

Tokoku Math. J., Vol. 6
1914, pp. 42-43

Zwei kleine Bemerkungen,

VON

JULIUS PÁL in Székelyudvarhely, Ungarn.

(Aus einem an T. Hayashi gerichteten Briefe)

.....
Vielleicht interessiren Sie zwei kleine Bemerkungen zu dem Gegenstand meiner Note.

I. Es sei $0 < a < 1$ und es sei für $|x| \leq a$ eine stetige Funktion $f(x)$ gegeben, welche im Nullpunkt verschwindet: $f(0) = 0$. Wird dann ε beliebig angegeben, so gibt es ein Polynom $P(x)$, für welches

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

ist und dessen sämtliche Koeffizienten ganze Zahlen sind.

In der That: ich wähle ein n so, dass $a^{n+1} + \dots + a^{n+k} + \dots < \frac{\varepsilon}{2}$ sei; hiernauf ein Polynom, das $f(x)$ mit der Genauigkeit $\frac{\varepsilon}{2}$ approximirt und deren Anfangskoeffizienten $= 0$ sind bis zu x^{n+1} ; also ist

$$\left| f(x) - (a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_{n+k}x^{n+k}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jetzt ersetze ich a_{n+i} durch die in ihr enthaltene, grösste ganze Zahl und habe

$$P(x) = [a_{n+1}]x^{n+1} + \dots + [a_{n+k}]x^{n+k}.$$

Der Satz ist für das Intervall $(-1, +1)$ nicht zu retten (z. B. $f(x) = \frac{x}{2}$).

II. Herr Fekete-Budapest fand folgende hübsche Bemerkung: Es gibt eine Potenzreihe mit numerischen, fixen Koeffizienten

$$a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots, \quad (\mu)$$

die im Intervall $(-1, +1)$ sämtliche, in Nullpunkt verschwindende Funktionen darstelle. D. h. wird $f(x)$ als stetige Funktion angegeben und ist $f(0) = 0$, so gibt es Indices $n_1, n_2, \dots, n_r, \dots$ (die Folge dieser hängt freilich von $f(x)$ ab), so dass für die fixe Potenzreihe (μ)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_{n_r}(x) = f(x)$$

ist und zwar gleichmässig.

Beweis: man nehme alle Polynome mit rationalen Koeffizienten; ihre Folge ist abzählbar; diese sei $A_1(x), A_2(x), \dots$. Sei nun $P_1(x) = A_1(x)$; $P_2(x)$ werde so bestimmt, dass es $A_2(x)$ mit der Genauigkeit $\frac{1}{2}$ approximire und $P_2(x)$ beginne mit $P_1(x)$; $P_3(x)$ werde so bestimmt, dass es $A_3(x)$ mit $\frac{1}{3}$ approximire und es beginne mit $P_2(x)$. Dann sind $P_1(x), P_2(x), \dots$ die Abschnitte einer Potenzreihe mit der gewünschten Eigenschaft.