) + f_1'(x) =$$

$$= \frac{6L}{(\alpha_4+1)^3}\left[16\,(2x+1-\alpha_4)\,(x+1) + 4\,(2x+1-\alpha_4)^2 - (\alpha_4+1)^2\right]$$

$$f_2(z) = L\left\{4\left(\frac{2z-1-\alpha_0}{1-\alpha_0}\right)^3 - 3\,\frac{2z-1-\alpha_0}{1-\alpha_0}\right\}$$

$$(x-b)\,f_2''(x) + f_2'(x) =$$

$$= \frac{6L}{(1-\alpha_0)^3}\left\{16\,(2x-1-\alpha_0)\,(x-1) + 4\,(2x-1-\alpha_0)^2 - (1-\alpha_0)^2\right\}.$$

Выраженіе

$$16\,(2x + 1 - \alpha_4)\,(x+1) + 4\,(2x + 1 - \alpha_4)^2 - (\alpha_4 + 1)^2$$

при $\alpha_4 = 1$ обращается въ

$$48x^2 + 32x - 4 = 48\,(x - \omega_1)(x - \omega_2),$$

а при $\alpha_4 = \dfrac{1+\sin^2\frac{\pi}{6}}{\cos^2\frac{\pi}{6}} = \dfrac{5}{3}$ оно обращается въ

$$32\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+1) + 16\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{64}{9} = 48x^2 + \frac{32}{3}x - 16 =$$

$$= 48\,(x - \varepsilon_1)\,(x - \varepsilon_2),$$

гдѣ

$$\varepsilon_1 = \frac{-1-\sqrt{28}}{9} \text{ и } \varepsilon_2 = \frac{-1+\sqrt{28}}{9}.$$

Отсюда заключаемъ, что наибольшее численное значеніе $f'(x)$ равно численному значенію $f_1'(x)$ въ тѣхъ случаяхъ, когда $\omega_1 < x < \varepsilon_1$ или $\omega_2 < x < \varepsilon_2$.

При этомъ число α_4 должно быть опредѣлено изъ уравненія

$$16(2x+1-\alpha_4)(x+1)+4(2x+1-\alpha_4)^2-(1+\alpha_4)^2=0.$$

Чтобы придать выраженію $f_1'(x)$ возможно простой видъ положимъ

$$\alpha_4=-1+\xi \text{ и } x+1=t.$$

Тогда

$$f_1'(x)=-t f_1''(x)$$

$$f_1''(x)=\frac{4.3.2.2^2(2t-\xi)}{\xi^3}L=96\left\{2\left(\frac{t}{\xi}\right)^3-\left(\frac{t}{\xi}\right)^2\right\}\frac{L}{t^2}$$

$$48t^2-32t\xi+3\xi^2=0,\quad \frac{t}{\xi}=\frac{4\pm\sqrt{7}}{12}$$

$$2\left(\frac{t}{\xi}\right)^3-\left(\frac{t}{\xi}\right)^2=\frac{10\pm7\sqrt{7}}{144.6}$$

$$f_1'(x)=-\frac{10\pm7\sqrt{7}}{9}\,\frac{L}{x+1}.$$

Изъ двухъ знаковъ $\pm$ при $\sqrt{7}$ надо остановиться на томъ, при которомъ

$$\alpha_4=-1+\frac{12}{4\pm\sqrt{7}}(x+1)$$

заключается между 1 и $\frac{5}{3}$.

А неравенства

$$\frac{5}{3}>\alpha_4>1$$

равносильны такимъ

$$\frac{-1\pm\sqrt{28}}{9}>x>\frac{-2\pm\sqrt{7}}{6}.$$

Сопоставляя послѣднія неравенства съ найденными раньше

$$\omega_1<x<\varepsilon_1 \text{ или } \omega_2<x<\varepsilon_2,$$

видимъ, что наибольшее численное значеніе $f'(x)$

$$\text{при } \omega_1<x<\varepsilon_1 \text{ равно } \frac{7\sqrt{7}-10}{9}\,\frac{L}{x+1}$$

$$\text{а при } \omega_2<x<\varepsilon_2 \text{ равно } \frac{7\sqrt{7}+10}{9}\,\frac{L}{x+1}.$$

Совершенно также, полагая

$$\frac{1-\sqrt{28}}{9}=\varepsilon' \text{ и } \frac{1+\sqrt{28}}{9}=\varepsilon''$$

убѣждаемся, что наибольшее численное значеніе $f'(x)$

$$\text{при } \varepsilon''<x<\omega'' \text{ равно } \frac{7\sqrt{7}-10}{9}\,\frac{L}{1-x}$$

$$\text{а при } \varepsilon'<x<\omega' \text{ равно } \frac{7\sqrt{7}+10}{9}\,\frac{L}{1-x}.$$

Если же x заключается

$$\text{между } \varepsilon_1 \text{ и } \varepsilon' \text{ или между } \varepsilon_2 \text{ и } \varepsilon''$$

то наибольшее численное значеніе $f'(x)$ соотвѣтствуетъ той функціи y, которая опредѣляется уравненіями (6) и (8) при $n=3$, $a=-1$, $b=+1$.

Въ нашемъ примѣрѣ дифференціальное уравненіе (6) можно замѣнить двумя равенствами

$$y-L=p_0(z^2-1)(z-\gamma),\quad y+L=p_0(z-\alpha_2)^2(z-\delta),$$

откуда затѣмъ выводимъ

$$\gamma=\delta+2\alpha_2,\quad -1=\alpha_2^2+2\alpha_2\delta,\quad -2L=p_0(\alpha_2^2\delta+\gamma)$$

$$\delta=-\frac{1+\alpha_2^2}{2\alpha_2},\quad \gamma=\frac{3\alpha_2^2-1}{2\alpha_2},\quad p_0=\frac{4\alpha_2 L}{(1-\alpha_2^2)^2}.$$

А уравненіе (8) обращается въ слѣдующее

$$\frac{1}{x-\alpha_2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=0.$$

Слѣдовательно

$$x-\alpha_2=\frac{1-x^2}{2x},\ \alpha_2=\frac{3x^2-1}{2x}$$

$$1-\alpha_2=\frac{1+2x-3x^2}{2x}=\frac{(1-x)(1+3x)}{2x},\ 1-\gamma=\frac{(1-\alpha_2)(1+3\alpha_2)}{2\alpha_2}$$

$$1+\alpha_2=\frac{3x^2+2x-1}{2x}=\frac{(1+x)(3x-1)}{2x},\ 1+\gamma=\frac{(1+\alpha_2)(3\alpha_2-1)}{3\alpha_2}$$

$$1+3\alpha_2=\frac{9x^2+2x-3}{2x}=\frac{9\,(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)}{2x}$$

$$3\alpha_2-1=\frac{9x^2-2x-3}{2x}=\frac{9\,(x-\varepsilon')(x-\varepsilon'')}{2x}$$

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}=\frac{4\alpha_2 L}{(1-\alpha_2{}^2)^2}\left\{3x^2-\frac{3\alpha_2{}^2-1}{\alpha_2}\,x-1\right\}=\frac{4\,(x-\alpha_2)(3x\alpha_2+1)}{(1-\alpha_2{}^2)^2}L$$

$$=-\frac{16\,x^3 L}{(1-9x^2)(1-x^2)}.$$

Теперь уже нетрудно убѣдиться, что

$$\text{при } \varepsilon_1<x<\varepsilon' \text{ и при } \varepsilon_2<x<\varepsilon''$$

составленная нами функція y удовлетворяетъ всѣмъ вышеуказаннымъ условіямъ и наибольшее численное значеніе $f'(x)$ равно численному значенію

$$\frac{16\,x^3 L}{(1-9x^2)(1-x^2)}.$$

Задача № 2.

Найти наибольшее численное значеніе $f'(x)$ для всѣхъ x, лежащихъ между a и b.

Рѣшеніе.

Рѣшая предыдущую задачу, мы нашли всѣ тѣ функціи $f(z)$, для которыхъ $f'(x)$ численно достигаетъ своего наибольшаго значенія.

Одинъ изъ нашихъ результатовъ состоитъ въ томъ, что при

$$\frac{(x-b)f_0''(x)+f_0'(x)}{(x-a)f_0''(x)+f_0'(x)}>0$$

наибольшее численное значеніе $f'(x)$ равно

$$\text{числ. знач. } f_0'(x)=\text{числ. знач. }\frac{n\,L\sin n\arccos\frac{2x-a-b}{b-a}}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

Положивъ затѣмъ

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\varphi,$$

находимъ

$$f_0(x)=L\cos n\varphi,\ f_0'(x)=\frac{2n\,L\sin n\varphi}{(b-a)\sin\varphi},$$

$$f_0''(x)=\frac{4n\,L\,\{\sin n\varphi\cos\varphi-n\cos n\varphi\sin\varphi\}}{(b-a)^2\sin^3\varphi},$$

$$\frac{(x-b)f_0''(x)+f_0'(x)}{(x-a)f_0''(x)+f_0'(x)}=\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\,\frac{\sin n\varphi+n\cos n\varphi\sin\varphi}{\sin n\varphi-n\cos n\varphi\sin\varphi}.$$

Если $0<\varphi<\frac{\pi}{2n}$ или $\pi>\varphi>\pi-\frac{\pi}{2n}$, то

$$\text{числ. знач. }\sin n\varphi>\text{числ. знач. } n\cos n\varphi\sin\varphi$$

и

$$\frac{(x-b)f_0''(x)+f_0'(x)}{(x-a)f_0''(x)+f_0'(x)}>0.$$

Съ другой стороны изъ формулы

$$f_0'(x)=\frac{2n\,L\sin n\varphi}{(b-a)\sin\varphi}$$

видно, что при $a\leqq x\leqq b$ наибольшее численное значеніе $f_0'(x)$ равно

$$\frac{2n^2 L}{b-a}$$

и соотвѣтствуетъ $x=a$ и $x=b$.

Поэтому для всѣхъ значеній x, лежащихъ

между a и $\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n}$ или между $\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n}$ и b,

наибольшее численное значеніе $f'(x)$ равно

$$\frac{2n^2 L}{b-a}.$$

Положимъ теперь, что x заключается между

$$\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n} \quad \text{и} \quad \frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n}.$$

Въ такомъ случаѣ

$$(x-a)(b-x)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(\frac{b+a}{2}-x\right)^2>\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\sin^2\frac{\pi}{2n}>\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\frac{1}{n^2}.$$

Производная $f'(x)$ достигаетъ численно своего наибольшаго значенія для одной изъ вышеуказанныхъ функцій

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x)$$

или для функціи y, удовлетворяющей дифференціальному уравненію (6).

Но по замѣченному

$$\text{числ. знач. } f_0'(x)<\frac{2n^2L}{b-a}$$

и совершенно также убѣдимся, что

$$\text{числ. знач. } f_1'(x)<\frac{2n^2L}{a_{n+1}-a}<\frac{2n^2L}{b-a}$$

и

$$\text{числ. знач. } f_2'(x)<\frac{2n^2L}{b-a_0}<\frac{2n^2L}{b-a}.$$

А изъ уравненія (6) при

$$\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n}<x<\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n}$$

вытекаетъ неравенство

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2_{z=x}<\frac{n^2}{(x-a)(b-x)}L^2<\frac{4n^4}{(b-a)^2}L^2$$

и потому

$$\text{числ. знач. } \left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}<\frac{2n^2L}{b-a}.$$

Всѣ эти результаты показываютъ, что искомое нами наибольшее значеніе $f'(x)$ равно

$$\frac{2n^2L}{b-a}.$$

ЗАМѢТКИ ПО БУДДИЗМУ.

(*Продолженіе*) [1].

В. П. Васильева.

V.

Буддійскій пересказъ о женской хитрости.

Читано въ засѣданіи Историко-Филологическаго Отдѣленія 2 мая 1889 г.

5. Если мы, передавая (въ III-й замѣткѣ), по случаю угощенія б'икшу, предписанія, какъ они должны были благодарить хозяина и чего не говорить, замѣтили, что послѣднія фразы, должно быть, принадлежали народному обычаю въ Индіи, то и во множествѣ другихъ буддійскихъ легендъ нельзя не замѣтить, хотя бы, можетъ быть, нѣсколько и переиначенныхъ, народныхъ преданій.

Если мы находимъ въ буддизмѣ огромную литературу, какъ напр. «Перерожденія будды» (Чжатаки), «Море притчъ» и проч., старающуюся подтвердить его идеи сказаніемъ о происшествіяхъ въ небывалыя времена и даже во время мірозданія, то гдѣ искать начала или зародыша этихъ сказаній? Такъ какъ нельзя не признать, что первоначальная жизнь буддистовъ ограничивалась самыми простыми требованіями нищенства, развившимися впослѣдствіи въ огромный кодексъ, называемый сперва пратимокшей, а потомъ винаей (виная виб'анга и виная васту), то, если мы находимъ въ нихъ такое обращеніе къ объясненію настоящаго факта, потребовавшаго установленія предписанія или

[1]) См. Зап. Имп. Акад. Наукъ, т. LIX, кн. 2, стр. 49.