К Л А С С И К И
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

ФИЗИКА

АСТРОНОМИЯ

О Г И З
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва · 1948 · Ленинград

A. A. Markov

А. А. МАРКОВ

Selected Works

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

on

ПО

Theory of Continued Fractions

ТЕОРИИ
НЕПРЕРЫВНЫХ
ДРОБЕЙ

and

И

Theory of functions closest to the origin

ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ
ОТ НУЛЯ

*Биографический очерк
и примечания
Н. И. АХИЕЗЕРА*

О Г И З
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва · 1948 · Ленинград

Рассматривая теперь функции

$$\varphi_n\left(y, \frac{1}{2}\right), \quad \varphi_n(y, 0), \quad \varphi_n\left(y, -\frac{1}{2}\right),$$

которые, в силу наших условий, обращаются в

$$\cos(n \arccos y), \quad \frac{d^n (y^2-1)^n}{dy^n}, \quad \frac{\sin((n+1)\arccos y)}{\sqrt{1-y^2}},$$

мы можем заключить, что корни уравнения

$$\frac{d^n (y^2-1)^n}{dy^n} = 0$$

заключены по одному в следующих интервалах:

$$\left(\cos\frac{\pi}{2n}, \cos\frac{\pi}{n+1}\right), \quad \left(\cos\frac{3\pi}{2n}, \cos\frac{2\pi}{n+1}\right),$$
$$\left(\cos\frac{5\pi}{2n}, \cos\frac{3\pi}{n+1}\right), \ldots, \quad \left(\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}, \cos\frac{n\pi}{n+1}\right).$$

Эти интервалы более узкие, чем предыдущие.

Петербург, 17 ноября 1885 г.

5. ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

В настоящей статье мы будем рассматривать совокупность тех целых функций

$$f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \ldots + p_{n-1} z + p_n,$$

степень которых не превосходит данного целого числа n, а численные значения не превосходят другого данного числа L для всех значений переменной z, лежащих между данными пределами a и $b > a$.

Итак,

$$-L \leqslant f(z) \leqslant +L \quad \text{при} \quad a \leqslant z \leqslant b.$$

Спрашивается, какого предела не превосходит численное значение производной

$$f'(x) = np_0 x^{n-1} + (n-1) p_1 x^{n-2} + \ldots + 2p_{n-2} x + p_{n-1}$$

от $f(x)$ по x?

Такой вопрос поставлен Д. И. Менделеевым, при $n = 2$, в его сочинении «Исследование водных растворов по удельному весу» (§ 86).

Ответ зависит от того, насколько определено число x.

Мы различим два случая:

1) x — число данное,

2) x — произвольное число между a и b.

Соответственно этому рассмотрим две задачи.

Задача № 1. *Для данного числа x найти наибольшее численное значение $f'(x)$.*

Решение. Обозначим через y ту из рассматриваемых нами функций $f(z)$, для которой $f'(x)$ численно достигает наибольшего значения.

По условиям вопроса

$$-L \leqslant y \leqslant +L$$

для всех значений z, лежащих между a и b.

Из всех этих значений z обратим особое внимание на те, при которых y равняется $\pm L$.

Пусть в возрастающем порядке они будут

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_i, \ \alpha_{i+1}, \ \ldots, \ \alpha_s.$$

Обозначив через

$$y(\alpha_i)$$

значение y при $z = \alpha_i$, равное $\pm L$, заметим, что ряд $s-1$ отношений

$$\frac{y(\alpha_2)}{y(\alpha_1)}, \ \frac{y(\alpha_3)}{y(\alpha_2)}, \ \ldots, \ \frac{y(\alpha_s)}{y(\alpha_{s-1})}$$

должен содержать по крайней мере $n-1$ чисел, равных -1.

Действительно, в противном случае между целыми функциями $n-2$-й степени от z нетрудно найти бесчисленное множество таких, отношения которых к y при

$$z = \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_s$$

—числа отрицательные.

Если затем, умножив одну из них

$$\varphi(z)$$

на $(z-x)^2$ и на достаточно малое положительное число ε, произведение

$$\varepsilon(z-x)^2\varphi(z)$$

прибавим к y, то получим целую функцию

$$Y = y + \varepsilon(z-x)^2\varphi(z)$$

n-й степени от z и притом такую, что при $a \leqslant z \leqslant b$ численное значение $Y < L$ и при $z = x$

$$\frac{dY}{dz} = \frac{dy}{dz}.$$

Наконец, если умножим Y на отношение числа L к наибольшему численному значению Y при $a \leqslant z \leqslant b$, то полученная таким образом новая функция будет принадлежать к числу рассматриваемых нами функций $f(z)$ и при $z = x$ её производная численно больше $\frac{dy}{dz}$.

Итак, s не меньше n, и ряд отношений

$$\frac{y(\alpha_2)}{y(\alpha_1)}, \ \frac{y(\alpha_3)}{y(\alpha_2)}, \ \ldots, \ \frac{y(\alpha_s)}{y(\alpha_{s-1})} \tag{1}$$

содержит не менее $n-1$ чисел, равных -1.

Если -1 встречается n раз в ряду (1), то, как известно, y приводится к

$$\pm L \cos n \arccos \frac{2z-a-b}{b-a} = \pm f_0(z).$$

Вместе с тем имеем

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\pm nL}{\sqrt{(z-a)(b-z)}} \sin n \arccos \frac{2z-a-b}{b-a} = \pm f_0'(z).$$

Исследуем условия, при которых наибольшее численное значение $f'(x)$ действительно равно численному значению $f_0'(x)$.

Так как мы занимаемся численными значениями, то из всех функций $f(z)$ можем ограничиться только теми, для которых $f'(x)$ имеет одинаковый знак с $f_0'(x)$.

Положим для краткости

$$\frac{b-a}{2}\cos\frac{i\pi}{n} + \frac{b+a}{2} = \xi_{n-i} \quad \text{при} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

и

$$f(z) - f_0(z) = \varphi(z).$$

Рассматривая значение $f(z)$ и $f_0(z)$ при

$$z = \xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,$$

находим:

$$\begin{aligned} f_0(\xi_n) &= +L \quad \text{и потому} \quad \varphi(\xi_n) \leqslant 0,\\ f_0(\xi_{n-1}) &= -L \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \varphi(\xi_{n-1}) > 0,\\ f_0(\xi_{n-2}) &= +L \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \varphi(\xi_{n-2}) \leqslant 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_0(\xi_0) &= (-1)^n L \quad \text{и потому} \quad (-1)^n \varphi(\xi_0) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение

$$\varphi(z) = 0$$

должно иметь по одному корню между ξ_0 и ξ_1, между ξ_1 и $\xi_2, \ldots$, между ξ_{n-1} и ξ_n.

Иначе сказать, функция $\varphi(z)$ должна разлагаться на вещественные множители первой степени относительно z:

$$\varphi(z) = q(z-\eta_1)(z-\eta_2)\ldots(z-\eta_n),$$

причём

$$a = \xi_0 \leqslant \eta_1 \leqslant \xi_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_{n-1} \leqslant \eta_n \leqslant \xi_n = b.$$

Что касается коэффициента q, то он должен быть отрицательным.

Вместе с тем имеем

$$f'(x) = f'_0(x) + \left(\frac{1}{x-\eta_1} + \frac{1}{x-\eta_2} + \ldots + \frac{1}{x-\eta_n}\right)\varphi(x)$$

и

$$f'_0(x) = \frac{2^{2n-1}nL}{(b-a)^n}(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_{n-1}),$$

так как $f'_0(z)$ обращается в нуль при

$$z = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$$

и старший член целой функции $f_0(z)$ равен:

$$\frac{2^{2n-1}Lz^n}{(b-a)^n}.$$

Остановимся сначала на том случае, когда x лежит вне пределов a и b.

Тогда каждое из выражений

$$\frac{\varphi(x)}{x-\eta_1},\quad \frac{\varphi(x)}{x-\eta_2},\quad \ldots,\quad \frac{\varphi(x)}{x-\eta_n}$$

имеет знак, противоположный знаку $f'_0(x)$ и потому численное значение $f'(x) <$ численного значения $f'_0(x)$.

Итак, если x лежит вне пределов a и b, то наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению $f'_0(x)$.

Положим теперь, что x заключается между ξ_{i-1} и ξ_i. Тогда

$$\frac{\varphi(x)}{x-\eta_i} = q(x-\eta_1)(x-\eta_2)\ldots(x-\eta_{i-1})(x-\eta_{i+1})\ldots(x-\eta_n)$$

имеет знак, противоположный знаку $f'_0(x)$.

Остаётся рассмотреть знак суммы

$$\frac{x-\eta_i}{x-\eta_1} + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_2} + \ldots + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_{i-1}} + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_i} + \ldots + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_n} = \sum,$$

которую мы для краткости обозначаем одной буквой Σ.

У нас $f(z)$ означает какую угодно из целых функций n-й степени от z, удовлетворяющих условиям

$$-L \leqslant f(z) \leqslant +L \quad \text{при} \quad a \leqslant z \leqslant b$$

и

$$\frac{f'(x)}{f'_0(x)} > 0.$$

Поэтому числа

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_n$$

могут получать какие угодно значения, лишь бы только имели место неравенства

$$\xi_0 \leqslant \eta_1 \leqslant \xi_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_{n-1} \leqslant \eta_n \leqslant \xi_n$$

и коэффициент q численно был достаточно мал.

Приняв во внимание это замечание, нетрудно убедиться, что наименьшее (предельное) значение суммы Σ равно наименьшему из чисел

$$\frac{x-\xi_{i-1}}{x-\xi_0}+\frac{x-\xi_{i-1}}{x-\xi_1}+\ldots+\frac{x-\xi_{i-1}}{x-\xi_{n-1}}=$$
$$=(x-\xi_{i-1})\left\{\frac{f_0''(x)}{f_0'(x)}+\frac{1}{x-a}\right\}$$

и

$$\frac{x-\xi_i}{x-\xi_1}+\frac{x-\xi_i}{x-\xi_2}+\ldots+\frac{x-\xi_i}{x-\xi_n}=$$
$$=(x-\xi_i)\left\{\frac{f_0''(x)}{f_0'(x)}+\frac{1}{x-b}\right\}.$$

Если наименьшее значение Σ — число положительное, то и все значения Σ также числа положительные и знак выражения

$$\left(\frac{1}{x-\eta_1}+\frac{1}{x-\eta_2}+\ldots+\frac{1}{x-\eta_n}\right)\varphi(x)$$

противоположен знаку $f_0'(x)$; вместе с тем, конечно, численное значение $f'(x)<$ численного значения $f_0'(x)$.

Если же наименьшее значение Σ — число отрицательное, то неопределёнными числами

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_n$$

можно распорядиться так, что $f'(x)$ численно превзойдёт $f_0'(x)$.

Отсюда заключаем, что наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению $f_0'(x)$ тогда и только тогда, когда x лежит вне пределов a и b или

$$a<x<b,\quad \frac{f_0''(x)}{f_0'(x)}+\frac{1}{x-a}>0\quad \text{и}\quad \frac{f_0''(x)}{f_0'(x)}+\frac{1}{x-b}<0. \quad (2)$$

Вместо дробных выражений

$$\frac{f_0''(x)}{f_0'(x)}+\frac{1}{x-a}\quad \text{и}\quad \frac{f_0''(x)}{f_0'(x)}+\frac{1}{x-b}$$

можно рассматривать

$$(x-a)f_0''(x)+f_0'(x)\quad \text{и}\quad (x-b)f_0''(x)+f_0'(x),$$

так как, во-первых, при соблюдении неравенств (2) выражения

$$(x-a)f_0''(x)+f_0'(x)\quad \text{и}\quad (x-b)f_0''(x)+f_0'(x) \quad (3)$$

имеют одинаковые знаки и, во-вторых, наши неравенства (2) наверно имеют место, если знаки выражений (3) одинаковы и $a<x<b$.

Рассмотрев таким образом случай

$$y=f_0(z),$$

обратимся к другим.

Если y не равно $f_0(z)$, то по доказанному ряд отношений

$$\frac{y(\alpha_2)}{y(\alpha_1)},\ \frac{y(\alpha_3)}{y(\alpha_2)},\ \ldots,\ \frac{y(\alpha_s)}{y(\alpha_{s-1})} \quad (1)$$

содержит $n-1$ чисел, равных -1.

Вместе с тем $s=n$, и из двух разностей

$$\alpha_1-a,\quad b-\alpha_n$$

должна обращаться в нуль по крайней мере одна.

Возьмём одну из функций $f(z)$, удовлетворяющих нашим условиям.

Уравнение

$$f(z)-y=0$$

n-й или низшей степени относительно z имеет по одному корню между α_1 и α_2, между α_2 и α_3, ..., между α_{n-1} и α_n.

Иначе сказать, разность $f(z)-y$ должна разлагаться на вещественные множители первой степени относительно z:

$$f(z)-y=\psi(z)=(qz-r)(z-\eta_1)(z-\eta_2)\ldots(z-\eta_{n-1}),$$

причём

$$\alpha_1\leqslant\eta_1\leqslant\alpha_2\leqslant\eta_2\leqslant\ldots\leqslant\alpha_{n-1}\leqslant\eta_{n-1}\leqslant\alpha_n,$$
$$\frac{r}{q}\geqslant\alpha_n\quad \text{или}\quad \leqslant\alpha_1.$$

Вместе с тем имеем

$$f'(x) = \left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x} + \\ + \left\{\frac{1}{x-\eta_1} + \frac{1}{x-\eta_2} + \ldots + \frac{1}{x-\eta_{n-1}} + \frac{1}{x-\eta_n}\right\} \psi(x),$$

где $\eta_n = \frac{r}{q}$.

Нетрудно также убедиться, что знак разности

$$qz - r$$

противоположен знаку $y(\alpha_n)$ при всех значениях z, лежащих между α_1 и α_n.

При соблюдении указанных нами условий числам

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

можно давать какие угодно значения, лишь бы только числовая величина коэффициента q была достаточно мала.

Допустим сначала, что x больше α_n.

Тогда при $\eta_n > x$ имеют место неравенства

$$0 < \frac{1}{x-\eta_1} + \frac{1}{x-\eta_2} + \ldots + \frac{1}{x-\eta_{n-1}} < \\ < \frac{1}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{x-\alpha_n},$$

$$0 > \frac{1}{x-\eta_n} > -\infty,$$

и неопределённостью чисел

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

можно воспользоваться так, что выражение

$$\left\{\frac{1}{x-\eta_1} + \frac{1}{x-\eta_2} + \ldots + \frac{1}{x-\eta_n}\right\} \psi(x)$$

будет иметь какой угодно знак.

Следовательно, случай

$$x > \alpha_n$$

невозможен.

Совершенно так же докажем, что x не меньше α_1.

Положим затем, что x заключается между α_i и α_{i+1}.

Тогда знак

$$\frac{\psi(x)}{x-\eta_i}$$

противоположен знаку

$$(-1)^{n-i-1} y(\alpha_n),$$

и для того, чтобы $f'(x)$ по числовой величине было меньше $\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}$, знак суммы

$$\frac{x-\eta_i}{x-\eta_1} + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_2} + \ldots + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_i} + \ldots + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_n}$$

должен быть одинаков со знаком

$$(-1)^{n-i-1} y(\alpha_n) \left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}.$$

А выражение

$$(-1)^{n-i-1} y(\alpha_n) \left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}$$

— число положительное, так как знак

$$(-1)^{n-i-1} y(\alpha_n)$$

одинаков со знаком $y(\alpha_{i+1})$ и со знаком $\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}$.

С другой стороны, нетрудно убедиться, что наименьшее значение суммы

$$\frac{x-\eta_i}{x-\eta_1} + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_2} + \ldots + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_{i-1}} + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_i} + \ldots + \\ + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_{n-1}} + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_n}$$

равно наименьшему из чисел

$$(x-\alpha_i) \left\{\frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{x-\alpha_i} + \ldots + \\ + \frac{1}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{1}{x-\alpha_n}\right\},$$

$$(x-\alpha_{i+1}) \left\{\frac{1}{x-\alpha_2} + \frac{1}{x-\alpha_3} + \ldots + \frac{1}{x-\alpha_{i+1}} + \ldots + \\ + \frac{1}{x-\alpha_n} + \frac{1}{x-\alpha_1}\right\}$$

и потому не может быть ни больше, ни меньше нуля.

Таким образом, мы приходим к следующему условию:

$$\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{x-\alpha_{n-1}}+\frac{1}{x-\alpha_n}=0. \qquad (4)$$

Наши рассуждения показывают также, что за исключением одного случая, когда одновременно

$$n=2, \quad \alpha_1=a, \quad \alpha_n=b, \quad x=\frac{a+b}{2},$$

производная $f'(x)$ достигает своего наибольшего численного значения только для двух функций $f(z)$ и эти последние отличаются друг от друга только знаком.

Если же

$$n=2 \quad \text{и} \quad x=\frac{a+b}{2},$$

то наибольшее численное значение $f'(x)$ равно $\frac{2L}{b-a}$ и соответствует бесчисленному множеству различных функций $f(z)$: именно, всем функциям вида

$$L\left\{\frac{2z-a-b}{b-a}+q(z-a)(z-b)\right\}$$

при

$$-\frac{2}{(b-a)^2}<q<\frac{2}{(b-a)^2}.$$

Вспомним, что из двух разностей

$$\alpha_1-a, \quad b-\alpha_n$$

одна по крайней мере обращается в нуль, и соответственно этому различим три случая:

1) $\alpha_1=a$, $\alpha_n<b$; 2) $\alpha_1>a$, $\alpha_n=b$; 3) $\alpha_1=a$, $\alpha_n=b$.

Если

$$\alpha_1=a \quad \text{и} \quad \alpha_n<b,$$

то к числам

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

можно прибавить ещё некоторое число

$$\alpha_{n+1},$$

которое больше b и удовлетворяет условию

$$y(\alpha_{n+1})=-y(\alpha_n),$$

так как при непрерывном возрастании z от α_n до $+\infty$ отношение

$$\frac{-y}{y(\alpha_n)}$$

также постоянно возрастает от -1 до $+\infty$.

Вместе с тем имеем:

$$y=\pm L\cos n\arccos\frac{2z-a-\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}-a}=\pm f_1(z).$$

Неизвестное α_{n+1}, согласно условию (4), должно удовлетворять уравнению

$$\sum\frac{1}{x-\frac{a+\alpha_{n+1}}{2}-\frac{\alpha_{n+1}-a}{2}\cos\frac{i\pi}{n}}=0,$$

т. е.

$$\frac{f_1''(x)}{f_1'(x)}+\frac{1}{x-a}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и, кроме того, неравенствам

$$\alpha_{n+1}>b>\frac{a+\alpha_{n+1}}{2}+\frac{\alpha_{n+1}-a}{2}\cos\frac{\pi}{n},$$

отсюда

$$\frac{b-a\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}>\alpha_{n+1}>b.$$

Следовательно, для того чтобы случай

$$\alpha_1=a, \quad \alpha_n<b$$

действительно имел место, одно из значений α_{n+1}, удовлетворяющих уравнению

$$(x-a)f_1''(x)+f_1'(x)=0, \tag{5}$$

должно заключаться между

$$\frac{b-a\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}} \quad \text{и} \quad b,$$

и только одно, так как в противном случае искомое нами наибольшее значение $f'(x)$ соответствовало бы нескольким различным функциям $f(z)$, а предыдущие рассуждения показывают невозможность этого.

Рассматривая затем сумму

$$\sum \frac{1}{x-\frac{a+\alpha_{n+1}}{2}-\frac{\alpha_{n+1}-a}{2}\cos\frac{i\pi}{n}}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

как функцию от α_{n+1}, замечаем, что при непрерывном возрастании α_{n+1} эта функция постоянно возрастает, за исключением тех значений α_{n+1}, при которых она обращается в ∞.

Поэтому уравнение (5) не может иметь кратных корней.

Отсюда уже нетрудно заключить, что случай

$$\alpha_1=a, \quad \alpha_n<b$$

имеет место тогда и только тогда, когда при переходе α_{n+1} от b до $\dfrac{b-a\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}$ выражение

$$(x-a)f_1''(x)+f_1'(x)$$

меняет свой знак.

Заметим ещё, что при $\alpha_{n+1}=b$ выражение

$$(x-a)f_1''(x)+f_1'(x)$$

обращается в

$$(x-a)f_0''(x)+f_0'(x).$$

Совершенно так же, введя новое переменное число α_0 и положив

$$L\cos n\arccos\frac{2z-\alpha_0-b}{b-\alpha_0}=f_2(z),$$

убедимся, что случай

$$\alpha_1>a, \quad \alpha_n=b$$

имеет место тогда и только тогда, когда при переходе α_0 от $\dfrac{a-b\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}$ до a выражение $(x-b)f_2''(x)+f_2'(x)$ меняет свой знак.

Тогда

$$y=\pm f_2(z),$$

причём α_0 должно удовлетворять уравнению

$$(x-b)f_2''(x)+f_2'(x)=0$$

и неравенствам

$$\alpha_0<a<\frac{\alpha_0+b}{2}+\frac{b-\alpha_0}{2}\cos\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Обратимся к случаю

$$\alpha_1=a, \quad \alpha_n=b,$$

который имеет место тогда и только тогда, когда не может иметь места ни один из предыдущих случаев.

Если

$$\alpha_1=a \quad \text{и} \quad \alpha_n=b,$$

то уравнение

$$\frac{dy}{dz}=0$$

$n-1$-й степени относительно z имеет $n-2$ корня

$$\alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}$$

между a и b и один корень вне этих пределов.

Обозначим этот последний буквой β и предположим для определённости $\beta > b$.

В таком случае численное значение y, при возрастании z от b до β, возрастает, а при дальнейшем возрастании z сначала убывает до нуля и затем возрастает беспредельно.

Вместе с тем, конечно, уравнение

$$y^2 - L^2 = 0$$

$2n$-й степени относительно z имеет, кроме $n-2$ двукратных корней

$$\alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}$$

и двух простых

$$a,\ b,$$

ещё два корня, которые мы обозначим буквами

$$\gamma \text{ и } \delta.$$

Эти последние два корня больше β.

Следовательно,

$$y^2 - L^2 =$$
$$= p_0^2(z-\alpha_2)^2(z-\alpha_3)^2\ldots(z-\alpha_{n-1})^2(z-a)(z-b)(z-\gamma)(z-\delta)$$

и

$$\frac{dy}{dz} = np_0(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\ldots(z-\alpha_{n-1})(z-\beta),$$

откуда выводим дифференциальное уравнение первого порядка

$$y^2 - L^2 = \frac{(z-a)(z-b)(z-\gamma)(z-\delta)}{n^2(z-\beta)^2}\left(\frac{dy}{dz}\right)^2. \tag{6}$$

Е. И. Золотарёв в своей статье «Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля» выразил решение последнего уравнения посредством эллиптических функций.

Не останавливаясь на формулах Е. И. Золотарёва, покажем, каким образом можно свести нашу задачу к трём алгебраическим уравнениям.

Для этой цели из уравнения (6) посредством дифференцирования выводим:

$$n^2(z-\beta)^3 y = (z-a)(z-b)(z-\gamma)(z-\delta)(z-\beta)y'' +$$
$$+\frac{1}{2}(z-a)(z-b)(z-\gamma)(z-\delta)(z-\beta)\left\{\frac{1}{z-a}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{1}{z-\delta}-\frac{2}{z-\beta}\right\}y'. \tag{7}$$

Полагая затем

$$y = p_0(z-\beta)^n + p_1'(z-\beta)^{n-1} + \ldots + p_{n-2}'(z-\beta)^2 + p_n',$$

располагаем обе части уравнения (7) по степеням $z-\beta$ и посредством сравнения коэффициентов приходим к системе $n+1$ уравнений с $n+2$ неизвестными

$$\frac{p_1'}{p_0},\ \frac{p_2'}{p_0},\ \ldots,\ \frac{p_{n-2}'}{p_0},\ \frac{p_n'}{p_0},\ \beta,\ \gamma,\ \delta.$$

Из этих уравнений нетрудно вывести выражения неизвестных

$$\frac{p_1'}{p_0},\ \frac{p_2'}{p_0},\ \ldots,\ \frac{p_{n-2}'}{p_0},\ \frac{p_n'}{p_0},$$

которые входят в них линейным образом через остальные три

$$\beta,\ \gamma,\ \delta.$$

Исключая

$$\frac{p_1'}{p_0},\ \frac{p_2'}{p_0},\ \ldots,\ \frac{p_{n-2}'}{p_0},\ \frac{p_n'}{p_0},$$

приходим к двум алгебраическим уравнениям с неизвестными

$$\beta,\ \gamma,\ \delta.$$

А условие (4) даёт ещё третье уравнение

$$\left(\frac{y''}{y'}\right)_{z=x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-\beta} = 0. \tag{8}$$

Что же касается коэффициента p_0, то он определяется из условия

$$y(a) = \pm L.$$

К этим же результатам придём и в том случае, когда β меньше a; только при $\beta < a$ числа γ и δ должны быть меньше β.

Для дальнейшего важно заметить, что во всяком случае выражение

$$\frac{(z-\gamma)(z-\delta)}{(z-\beta)^2}$$

больше единицы при всех значениях z, лежащих между a и b.

Покажем ещё, что уравнение (6) можно заменить двумя линейными дифференциальными уравнениями первого порядка с двумя неизвестными целыми функциями.

При этом для определённости будем считать

$$y(a) = L, \quad a < b < \beta < \gamma < \delta.$$

Пусть n — число чётное. Тогда, обозначив произведения

$$(z-\alpha_2)(z-\alpha_4)\ldots(z-\alpha_{n-2})$$

и

$$(z-\alpha_3)(z-\alpha_5)\ldots(z-\alpha_{n-1})$$

соответственно буквами

$$U \text{ и } V,$$

выводим

$$y - L = p_0(z-a)(z-\delta)V^2,$$

$$y + L = p_0(z-b)(z-\gamma)U^2,$$

$$y' = p_0\{2(z-a)(z-\delta)V' + (2z-a-\delta)V\}V =$$

$$= p_0\{2(z-b)(z-\gamma)U' + (2z-b-\gamma)U\}U =$$

$$= np_0(z-\beta)UV$$

и таким образом приходим к желаемым двум линейным дифференциальным уравнениям первого порядка

$$2(z-a)(z-\delta)V' + (2z-a-\delta)V = n(z-\beta)U,$$

$$2(z-b)(z-\gamma)U' + (2z-b-\gamma)U = n(z-\beta)V .$$

Подобным же образом при n нечётном, обозначив произведения

$$(z-\alpha_2)(z-\alpha_4)\ldots(z-\alpha_{n-1})$$

и

$$(z-\alpha_3)(z-\alpha_5)\ldots(z-\alpha_{n-2})$$

соответственно буквами

$$U \text{ и } V,$$

приходим к уравнениям

$$2(z-a)(z-b)(z-\gamma)V' + \{3z^2 - 2(a+b+\gamma)z + $$

$$+ ab + a\gamma + b\gamma\}V = n(z-\beta)U,$$

$$2(z-\delta)U' + U = n(z-\beta)V.$$

Примеры

1. $n = 2$. В этом случае

$$f_0(z) = \frac{L}{(b-a)^2}\left\{8(z-a)(z-b) + (b-a)^2\right\},$$

$$f_0'(z) = \frac{8L}{(b-a)^2}(2z-a-b), \quad f_0''(z) = \frac{16L}{(b-a)^2}.$$

$$(x-a)f_0''(x) + f_0'(x) = \frac{8L}{(b-a)^2}(4x-3a-b),$$

$$(x-b)f_0''(x) + f_0'(x) = \frac{8L}{(b-a)^2}(4x-3b-a).$$

Следовательно,

$$\text{при } x > \frac{3b+a}{4} \quad \text{и при} \quad x < \frac{3a+b}{4}$$

наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению

$$f_0'(x) = \frac{8L}{(b-a)^2}(2x-a-b).$$

Обращаясь затем к функциям $f_1(z)$ и $f_2(z)$, находим

$$f_1(z) = \frac{L}{(\alpha_3-a)^2}\{8(z-a)(z-\alpha_3) + (\alpha_3-a)^2\},$$

$$(x-a)f_1''(x) + f_1'(x) = \frac{8L}{(\alpha_3-a)^2}(4x-3a-\alpha_3),$$

$$f_2(z) = \frac{L}{(b-\alpha_0)^2}\{8(z-\alpha_0)(z-b) + (b-\alpha_0)^2\},$$

$$(x-b)f_2''(x) + f_2'(x) = \frac{8L}{(b-\alpha_0)^2}(4x-3b-\alpha_0),$$

$$\alpha_3 = 4x-3a, \quad \alpha_0 = 4x-3b$$

и отсюда заключаем, что наибольшее численное значение $f'(x)$ при $\frac{3a+b}{4} < x < \frac{a+b}{2}$ равно $\frac{-8L}{(\alpha_3-a)^2}(2x-\alpha_3-a) = \frac{L}{x-a}$, а при $\frac{a+b}{2} < x < \frac{3b+a}{4}$ равно

$$\frac{8L}{(b-\alpha_0)^2}(2x-\alpha_0-b) = \frac{L}{b-x}.$$

Что же касается функции y, определяемой дифференциальным уравнением (6), то при $n=2$ она не играет в нашем вопросе никакой роли.

II. $n=3$.

Полагая для упрощения результатов

$$a=-1 \quad \text{и} \quad b=+1,$$

находим:

$$f_0(z)=L(4z^3-3z), \quad f_0'(z)=3L(4z^2-1), \quad f_0''(z)=24Lz,$$

$$(x-a)f_0''(x)+f_0'(x)=3L(12x^2+8x-1)=$$
$$=36L(x-\omega_1)(x-\omega_2),$$

$$(x-b)f_0''(x)+f_0'(x)=3L(12x^2-8x-1)=$$
$$=36L(x-\omega')(x-\omega''),$$

где

$$\omega_1=\frac{-2-\sqrt{7}}{6}<\omega'=\frac{2-\sqrt{7}}{6}<\omega_2=$$
$$=\frac{-2+\sqrt{7}}{6}<\omega''=\frac{2+\sqrt{7}}{6}.$$

Следовательно, при $x<\omega_1$, при $\omega'<x<\omega_2$ и при $x>\omega''$ наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению $f_0'(x)=3L(4x^2-1)$.

Обращаясь затем к функциям $f_1(z)$ и $f_2(z)$, находим:

$$f_1(z)=L\left\{4\left(\frac{2z+1-\alpha_4}{\alpha_4+1}\right)^3-3\,\frac{2z+1-\alpha_4}{\alpha_4+1}\right\},$$

$$(x-a)f_1''(x)+f_1'(x)=$$
$$=\frac{6L}{(\alpha_4+1)^3}\{16(2x+1-\alpha_4)(x+1)+$$
$$+4(2x+1-\alpha_4)^2-(\alpha_4+1)^2\},$$

$$f_2(z)=L\left\{4\left(\frac{2z-1-\alpha_0}{1-\alpha_0}\right)^3-3\,\frac{2z-1-\alpha_0}{1-\alpha_0}\right\},$$

$$(x-b)f_2''(x)+f_2'(x)=$$
$$=\frac{6L}{(1-\alpha_0)^3}\{16(2x-1-\alpha_0)(x-1)+$$
$$+4(2x-1-\alpha_0)^2-(1-\alpha_0)^2\}.$$

Выражение

$$16(2x+1-\alpha_4)(x+1)+4(2x+1-\alpha_4)^2-(\alpha_4+1)^2$$

при $\alpha_4=1$ обращается в

$$48x^2+32x-4=48(x-\omega_1)(x-\omega_2),$$

а при $\alpha_4=\dfrac{1+\sin^2\frac{\pi}{6}}{\cos^2\frac{\pi}{6}}=\dfrac{5}{3}$ оно обращается в

$$32\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+1)+16\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{64}{9}=$$
$$=48x^2+\frac{32}{3}x-16=48(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2),$$

где

$$\varepsilon_1=\frac{-1-\sqrt{28}}{9} \quad \text{и} \quad \varepsilon_2=\frac{-1+\sqrt{28}}{9}.$$

Отсюда заключаем, что наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению $f_1'(x)$ в тех случаях, когда $\omega_1<x<\varepsilon_1$ или $\omega_2<x<\varepsilon_2$.

При этом число α_4 должно быть определено из уравнения

$$16(2x+1-\alpha_4)(x+1)+4(2x+1-\alpha_4)^2-(1+\alpha_4)^2=0.$$

Чтобы придать выражению $f_1'(x)$ возможно простой вид, положим

$$\alpha_4=-1+\xi \quad \text{и} \quad x+1=t.$$

Тогда

$$f_1'(x)=-tf_1''(x),$$

$$f_1''(x)=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 2^2(2t-\xi)}{\xi^3}L=96\left\{2\left(\frac{t}{\xi}\right)^3-\left(\frac{t}{\xi}\right)^2\right\}\frac{L}{t^2},$$

$$48t^2-32t\xi+3\xi^2=0, \quad \frac{t}{\xi}=\frac{4\pm\sqrt{7}}{12},$$

$$2\left(\frac{t}{\xi}\right)^3-\left(\frac{t}{\xi}\right)^2=\frac{10\pm 7\sqrt{7}}{144\cdot 6},$$

$$f_1'(x)=-\frac{10\pm 7\sqrt{7}}{9}\,\frac{L}{x+1}.$$

Из двух знаков $\pm$ при $\sqrt{7}$ надо остановиться на том, при котором

$$\alpha_4=-1+\frac{12}{4\pm\sqrt{7}}(x+1)$$

заключается между 1 и $\frac{5}{3}$.

А неравенства

$$\frac{5}{3}>\alpha_4>1$$

равносильны таким:

$$\frac{-1\pm\sqrt{28}}{9}>x>\frac{-2\pm\sqrt{7}}{6}.$$

Сопоставляя последние неравенства с найденными раньше

$$\omega_1<x<\varepsilon_1 \quad \text{или} \quad \omega_2<x<\varepsilon_2,$$

видим, что наибольшее численное значение $f'(x)$ при $\omega_1<x<\varepsilon_1$ равно $\frac{7\sqrt{7}-10}{9}\,\frac{L}{x+1}$, а при $\omega_2<x<\varepsilon_2$ равно $\frac{7\sqrt{7}+10}{9}\,\frac{L}{x+1}$.

Совершенно так же, полагая

$$\frac{1-\sqrt{28}}{9}=\varepsilon' \quad \text{и} \quad \frac{1+\sqrt{28}}{9}=\varepsilon'',$$

убеждаемся, что наибольшее численное значение $f'(x)$ при $\varepsilon''<x<\omega''$ равно $\frac{7\sqrt{7}-10}{9}\,\frac{L}{1-x}$, а при $\varepsilon_1<x<\omega'$ равно $\frac{7\sqrt{7}+10}{9}\,\frac{L}{1-x}$.

Если же x заключается между ε_1 и ε' или между ε_2 и ε'', то наибольшее численное значение $f'(x)$ соответствует той функции y, которая определяется уравнениями (6) и (8) при $n=3$, $a=-1$, $b=+1$.

В нашем примере дифференциальное уравнение (6) можно заменить двумя равенствами:

$$y-L=p_0(z^2-1)(z-\gamma),$$
$$y+L=p_0(z-\alpha_2)^2(z-\delta),$$

откуда затем выводим

$$\gamma=\delta+2\alpha_2, \quad -1=\alpha_2^2+2\alpha_2\delta, \quad -2L=p_0(\alpha_2^2\delta+\gamma),$$

$$\delta=-\frac{1+\alpha_2^2}{2\alpha_2}, \quad \gamma=\frac{3\alpha_2^2-1}{2\alpha_2}, \quad p_0=\frac{4\alpha_2L}{(1-\alpha_2^2)^2}.$$

А уравнение (8) обращается в следующее:

$$\frac{1}{x-\alpha_2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=0.$$

Следовательно,

$$x-\alpha_2=\frac{1-x^2}{2x},\quad \alpha_2=\frac{3x^2-1}{2x},$$

$$1-\alpha_2=\frac{1+2x-3x^2}{2x}=\frac{(1-x)(1+3x)}{2x},$$

$$1-\gamma=\frac{(1-\alpha_2)(1+3\alpha_2)}{2\alpha_2},$$

$$1+\alpha_2=\frac{3x^2+2x-1}{2x}=\frac{(1+x)(3x-1)}{2x},$$

$$1+\gamma=\frac{(1+\alpha_2)(3\alpha_2-1)}{3\alpha_2},$$

$$1+3\alpha_2=\frac{9x^2+2x-3}{2x}=\frac{9(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)}{2x},$$

$$3\alpha_2-1=\frac{9x^2-2x-3}{2x}=\frac{9(x-\varepsilon')(x-\varepsilon'')}{2x},$$

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}=\frac{4\alpha_2 L}{(1-\alpha_2^2)^2}\left\{3x^2-\frac{3\alpha_2^2-1}{\alpha_2}x-1\right\}=$$

$$=\frac{4(x-\alpha_2)(3x\alpha_2+1)}{(1-\alpha_2^2)^2}L=-\frac{16x^3L}{(1-9x^2)(1-x^2)}.$$

Теперь уже нетрудно убедиться, что при $\varepsilon_1<x<\varepsilon'$ и при $\varepsilon_2<x<\varepsilon''$ составленная нами функция y удовлетворяет всем вышеуказанным условиям и наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению

$$\frac{16x^3L}{(1-9x^2)(1-x^2)}.$$

Задача № 2. *Найти наибольшее численное значение $f'(x)$ для всех x, лежащих между a и b.*

Решение. Решая предыдущую задачу, мы нашли все те функции $f(z)$, для которых $f'(x)$ численно достигает своего наибольшего значения.

Один из наших результатов состоит в том, что при

$$\frac{(x-b)f_0''(x)+f_0'(x)}{(x-a)f_0''(x)+f_0'(x)}>0$$

наибольшее численное значение $f'(x)$ равно

$$\text{числ. знач.}\, f_0'(x)=\text{числ. знач.}\,\frac{nL\sin n\arccos\dfrac{2x-a-b}{b-a}}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

Положив затем

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\varphi,$$

находим:

$$f_0(x)=L\cos n\varphi,\quad f_0'(x)=\frac{2nL\sin n\varphi}{(b-a)\sin\varphi},$$

$$f_0''(x)=\frac{4nL\{\sin n\varphi\cos\varphi-n\cos n\varphi\sin\varphi\}}{(b-a)^2\sin^3\varphi},$$

$$\frac{(x-b)f_0''(x)+f_0'(x)}{(x-a)f_0''(x)+f_0'(x)}=\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\,\frac{\sin n\varphi+n\cos n\varphi\sin\varphi}{\sin n\varphi-n\cos n\varphi\sin\varphi}.$$

Если $0<\varphi<\frac{\pi}{2n}$ или $\pi>\varphi>\pi-\frac{\pi}{2n}$, то

$$\text{числ. знач. }\sin n\varphi>\text{числ. знач. }n\cos n\varphi\sin\varphi$$

и

$$\frac{(x-b)f_0''(x)+f_0'(x)}{(x-a)f_0''(x)+f_0'(x)}>0.$$

С другой стороны, из формулы

$$f_0'(x)=\frac{2nL\sin n\varphi}{(b-a)\sin\varphi}$$

видно, что при $a \leqslant x \leqslant b$ наибольшее численное значение $f_0'(x)$ равно

$$\frac{2n^2L}{b-a}$$

и соответствует $x=a$ и $x=b$.

Поэтому для всех значений x, лежащих между a и $\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n}$ или между $\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n}$ и b, наибольшее численное значение $f'(x)$ равно:

$$\frac{2n^2L}{b-a}.$$

Положим теперь, что x заключается между

$$\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n} \quad \text{и} \quad \frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n}.$$

В таком случае

$$(x-a)(b-x)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(\frac{b+a}{2}-x\right)^2>$$
$$>\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\sin^2\frac{\pi}{2n}>\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\frac{1}{n^2}.$$

Производная $f'(x)$ достигает численно своего наибольшего значения для одной из вышеуказанных функций

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x)$$

или для функции y, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (6).

Но по замеченному

$$\text{числ. знач. } f_0'(x)<\frac{2n^2L}{b-a},$$

и совершенно так же убедимся, что

$$\text{числ. знач. } f_1'(x)<\frac{2n^2L}{\alpha_{n+1}-a}<\frac{2n^2L}{b-a}$$

и

$$\text{числ. знач. } f_2'(x)<\frac{2n^2L}{b-\alpha_0}<\frac{2n^2L}{b-a}.$$

А из уравнения (6) при

$$\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n}<x<\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi}{2n}$$

вытекает неравенство

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2_{z=x}<\frac{n^2}{(x-a)(b-x)}L^2<\frac{4n^4}{(b-a)^2}L^2$$

и потому

$$\text{числ. знач.}\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}<\frac{2n^2L}{b-a}.$$

Все эти результаты показывают, что искомое нами наибольшее значение $f'(x)$ равно

$$\frac{2n^2L}{b-a}.$$

так что

$$\sigma(y, \xi) = \ln \frac{1}{1-y^2},$$

то и получится, что отрицательные корни

$$x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

полинома Лежандра удовлетворяют неравенствам

$$-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} < x_k < -\cos\frac{k\pi}{n+1} \quad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right),$$

указанным в статье А. Маркова.

К статье 5 «Об одном вопросе Д. И. Менделеева»

Статья была напечатана в Известиях Петербургской Академии наук за 1889 г. (т. 62, стр. 1—24).

Теорема А. А. Маркова обобщена его братом В. А. Марковым, который в своей работе «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля» (Петербург, 1892) доказал следующее предложение: *Если $P(x)$ — вещественный многочлен степени n, то*

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant +1} \left| \frac{d^k}{dx^k} P(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \frac{n^2(n^2-1)(n^2-2^2)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{(k+1)\ldots 2k} \max_{-1 \leqslant x \leqslant +1} |P(x)|,$$

причём знак = имеет место в том и только в том случае, когда

$$P(x) = AT_n(x) = A\cos n \arccos x.$$

Простое доказательство теоремы В. А. Маркова принадлежит С. Н. Бернштейну *).

В другом направлении теорему А. А. Маркова обобщал И. Шур **). Вот два из результатов Шура:

*) С. Н. Бернштейн, О теореме В. А. Маркова (Труды Ленинградского индустриального института, 1938, стр. 8—12).

**) I. Schur, Über das Maximum des absoluten Betrages eines Polynoms in einem gegebenen Intervalle (Math. Zeitschr., Bd. 4, 1919, стр. 271—287).

1°. *Если $P(x)$ — полином степени n и*

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| = M,$$

то

$$|P'(\pm 1)| \leqslant Mn^2,$$

причём знак = исключается, если $P(x) \neq AT_n(x)$. Далее, если $|P'(x)|$ имеет относительный максимум во внутренней точке ξ интервала $(-1, 1)$, то при $n \geqslant 3$

$$|P'(\xi)| < \frac{1}{2} Mn^2.$$

2°. *Если $P(x)$ — полином степени n, обращающийся в нуль на одном из концов интервала $[-1, 1]$, то*

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P'(x)| \leqslant n^2 \cos^2\frac{\pi}{4n} \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)|.$$

К неравенству А. А. Маркова примыкают неравенства С. Н. Бернштейна, основное из которых относится к 1912 г. и гласит: *Если $S(\theta)$ есть тригонометрическая сумма порядка n, т. е.*

$$S(\theta) = a_0 + a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + a_2\cos 2\theta + b_2\sin 2\theta + \ldots$$
$$\ldots + a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta,$$

то

$$\max|S'(\theta)| \leqslant n \max|S(\theta)|,$$

причём знак = имеет место только в том случае, когда

$$S(\theta) = a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta.$$

Различные дальнейшие неравенства, относящиеся к полиномам, тригонометрическим суммам и некоторым другим классам целых трансцендентных функций, читатель найдёт в монографии С. Н. Бернштейна «Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной» (часть первая, М — Л., 1937).

К статье 6 «О функциях, получаемых при обращении рядов в непрерывные дроби»

Впервые статья была напечатана в Записках Петербургской Академии наук за 1894 г. (том LXXIV, № 2).

В 1940 г. появился английский перевод этой статьи, сделанный Я. Шохатом (J. Shohat) (См. Duke, Mathematical Journal, Vol. 7).