Acta Math. 41 (1918), 71–98.

ÜBER LINEARE FUNKTIONALGLEICHUNGEN.

Von

FRIEDRICH RIESZ

in KOLOZSVÁR.

Die vorliegende Arbeit behandelt das Umkehrproblem für eine gewisse Klasse von linearen Transformationen stetiger Funktionen, nebst Anwendung auf die FREDHOLM'sche Integralgleichung. Dabei kommt es uns weniger auf neue Resultate an, als auf die Erprobung einer äusserst elementaren Methode. Zu Grunde gelegt werden einige in § 1. entwickelte Sätze über lineare Funktionalmannigfaltigkeiten, die fast unmittelbar aus der Definition der gleichmässigen Konvergenz fliessen. Die wesentlichsten Beweise sind eine Art von Endlichkeitsbeweisen, indem nämlich gezeigt wird, dass gewisse Prozesse sich nicht ins Unendliche fortsetzen lassen, sondern notwendig abbrechen. Der wichtigste Begriff, der hiebei zur Verwendung kommt, ist der von Herrn FRÉCHET in die allgemeine Mengenlehre eingeführte Begriff der kompakten Menge (hier spezieller kompakte Folge), der sich in verschiedenen Zweigen der Analysis ganz besonders bewährt hat. Dieser Begriff gestattet eine besonders einfache und glückliche Formulierung der Definition der vollstetigen Transformation, die im wesentlichen einer ähnlichen Begriffsbildung von Herrn HILBERT für Funktionen von unendlich vielen Veränderlichen nachgebildet ist.

Die in der Arbeit gemachte Einschränkung auf stetige Funktionen ist nicht von Belang. Der in den neueren Untersuchungen über diverse Funktionalräume bewanderte Leser wird die allgemeinere Verwendbarkeit der Methode sofort erkennen; er wird auch bemerken, dass gewisse unter diesen, so die Gesamtheit der quadratisch integrierbaren Funktionen und der HILBERT'sche Raum von unendlich vielen Dimensionen noch Vereinfachungen gestatten, während der hier behandelte scheinbar einfachere Fall als Prüfstein für die allgemeine Verwendbarkeit betrachtet werden darf.

§ 1. Definitionen und Hilfssätze.

Den folgenden Betrachtungen legen wir die Gesamtheit der auf der Strecke $a \leq x \leq b$ erklärten, daselbst überall stetigen Funktionen $f(x)$ zu Grunde. Die Veränderliche x wird also für reell vorausgesetzt, dagegen sind als Funktionswerte auch komplexe gestattet. Doch will ich sofort betonen, dass unsere Entwickelungen auch für die engere Gesamtheit der reellen Funktionen ohne Weiteres gelten.

Die zu Grunde gelegte Gesamtheit werden wir der Kürze halber als *Funktionalraum* bezeichnen. Ferner nennen wir *Norm* von $f(x)$ und bezeichnen mit $\|f\|$ den Maximalwert von $|f(x)|$; die Grösse $\|f\|$ ist danach im Allgemeinen positiv und verschwindet nur dann, wenn $f(x)$ identisch verschwindet. Ferner bestehen für sie die Beziehungen

$$\|cf(x)\| = |c| \, \|f(x)\| \; ; \; \|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\| \, .$$

Unter *Distanz* der Funktionen f_1, f_2 verstehen wir die Norm $\|f_1 - f_2\| = \|f_2 - f_1\|$ ihrer Differenz. Danach ist die gleichmässige Konvergenz einer Funktionenfolge $\{f_n\}$ gegen die Grenzfunktion f gleichbedeutend damit, dass die Distanz $\|f - f_n\|$ gegen Null konvergiert. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmässige Konvergenz einer Folge $\{f_n\}$ besteht nach dem sogenannten allgemeinen Konvergenzprinzip in der Beziehung $\|f_m - f_n\| \to 0$ für $m \to \infty$, $n \to \infty$. Speziell wird also eine Folge $\{f_n\}$, für welche sämtliche Distanzen $\|f_m - f_n\|$ $(m \neq n)$ eine von Null verschiedene, also wesentlich positive untere Schranke besitzen, keinesfalls gleichmässig konvergieren.

Wir werden uns im folgenden mit dem Umkehrproblem für *lineare Transformationen* beschäftigen. Eine Transformation T, die jedem Elemente f unseres Funktionalraumes ein eindeutig bestimmtes Element $T[f]$ zuordnet, soll dann linear heissen, wenn sie ***distributiv*** und ***beschränkt*** ist. Die Transformation heisst distributiv, wenn identisch für alle f

$$T[cf] = c\,T[f], \quad T[f_1 + f_2] = T[f_1] + T[f_2]$$

ist. Beschränkt heisst die Transformation dann, wenn es eine Konstante M gibt derart, dass für alle f

$$\|T[f]\| \leq M \|f\|$$

ausfällt.

Es folgt unmittelbar aus der Definition, dass T jede beschränkte Funktionenfolge $\{f_n\}$, d. i. jede Folge, für welche sämtliche $\|f_n\|$ unter einer Schranke liegen, wieder in eine solche überführt. Ferner folgt aus

$$|T[f]-T[f_n]| = |T[f-f_n]| < M\,|f-f_n|\,,$$

dass jede gleichmässig konvergente Folge wieder in eine solche überführt wird, und dass auch die Grenzfunktionen gegenseitig einander entsprechen, kurz, dass T *stetig* ist.

Die Bezeichnungen cT, T_1+T_2, T_1T_2, T^n sind derart naheliegend, dass sie nicht besonders erklärt zu werden brauchen. Es leuchtet ferner unmittelbar ein, dass die aus linearen Transformationen auf diese Weise abgeleiteteten neuen Transformationen, also Summe, Produkt und Potenzen derselben ebenfalls linear ausfallen.

Mit E bezeichnen wir die *identische* Transformation, die jede Funktion sich selbst zuordnet. Wir werden uns nun mit der Umkehrung der Transformationen vom Typus $B=E-A$ beschäftigen, wo also E die identische Transformation bedeutet, A aber einem speziellen Typus angehört, nämlich *vollstetig* ist. Um den Begriff der Vollstetigkeit einführen und auch recht fassen zu können, müssen wir vorderhand noch einen andern Begriff, jenen der *kompakten* Folge, besprechen.

Eine Folge $\{f_n\}$ heisse nach FRÉCHET kompakt, wenn jede Teilfolge derselben eine gleichmässig konvergente weitere Teilfolge enthält. Speziell ist also auch jede gleichmässig konvergente Folge kompakt, aber nicht umgekehrt, da ja z. B. durch Ineinanderschieben von zwei gleichmässig konvergenten Folgen mit verschiedenen Grenzfunktionen auch eine kompakte Folge entsteht.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für kompakte Folgen ist schon vor langem von ARZELÀ[1] angegeben worden. Wir werden davon vorläufig keinen Gebrauch machen und begnügen uns hier damit, ein Merkmal anzugeben, an dessen Fehlen sich dann in gegebenem Falle erkennen lässt, dass eine vorgelegte Folge *nicht* kompakt ist. Dieses Merkmal besteht darin, dass *für jede kompakte Folge* $\{f_n\}$ *die untere Schranke der Distanzen* $|f_m-f_n|$ $(m\neq n)$ *gleich Null sein muss*, da ja die Folge gleichmässig konvergente Folgen enthält.

Eine weitere Eigenschaft kompakter Folgen, auf die es uns hier ankommt, besteht darin, dass *jede kompakte Folge zugleich beschränkt ist.* Denn im entgegengesetzten Falle müsste sie ja eine Teilfolge mit monoton ins Unendliche wachsenden Normen enthalten, deren sämtliche weitere Teilfolgen dann dieselbe Eigenschaft besässen, und somit keine derselben gleichmässig konvergent sein könnte. Jede kompakte Folge ist somit beschränkt. *Dagegen braucht nicht jede beschränkte Folge kompakt zu sein:* z. B. ist für $0\leq x\leq 1$ die Folge $f_n(x)=x^n$ beschränkt, aber nicht kompakt, da sie und also auch sämtliche Teilfolgen gegen eine für $x=1$ unstetige Funktion konvergieren.

[1] C. ARZELÀ, »*Sulle funzioni di linee*«, Memorie d. R. Accad. d. Scienze di Bologna, serie 5, t. V (1895), S. 225—244.

Auf der soeben hervorgehobenen Tatsache, dass nämlich eine Folge beschränkt sein kann, ohne kompakt zu sein, beruht nun das Spezielle der *vollstetigen* linearen Transformation gegenüber der allgemeinen. Jede lineare Transformation überführt nämlich, wie wir schon gesagt haben, beschränkte Folgen in beschränkte, gleichmässig konvergente Folgen in gleichmässig konvergente und somit auch kompakte Folgen in kompakte. Wir erklären nun: eine lineare Transformation heisse vollstetig, wenn sie jede *beschränkte* Folge in eine *kompakte* überführt.

Einfachste Beispiele von vollstetigen Transformationen sind: $T[f] = f(a)$, die also jede Funktion $f(x)$ in eine überall konstante Funktion $= f(a)$ überführt; dann $T[f] = f(a) + f(b)\,x$ oder allgemeiner $T[f] = f(a_1)\,g_1(x) + \cdots + f(a_m)\,g_m(x)$, wo $a_1, \cdots, a_m, g_1, \cdots, g_m$ gegebene Stellen des Intervalls (a, b) resp. gegebene stetige Funktionen sind. Weitere Beispiele liefern das Integral

$$T[f] = \int_a^x f(x)\,dx$$

und allgemeiner das Integral

$$K[f] = \int_a^b K(x, y)\,f(y)\,dy,$$

mit dem wir uns bei der Anwendung der zu gewinnenden allgemeineren Resultate auf die FREDHOLM'sche Integralgleichung näher beschäftigen werden. Das einfachste Beispiel einer *nicht* vollstetigen Transformation bietet die identische Transformation E, die ja jede Folge, also auch jede beschränkte, aber nicht kompakte Folge in sich überführt.

Es folgt unmittelbar aus der Definition, dass *das Produkt $T_1 T_2$ sicher vollstetig wird, wenn wenigstens eine der beiden Faktoren vollstetig ist.* Da ferner aus gleichmässig konvergenten, also auch aus kompakten Folgen durch Multiplikation mit einer Konstanten oder durch gliedweise Addition wieder gleichmässig konvergente resp. kompakte Folgen entstehen, so folgt, dass zugleich mit T, T_1, T_2 auch cT und $T_1 + T_2$ vollstetig sind.

Wir haben noch einen Begriff zu erläutern, der für die folgenden Untersuchungen grundlegend ist, nämlich den Begriff der *linearen Mannigfaltigkeit.* Darunter verstehen wir jede Mannigfaltigkeit von Elementen unseres Funktionalraumes, die folgenden Bedingungen genügt: 1) mit f, f_1, f_2 zugleich sind auch $cf, f_1 + f_2$ darin enthalten; 2) sind die Elemente einer gleichmässig konvergenten Folge $\{f_n\}$ darin enthalten, so ist es auch die Grenzfunktion f. Beispiele für lineare Mannigfaltigkeiten bietet der Funktionalraum selbst, dann, um gleich das andere

Extrem zu nennen, die aus der einzigen Funktion $f = 0$ bestehende Mannigfaltigkeit. Ferner werden, wie dies unmittelbar aus der Definition folgt, durch jede beliebige Funktionenmenge zwei lineare Mannigfaltigkeiten mitbestimmt, nämlich 1) die Gesamtheit der linearen Verbindungen und deren Grenzfunktionen (im Sinne gleichmässiger Konvergenz), 2) die Gesamtheit jener stetigen Funktionen, für welche das mit jeder beliebigen Funktion der Menge gebildete Produktintegral gleich Null ist.

Wir wollen nun einige fast unmittelbar aus den Definitionen fliessende Sätze über lineare Mannigfaltigkeiten aufstellen, die uns für die folgenden Untersuchungen als Hilfssätze dienen werden.

Hilfssatz 1. Ist L eine beliebige lineare Mannigfaltigkeit und g eine Funktion, die ihr nicht angehört, dann gibt es in L eine Funktion f_1 derart, dass für sämtliche Funktionen f in L die Ungleichung besteht:

$$g - f \geq \tfrac{1}{2}\, g - f_1 \, .$$

Beweis. Da die Funktion g nicht der Mannigfaltigkeit L angehört, so ist die untere Grenze d der Distanzen $g - f$ von Null verschieden; denn im entgegengesetzten Falle würde L eine gegen g gleichmässig konvergierende Folge, also auch g enthalten. Wir wählen nun f_1 so, dass $g - f_1 \leq 2d$ wird; da andererseits für alle f die Distanz $g - f \geq d$ ist, so folgt unsere Ungleichung.

Hilfssatz 2. Ist von den beiden linearen Mannigfaltigkeiten L_1, L_2 die eine, L_2, echter Teil von L_1, d. h. ist L_2 in L_1 enthalten, ohne damit identisch zu sein, so gibt es in L_1 eine Funktion g_1 derart, dass einerseits

$$g_1 = 1,$$

andererseits für alle Elemente f von L_2

$$g_1 - f \geq \tfrac{1}{2}$$

ausfällt.

Beweis. Nach Voraussetzung enthält L_1 wenigstens ein Element g, welches nicht zu L_2 gehört. Nach Hilfssatz 1. gibt es nun in L_2 ein Element f_2, so dass für alle f in L_2 die Ungleichung besteht

$$\frac{g - f}{g - f_2} \geq \frac{1}{2}.$$

Wir setzen

$$g_1 = \frac{g - f_2}{g - f_2};$$

dann ist also $\|g_1\| = 1$, ferner ist g_1 als lineare Verbindung von g und f_2 in L_1 enthalten und endlich ist

$$g_1 - f = \frac{g - f_2}{\|g - f_2\|} - f = \frac{g - f_2 - \|g - f_2\| f}{\|g - f_2\|} = \frac{g - f_3}{\|g - f_2\|},$$

wo die Funktion $f_3 = f_2 + \|g - f_2\| f$ als lineare Verbindung von f_2 und f in L_2 enthalten ist; also ist auch

$$\|g_1 - f\| = \frac{\|g - f_3\|}{\|g - f_2\|} \geq \frac{1}{2}.$$

In beiden Hilfssätzen lässt sich die Zahl $\frac{1}{2}$ evidentermassen durch jede beliebige positive Zahl < 1 ersetzen. Dagegen kann man sie im allgemeinen nicht durch 1 selbst ersetzen. Nehmen wir z. B. als L_1 die Gesamtheit jener Funktionen, für welche $g(a) = 0$ ist, als L_2 aber jene, für welche ausserdem noch das über (a, b) erstreckte Integral verschwindet. Dann sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2. erfüllt. Würde es nun eine Funktion g_1 in L_1 geben derart, dass $\|g_1\| = 1$ und dass für alle f aus L_2 die Distanz $\|g_1 - f\| \geq 1$ wäre, alsdann müsste diese Funktion g_1 auch noch die weitere Extremaleigenschaft besitzen, unter allen g aus L_1, für welche $\|g\| \leq 1$ ist, das Integral von g dem absoluten Werte nach zu einem Maximum zu machen. Denn gäbe es eine Funktion g_2 in L_1, für welche $\|g_2\| \leq 1$ und das Integral grösser als für g_1 ausfiele, dann würde sich aus der Gleichung

$$\int_a^b g_1(x)\,dx - \xi \int_a^b g_2(x)\,dx = 0$$

eine Zahl ξ ergeben, für welche $|\xi| < 1$ wäre und andererseits die Funktion $f = g_1 - \xi g_2$ zu L_2 gehörte. Dann wäre aber $\|g_1 - f\| = \|\xi g_2\| \leq |\xi| < 1$, gegen unsere Annahme. Also erreicht der absolute Wert des Integrals bei g_1 sein Maximum. Nun ist aber wegen der Bedingung $\|g\| \leq 1$ dieses Maximum sicher $\leq b - a$, andererseits kommt man aber an diesen Wert $b - a$ beliebig nahe heran durch Funktionen g, die fast überall gleich 1 sind und nur nahe bei a stetig in 0 übergehen. Also ist das Integral von g_1 dem absoluten Werte nach gleich $b - a$, d. i. der Länge des Integrationsintervalls. Das wäre aber wegen der Stetigkeit von g_1 und wegen $\|g_1\| = 1$ nur so möglich, wenn überall $|g_1| = 1$ wäre, was jedoch der Annahme $g_1(a) = 0$ widerspricht.

Das soeben besprochene Beispiel zeigt also, dass in Hilfssatz 2. die Zahl $\frac{1}{2}$ nicht allgemein durch 1 ersetzt werden darf. Ein entsprechendes Beispiel für

Hilfssatz 1. erhält man, indem man für L die soeben benutzte Mannigfaltigkeit L_2 wählt, für g aber z. B. die Funktion $x - a$ oder jede beliebige Funktion aus L_1, die nicht zugleich L_2 angehört. In einem speziellen Falle lässt sich jedoch in beiden Sätzen sicher die Zahl 1 verwenden, nämlich dann, wenn L resp. L_2 von *endlicher Dimensionszahl* sind. Hierunter verstehen wir den Fall, wo sämtliche Elemente der Mannigfaltigkeit als lineare Verbindungen aus einer *endlichen* Anzahl unter ihnen dargestellt werden können. Es genügt, wenn wir nur den ersten Hilfssatz entsprechend umformen.

Hilfssatz 3. Ist L eine lineare Mannigfaltigkeit endlicher Dimensionszahl und g eine Funktion, die ihr nicht angehört, dann gibt es in L eine Funktion f^* derart, dass für sämtliche f in L die Ungleichung besteht

$$\|g - f\| \geq \|g - f^*\|.$$

Der Beweis dieser Behauptung stützt sich auf den

Hilfssatz 4. Wenn eine aus den Elementen einer linearen Mannigfaltigkeit endlicher Dimensionszahl gebildete Folge beschränkt ist, so ist sie auch kompakt.

Beweis der Hilfssätze 4. und 3. Nach Voraussetzung lassen sich alle Elemente der Mannigfaltigkeit in der Form

$$g = c_1 g_1 + c_2 g_2 + \cdots + c_k g_k$$

darstellen. Wir dürfen voraussetzen, dass die als Basis der Darstellung dienenden Funktionen $g_1, \cdots, g_k$ linear unabhängig sind; im entgegengesetzten Fall würden wir die überflüssigen weglassen. Um 4. zu beweisen, genügt es nun zu zeigen, dass aus der Annahme einer Schranke für

$$g = c_1 g_1 + \cdots + c_k g_k$$

das Vorhandensein einer entsprechenden Schranke für alle $|c_i|$ folgt, dass also für eine beschränkte Folge von Elementen g auch die entsprechenden Punkte $(c_1, \cdots, c_k)$ des k-dimensionalen Raumes eine beschränkte Folge bilden, woraus dann Hilfssatz 4. auf Grund des Bolzano-Weierstrass'schen Satzes unmittelbar folgt.

Es bleibt somit nur zu zeigen, dass die Beschränktheit von g auch eine Schranke für die $|c_i|$ bedingt. Die entgegengesetzte Annahme würde die Existenz einer beschränkten Folge von Funktionen g nach sich ziehen, für welche die entsprechenden Summen $|c_1| + \cdots + |c_k|$ über jede Grenze wachsen. Aus dieser Folge würde, indem man jede Funktion durch die entsprechende Summe $|c_1| + \cdots + |c_k|$ dividiert, eine neue, gleichmässig gegen Null konvergierende Folge entstehen.

für deren sämtliche Elemente $|c_1| + \cdots + |c_k| = 1$ wäre. Auf Grund des Bolzano-Weierstrass'schen Satzes würde es dann eine Teilfolge geben, für welche die Koeffizienten c_i gegen entsprechende Grenzwerte c_i^* konvergierten; und es wäre auch $|c_1^*| + \cdots + |c_k^*| = 1$. Da nun aus $c_1 \to c_1^*, \cdots, c_k \to c_k^*$ auch

$$c_1 g_1 + \cdots + c_k g_k \to c_1^* g_1 + \cdots c_k^* g_k$$

folgt, während andererseits bereits die ganze Folge, also auch die Teilfolge gegen Null konvergiert, so müsste $c_1^* g_1 + \cdots + c_k^* g_k = 0$, also wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Funktionen $g_1, \cdots, g_k$ auch $c_1^* = 0, \cdots, c_k^* = 0$ ausfallen; dem widerspricht aber die Beziehung $|c_1^*| + \cdots + |c_k^*| = 1$.

Damit ist der Beweis für 4. erbracht. Nun folgt 3. aus 4. durch folgende Überlegung. Es handelt sich darum, zu zeigen, dass $\|g - f\|$ ihre untere Schranke wirklich erreicht. Es sei $\{f_n\}$ eine Folge, für welche $\|g - f_n\|$ gegen die untere Schranke d von $\|g - f\|$ konvergiert, dann ist die Folge $\{g - f_n\}$ sicher beschränkt und wegen $\|f_n\| \leq \|g\| + \|g - f_n\|$ ist es auch die Folge $\{f_n\}$. Nach Hilfssatz 4. ist dann die beschränkte Folge $\{f_n\}$ auch kompakt. Also gibt es eine gleichmässig konvergente Teilfolge und die Grenzfunktion f^* dieser Teilfolge besitzt wegen $\|g - f^*\| \leq \|g - f_n\| + \|f_n - f^*\| \to d$ die gewünschte Eigenschaft, ein Minimum für $\|g - f\|$ zu liefern.

Der Hilfssatz 5., den wir nun aufstellen, ist ein Gegenstück zu Hilfssatz 4.; er sagt nämlich aus, dass die Kompaktheit sämtlicher beschränkter Folgen für die linearen Mannigfaltigkeiten von *endlicher Dimensionszahl* charakteristisch ist.

Hilfssatz 5. Wenn jede beschränkte Folge von Elementen einer linearen Mannigfaltigkeit kompakt ist, so ist die Mannigfaltigkeit von endlicher Dimensionszahl.

Beweis. Im entgegengesetzten Falle würde die Mannigfaltigkeit eine Folge $\{g_n\}$ enthalten, deren sämtliche Elemente von den übrigen linear unabhängig sind, d. i. keines derselben lässt sich als lineare Verbindung der Vorangehenden darstellen. Bezeichnen wir mit L_k die Gesamtheit der linearen Verbindungen von $g_1, \cdots, g_k$; dann ist g_{k+1} sicher nicht in L_k enthalten. Andererseits ist L_k eine lineare Mannigfaltigkeit; denn einerseits enthält sie sämtliche lineare Verbindungen ihrer Elemente, andererseits aber folgt, wie wir dies bei dem Beweise von Hilfssatz 4. auseinandersetzten, aus $c_1 g_1 + \cdots + c_k g_k \to 0$ auch $c_1 \to 0, \cdots, c_k \to 0$ und somit aus der gleichmässigen Konvergenz einer Folge $\{g^{(n)} = c_1^{(n)} g_1 + \cdots + c_k^{(n)} g_k\}$ gegen eine Grenzfunktion g^* auch die Konvergenz der Koeffizienten $c_i^{(n)}$ gegen entsprechende Grenzwerte c_i^*, so dass $g^* = c_1^* g_1 + \cdots + c_k^* g_k$ ausfällt, also der Mannigfaltigkeit L_k angehört. Da ferner L_k echter Teil von L_{k+1} ist, so gibt es in L_{k+1} nach Hilfssatz 2. sicher eine Funktion f_k derart, dass $\|f_k\| = 1$ ist, während ihre Distanz von jeder Funktion aus L_k wenigstens $^1/_2$ ausmacht.[1] Die Funktionen f_k $(k = 1, 2, \ldots)$ bilden wegen $\|f_k\| = 1$ eine beschränkte Folge. Andererseits ist für $i \neq k$ die Distanz $\|f_i - f_k\| \geq \frac{1}{2}$, da entweder f_i der Mannigfaltigkeit L_k, oder aber f_k der Mannigfaltigkeit L_i angehört. Also ist die untere Schranke der Distanzen $\|f_i - f_k\|$ $(i \neq k)$ von Null verschieden und die *beschränkte* Folge $\{f_k\}$ ist somit *nicht kompakt.*

Hilfssatz 6. Haben die linearen Mannigfaltigkeiten L_1 und L_2 ausser $f = 0$ kein gemeinsames Element, und ist wenigstens eine der beiden Mannigfaltigkeiten von endlicher Dimensionszahl, dann gibt es eine Konstante C derart, dass für jedes Element f aus L_1 und jedes Element g aus L_2

$$\|f\| + \|g\| \leq C\|f + g\|.$$

Beweis. Im entgegengesetzten Falle würde es je eine Folge $\{f_n\}$ und $\{g_n\}$ geben derart, dass $\|f_n\| + \|g_n\| > n\|f_n + g_n\|$, und wir dürfen auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\|f_n\| + \|g_n\| = 1$ voraussetzen, da dies durch Division von f_n und g_n durch $\|f_n\| + \|g_n\|$ stets erreicht werden kann. Nun sei z. B. L_1 von endlicher Dimensionszahl, dann ist die beschränkte Folge $\{f_n\}$ nach Hilfssatz 4. auch kompakt; es gibt daher eine gleichmässig konvergente Teilfolge $f^{(n)} \to f^*$. Da ferner $\|f^{(n)} + g^{(n)}\| < \frac{1}{n} \to 0$, also gleichmässig $f^{(n)} + g^{(n)} \to 0$, so wird auch gleichmässig $g^{(n)} \to -f^*$. Daraus folgt einerseits $\|f^{(n)}\| \to \|f^*\|$,[2] $\|g^{(n)}\| \to \|-f^*\| = \|f^*\|$ und somit wegen $\|f^{(n)}\| + \|g^{(n)}\| = 1$ auch $2\|f^*\| = 1$; andererseits müsste f^* als Grenzfunktion von $\{f^{(n)}\}$ resp. von $\{-g^{(n)}\}$ beiden Mannigfaltigkeiten L_1, L_2 angehören und somit überall verschwinden, was jedoch der soeben bewiesenen Beziehung $2\|f^*\| = 1$ widerspricht.

§ 2. Die Umkehrung der linearen Transformation.

Wir betrachten die Transformation $B = E - A$, wo E die *identische*, A aber eine *vollstetige* lineare Transformation unseres Funktionenraumes bedeuten. Die homogene Funktionalgleichung $B[\varphi] = 0$ hat sicher eine Lösung, nämlich die

[1] Da L_k von endlicher Dimensionszahl ist, liesse sich $^1/_2$ durch 1 ersetzen; doch kommt es uns hier auf diese tiefer liegende Tatsache nicht an; der entsprechende Hilfssatz 5. gelangt erst später zur Verwendung.

[2] Die Grenzgleichung $\|f^{(n)}\| \to \|f^*\|$ für jede gleichmässig konvergente Folge $f^{(n)} \to f^*$ erhält man am einfachsten aus den beiden Ungleichungen $\|f^*\| \leq \|f^* - f^{(n)}\| + \|f^{(n)}\|$, $\|f^{(n)}\| \leq \|f^* - f^{(n)}\| + \|f^*\|$ und aus der Grenzgleichung $\|f^* - f^{(n)}\| \to 0$.

Funktion, die überall gleich Null ist. Ausser dieser »identisch verschwindenden« Lösung können noch weitere auftreten. Die Gesamtheit der Lösungen bildet eine *lineare Mannigfaltigkeit,* da ja wegen Distributivität und Stetigkeit der linearen Transformationen jede lineare Verbindung von Lösungen und auch jede Grenzfunktion im Sinne gleichmässiger Konvergenz ebenfalls Lösungen sind. Die spezielle Voraussetzung, dass A *vollstetig* ist, gestattet nun, die Mannigfaltigkeit der Lösungen näher zu charakterisieren.

Satz 1. Die Lösungen der homogenen Gleichung

$$B[\varphi] = 0$$

bilden eine lineare Mannigfaltigkeit von endlicher Dimensionszahl.

Beweis. Wegen $E = A + B$ ist für die Lösungen $\varphi = A[\varphi]$, d. i. sämtliche Elemente unserer linearen Mannigfaltigkeit werden durch A in sich selbst überführt. Da A vollstetig ist, so übergeht jede beschränkte Teilfolge in eine kompakte, und da sie andererseits in sich selbst übergeht, so ist jede beschränkte Teilfolge kompakt. Also ist die Mannigfaltigkeit nach Hilfssatz 5. von endlicher Dimensionszahl.

Satz 1'. Die Lösungen der homogenen Gleichung

$$B^n[\varphi] = 0$$

bilden eine lineare Mannigfaltigkeit von endlicher Dimensionszahl.

Beweis. Die Transformation

$$B^n = (E - A)^n = E - A(nE - \cdots) = E - C$$

ist vom selben Typus wie B selbst: die Transformation

$$C = A(nE - \cdots)$$

ist nämlich als Produkt zweier Transformationen, von denen die eine, A, vollstetig ist, ebenfalls vollstetig. Also ist 1'. ein Korollar von 1.

Bevor wir den Satz 2. aussprechen, bemerken wir zunächst, dass jede Lösung der Gleichung $B^n[\varphi] = 0$ wegen $B^{n+1} = BB^n$ auch die Gleichung $B^{n+1}[\varphi] = 0$ befriedigt. Also definieren die Gleichungen $B^n[\varphi] = 0$ für $n = 1, 2, \ldots$ eine Folge von linearen Mannigfaltigkeiten, deren jede in allen Folgenden enthalten ist. Es frägt sich nun, ob die einzelnen Mannigfaltigkeiten *echte* Teile der folgenden sind? Vor allem ist klar, dass wenn z. B. die m-te Mannigfaltigkeit kein echter Teil der $m+1$-ten und also mit dieser identisch ist, dies dann auch für alle folgenden der Fall ist. Gäbe es nämlich eine erste Mannigfaltigkeit, für welche dies nicht mehr zutrifft, und bezeichnen wir den entsprechenden Exponent mit $n+1$, so würde es also eine Funktion φ geben, für welche $B^{n+1}[\varphi] = 0$, $B^n[\varphi] \neq 0$ wäre. Wir setzen $\psi = B^{n-m}[\varphi]$; dann wird $B^{m+1}[\psi] = B^{n+1}[\varphi] = 0$ und $B^m[\psi] = B^n[\varphi] \neq 0$, d. i. es wäre schon die $m+1$-te Mannigfaltigkeit nicht mehr mit der m-ten identisch, entgegen der Voraussetzung.

Es sind also nur zwei Fälle möglich: entweder treten bei jedem Schritte neue Lösungen auf, oder es bricht dies bei einem Exponenten n ab, von wo an sämtliche Mannigfaltigkeiten identisch sind. Der nun zu beweisende Satz 2. wird den ersten Fall ausschliessen.

Satz 2. Es gibt eine Zahl ν derart, dass für $n > \nu$ jede Lösung der Gleichung

$$B^n[\varphi] = 0$$

auch schon die Gleichung

$$B^\nu[\varphi] = 0$$

befriedigt, während für $n < \nu$ die Gleichung

$$B^{n+1}[\varphi] = 0$$

auch neue, d. i. solche Lösungen besitzt, welche die Gleichung

$$B^n[\varphi] = 0$$

nicht befriedigen.

Beweis. Im entgegengesetzten Falle müsste es für jedes n auf Grund des Hilfssatzes 2. eine Funktion φ_n geben, für welche $B^{n+1}[\varphi_n] = 0$, $\|\varphi_n\| = 1$ ist, während für jede Funktion φ, die schon die Gleichung $B^n[\varphi] = 0$ befriedigt, $\|\varphi_n - \varphi\| \geq \frac{1}{2}$ ausfällt. Die Funktionen φ_n bilden für $n = 1, 2, \ldots$ eine beschränkte Folge; also bilden, da A vollstetig ist, die Funktionen $g_n = A[\varphi_n]$ eine *kompakte* Folge. Betrachten wir die Differenz

$$g_n - g_m = A[\varphi_n - \varphi_m],$$

wo $m < n$. Da $A = E - B$ ist, so wird

$$g_n - g_m = \varphi_n - (\varphi_m + B[\varphi_n] - B[\varphi_m]) = \varphi_n - \varphi,$$

wo wegen $m < n$

$$B^n[\varphi] = B^n[\varphi_m] + B^{n+1}[\varphi_n] - B^{n+1}[\varphi_m] = 0$$

ist. Also ist

$$\| g_n - g_m \| \geq \| \varphi_n - \varphi \| \geq \frac{1}{2}$$ [1]

und somit ist die Folge $\{g_n\}$ sicher *nicht kompakt*. Unsere Annahme führt also zu einem Widerspruch. Definieren wir noch $B^0 = E$, so ist auch der Fall $r = 0$, d. i. der Fall, wo die homogene Gleichung ausser der identisch verschwindenden keine Lösung zulässt, in dem Satze mit inbegriffen.

Aus Satz 2. folgt sofort der

Satz 3. Hat die Gleichung

$$B[\varphi] = g$$

für jede beliebig gegebene stetige Funktion g eine Lösung, so ist diese Lösung eindeutig bestimmt.

Beweis. Mit anderen Worten sagt der Satz aus, dass *wenn die inhomogene Gleichung ohne Ausnahme lösbar ist, die entsprechende homogene Gleichung ausser der identisch verschwindenden keine weitere Lösung besitzt.* Dies zeigen wir wie folgt. Hätte die Gleichung $B[\varphi] = 0$ auch eine nicht identisch verschwindende Lösung φ_1, so sei φ_2 eine Lösung der Gleichung $B[\varphi] = \varphi_1$, φ_3 eine Lösung der Gleichung $B[\varphi] = \varphi_2$ u. s. f., allgemein φ_{n+1} eine Lösung der Gleichung $B[\varphi] = \varphi_n$. Dann wäre für jedes $n > 1$ die Funktion $B^n[\varphi_n] = 0$ und $B^{n-1}[\varphi_n] \neq 0$. Dies aber widerspricht dem Satze 2.

Wir lassen nun die Voraussetzung des Satzes 3. fallen und fragen ganz allgemein, wie die Mannigfaltigkeit der Funktionen g, für welche die Gleichung lösbar ist, ausschaut? Die Antwort erteilt der Satz 5.; der Satz 4. bereitet den Beweis des Satzes 5. vor.

Satz 4. Es gibt eine nur von der Transformation B abhängende Konstante G derart, dass immer, wenn die Gleichung

$$B[\varphi] = g$$

lösbar ist, für wenigstens eine der Lösungen

$$\| \varphi \| < G \, \| g \|$$

ausfällt.

Beweis. Ist φ eine Lösung, so ist die allgemeine Lösung $\varphi - f$, wo f eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung $B[f] = 0$ bedeutet. Da die Funktionen f nach Satz 1. eine lineare Mannigfaltigkeit *endlicher Dimensionszahl* bilden, so

---

[1] Auch hier lässt sich die Zahl $1/2$ durch 1 ersetzen, da ja alle in Betracht kommenden Mannigfaltigkeiten von endlicher Dimensionszahl sind.

gibt es unter ihnen auf Grund von Hilfssatz 3. eine Funktion f^* derart, dass für alle f

$$\|\varphi - f^*\| \leqq \|\varphi - f\|$$

ist. Dann ist aber die Funktion $\varphi^* = \varphi - f^*$ eine Minimallösung der Gleichung $B[\varphi] = g$, so dass also für alle der homogenen Gleichung $B[f] = 0$ genügenden f die Ungleichung $\|\varphi^*\| \leqq \|\varphi^* - f\|$ besteht. Der Satz 4. wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, dass die Quotienten $\frac{\|\varphi^*\|}{\|g\|}$ für alle g, für welche die Gleichung überhaupt lösbar ist, unterhalb einer gemeinsamen Schranke G liegen. Die entgegengesetzte Annahme würde die Existenz einer Folge $\{g_n\}$ mit entsprechenden Minimallösungen φ_n^* nach sich ziehen, für welche

$$\frac{\|\varphi_n^*\|}{\|g_n\|} \to \infty.$$

Da nun $c\varphi_n^*$ eine zu cg_n gehörige Minimallösung ist, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\|\varphi_n^*\| = 1$ und somit $\|g_n\| \to 0$ annehmen. Nun ist also die Folge $\{\varphi_n^*\}$ beschränkt, also die Folge der Funktionen $A[\varphi_n^*]$ kompakt, sie enthält daher sicher eine gleichmässig konvergente Teilfolge

$$A[\varphi_{n_k}^*] \to \varphi^{**}.$$

Da ferner $E = A + B$ und also

$$\varphi_{n_k}^* = A[\varphi_{n_k}^*] + B[\varphi_{n_k}^*] = A[\varphi_{n_k}^*] + g_{n_k}$$

ist, und g_{n_k} gleichmässig gegen 0 konvergiert, so ist ebenfalls gleichmässig

$$\varphi_{n_k}^* \to \varphi^{**}.$$

Daraus folgt $B[\varphi_{n_k}^*] \to B[\varphi^{**}]$, und da andererseits $B[\varphi_{n_k}^*] = g_{n_k} \to 0$, so erhalten wir

$$B[\varphi^{**}] = 0.$$

Also wäre φ^{**} auch eine Lösung f der homogenen Gleichung und daher $\|\varphi_{n_k}^* - \varphi^{**}\| \geqq \|\varphi_{n_k}^*\| = 1$ für alle k, was aber der gleichmässigen Konvergenz $\varphi_{n_k}^* \to \varphi^{**}$ widerspricht.

Satz 5. Die Transformation B überführt den Funktionalraum in eine lineare Mannigfaltigkeit.

Beweis. Aus der Distributivität der Transformation B folgt unmittelbar, dass die Transformierte mit g, g_1, g_2 zugleich auch cg und $g_1 + g_2$ enthält. Es bleibt zu zeigen, dass für jede gleichmässig konvergente Folge $g_n \to g^*$, für welche alle g_n zu der transformierten Mannigfaltigkeit gehören, dies auch für die Grenzfunktion g^* der Fall ist; mit andern Worten, dass *zugleich mit den Gleichungen $B[\varphi] = g_n$ auch die Gleichung $B[\varphi] = g^*$ wenigstens eine Lösung besitzt.* Zu diesem Zwecke wählen wir aus der Folge $\{g_n\}$ eine Teilfolge $\{g^{(n)}\}$ derart, dass

$$g^* - g^{(n)} < \frac{1}{2^{n+1}}$$

werde; dann wird auch

$$g^{(n+1)} - g^{(n)} \leq g^* - g^{(n+1)} + g^* - g^{(n)} < \frac{1}{2^n}.$$

Ferner sei φ_0 eine Lösung der Gleichung $B[\varphi] = g^{(1)}$, φ_n aber für $n = 1, 2, \ldots$ je eine solche Lösung der Gleichungen

$$B[\varphi] = g^{(n+1)} - g^{(n)},$$

für welche laut Satz 4.

$$\varphi_n \leq G\, g^{(n+1)} - g^{(n)} < \frac{G}{2^n}$$

ist. Alsdann konvergiert die unendliche Reihe $\varphi_0 + \varphi_1 + \cdots$ absolut und gleichmässig; ferner wird

$$B[\varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_n] = g^{(n+1)} - g^*,$$

und somit ist für die Summe φ^* der Reihe $B[\varphi^*] = g^*$. Also hat auch die Gleichung $B[\varphi] = g^*$ wenigstens eine Lösung.

Dem Satze 6. schicken wir folgende Bemerkungen voran: Da die Transformationen B^n, wie wir schon gelegentlich des Satzes 1'. bemerkten, von demselben Typus sind wie B selbst, so darf man den Satz 5. auch auf diese Transformationen anwenden; danach überführt jede der Transformationen B^n den Funktionalraum in je eine lineare Mannigfaltigkeit L_n. Da der Funktionalraum, den wir hier mit L_0 bezeichnen wollen, die Mannigfaltigkeit L_1 enthält und da L_n und L_{n+1} aus L_0 und L_1 durch Anwendung ein und derselben Transformation, nämlich von B^n, entstehen, so ist auch L_{n+1} in L_n enthalten. Wir fragen nun, ob L_{n+1} *echter* Teil von L_n ist oder aber die beiden identisch sind. Es leuchtet unmittelbar ein, dass in dem in Satz 3. behandelten Falle, wo $L_0 = L_1$ ist, d. i. L_1 sämtliche Funktionen enthält, dies auch für alle L_n zutrifft. Allgemeiner folgt aus $L_{m+1} = L_m$ die Beziehung $L_n = L_m$ für alle $n > m$. Es sind also hienach nur zwei Fälle möglich: entweder es fallen bei jedem Schritte Elemente weg, oder aber ist dies nur bis zu einem gewissen n der Fall, von wo an dann sämtliche Mannigfaltigkeiten identisch sind. Wir wollen zeigen, dass immer das Letztere stattfindet.

Satz 6. Es gibt eine Zahl ν derart, dass für $n > \nu$ immer $L_n = L_\nu$ wird, während für $n < \nu$ die Mannigfaltigkeit L_{n+1} echter Teil von L_n ist. Diese und die in Satz 2. definierte Zahl ν sind identisch.

Beweis. Um die Existenz einer Schwelle ν von der geforderten Eigenschaft zu beweisen, haben wir nur noch zu zeigen, dass L_{n+1} *nicht für alle n echter Teil von L_n sein kann.*

Ist L_{n+1} echter Teil von L_n, so gibt es nach Hilfssatz 2. eine Funktion g_n in L_n derart, dass $\|g_n\| = 1$ ist und dass für alle Funktionen g aus L_{n+1} die Ungleichung $\|g_n - g\| \geq \frac{1}{2}$ besteht. Wäre dies nun für alle n der Fall, so gäbe es eine entsprechende unendliche Folge $\{g_n\}$. Da $A = E - B$ ist, so wäre also für $m < n$

$$A[g_m] - A[g_n] = g_m - (g_n + B[g_m] - B[g_n]) = g_m - g,$$

wo alle 3 Glieder des unter g zusammengefassten Ausdruckes, somit auch g selbst in L_{m+1} enhalten sind. Daraus aber folgt

$$\|A[g_m] - A[g_n]\| = \|g_m - g\| \geq \frac{1}{2}.$$

Diese Ungleichung widerspricht aber dem Umstande, dass die Folge $\{A[g_n]\}$, die aus der beschränkten Folge $\{g_n\}$ durch Anwendung einer vollstetigen Transformation entsteht, kompakt sein muss. Damit ist die Existenz einer Schwelle ν bewiesen.

Um nun auch die zweite Behauptung des Satzes zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass die Gleichung $B[\varphi] = g$, wo g eine Funktion aus L_ν ist, wenigstens eine Lösung φ in L_ν besitzen muss, da ja L_ν durch B in sich übergeht. Wir behaupten nun, dass es in L_ν eine und nur eine Lösung gibt, mit anderen Worten, dass *die homogene Gleichung $B[\varphi] = 0$ ausser der identisch verschwindenden aus L_ν keine Lösung zulässt.* Der Beweis lautet ähnlich wie für den spezielleren Satz 3., der dem Fall $\nu = 0$ entspricht. Gäbe es in L_ν eine nicht identisch verschwindende Lösung φ_1, so sei φ_2 eine Lösung aus L_ν der Gleichung $B[\varphi] = \varphi_1$, φ_3 eine Lösung aus L_ν der Gleichung $B[\varphi] = \varphi_2$, u. s. f. Dann wäre für jedes $n > 1$ $B^n[\varphi_n] = 0$, $B^{n-1}[\varphi_n] \neq 0$, was jedoch dem Satze 2. widerspricht.

Aus der soeben bewiesenen Behauptung folgt nun, dass jede Lösung der Gleichung $B^{\nu+1}[\varphi] = 0$ auch die Gleichung $B^\nu[\varphi] = 0$ befriedigt, da ja sonst die Funktion $\varphi_1 = B^{r}[\varphi]$ eine nicht identisch verschwindende Lösung aus L_r der Gleichung $B[\varphi_1] = 0$ wäre. Andererseits lässt sich für jedes $n < r$ eine Lösung von $B^{n+1}[\varphi] = 0$ finden, für velche $B^n[\varphi] \neq 0$ ist. Zu diesem Zwecke wähle man irgend eine Funktion f aus L_{r-n-1}, die aber der nächstfolgenden Mannigfaltigkeit L_{r-n} nicht mehr angehört und für welche $B^n[f] \neq 0$ ist. Solche Funktionen gibt es sicher in der Menge $L_{r-n-1} - L_{r-n}$, denn sonst müsste die Menge $L_{r-1} - L_r$ leer ausfallen, d. h. es wäre $L_r = L_{r-1}$. Die Funktion $g = B^{n+1}[f]$ liegt in L_r und es gibt somit auch eine Funktion f_1 in L_r, für welche $B^{n+1}[f_1] = g$ ist. Dann befriedigt wegen $B^{n+1}[f] = B^{n+1}[f_1]$ die Funktion $\varphi = f - f_1$ die Gleichung $B^{n+1}[\varphi] = 0$; dagegen ist $B^n[\varphi] = B^n[f] - B^n[f_1] \neq 0$, da $B^n[f_1]$ der Mannigfaltigkeit L_r angehört, während $B^n[f]$ nur in L_{r-1}, aber nicht in L_r enthalten ist.

Somit besitzt unsere Zahl r auch die durch Satz 2. geforderten Eigenschaften.

Der folgende Satz 7., der aus den Sätzen 2., 3., 4. und 6. fast unmittelbar folgt, enthält als Spezialfall die FREDHOLM'*sche Alternative* bez. Lösbarkeit der homogenen und der inhomogenen Integralgleichung.

Satz 7. Entweder lässt sich die Transformation B umkehren, d. h. es gibt eine inverse lineare Transformation B^{-1}, für welche $BB^{-1} = B^{-1}B = E$ ist; oder aber besitzt die homogene Gleichung $B[\varphi] = 0$ ausser der identisch verschwindenden auch weitere Lösungen.

Beweis. Der erste Fall tritt dann ein, wenn die Gleichung $B[\varphi] = g$ für jedes g lösbar, also $r = 0$ ist. Dann ist nämlich nach Satz 3. die Lösung eindeutig bestimmt, es wird also jedem Elemente g des Funktionalraumes ein Element φ eindeutig zugeordnet. Wir wollen zeigen, dass diese Zuordnung distributiv und beschränkt ist, also eine lineare Transformation T darstellt. Die Distributivität folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit, da zu $cg, g_1 + g_2$ die entsprechenden Elemente $c\varphi, \varphi_1 + \varphi_2$ als Lösungen gehören. Die Beschränktheit der Transformation ist aber in Satz 4. als Spezialfall enthalten. Endlich sind die Gleichungen $BT = TB = E$ eine unmittelbare Folge der Gleichung $B[\varphi] = g$.

Der zweite Fall tritt dann ein, wenn die Gleichung $B[\varphi] = g$ nicht für alle g lösbar ist. Dann ist nämlich L_1 echter Teil von L_0, somit $r \geq 1$. Es gibt also nach den Sätzen 2. und 6. sicher eine Funktion φ, für welche $B[\varphi] = 0$, $\varphi = E[\varphi] = - B'[\varphi] \neq 0$ ist. Um wegen der Wichtigkeit der Behauptung das hiefür wesentliche aus dem Beweise des Satzes 6. zu wiederholen, ensteht eine solche Funktion φ aus jedem beliebigen Elemente f der Menge $L_{r-1} - L_r$ als Differenz von f und jener Funktion f_1 aus L_r, für welche $B[f_1] = B[f]$ wird.

Damit ist Satz 7. bewiesen. Den Fall $r = 0$ wollen wir nun als durch den Satz erledigt betrachten und wenden uns der näheren Untersuchung des Falles $r \geq 1$ zu. Vor allem führen wir folgende Benennungen ein. L_r heisse die *Kern-*

mannigfaltigkeit, ihre Elemente die *Kernelemente*. Die Lösungen der Gleichung $B^r[\varphi]=0$ nennen wir *Nullelemente;* die lineare Mannigfaltigkeit *endlicher Dimensionszahl*, die sie nach Satz 1'. bilden, heisse *Nullmannigfaltigkeit*. Unabhängig von der Zahl r kann man die Kernelemente g auch durch die Eigenschaft charakterisieren, dass die Gleichung $B^n[\varphi]=g$ für jedes n lösbar ist, die Nullelemente wieder dadurch, dass sie für genügend grosse n die Gleichung $B^n[\varphi]=0$ befriedigen.

Es gilt der folgende *Zerlegungssatz:*

Satz 8. Jede Funktion lässt sich auf eine und nur eine Weise als Summe eines Kernelementes und eines Nullelementes darstellen.

Beweis. Um die Zerlegung der Funktion f zu bewirken, setzen wir $B^r[f]=g$, dann ist g ein Kernelement und die Gleichung $B^n[\varphi]=g$ ist für jedes n, also auch für $n=2r$ lösbar. Sei φ_1 eine Lösung: wir setzen $f_1=B^r[\varphi_1]$. Dann ist auch f_1 ein Kernelement; ferner ist $B^r[f_1]=B^{2r}[\varphi_1]=g=B^r[f]$, also $B^r[f-f_1]=0$, d. h. $f-f_1$ ist ein Nullelement. Also liefert $f=f_1+(f-f_1)$ die gewünschte Zerlegung.

Um nun die Eindeutigkeit der Zerlegung zu zeigen, sei $f=f_2+(f-f_2)$ ebenfalls eine Zerlegung der gewünschten Art, d. i. f_2 sei ein Kernelement, $f-f_2$ ein Nullelement. Dann ist $f_3=f_1-f_2=(f-f_2)-(f-f_1)$ gleichzeitig ein Kernelement und auch ein Nullelement. Als Kernelement lässt f_3 jedenfalls eine Lösung der Gleichung $B^r[\varphi]=f_3$ zu, als Nullelement befriedigt es die Gleichung $B^r[f_3]=0$. Also ist $B^{2r}[\varphi]=0$, und somit nach Satz 2. auch $f_3=B^r[\varphi]=0$, d. i. also $f_2=f_1$.

Satz 9. Es gibt eine und nur eine lineare Transformation $B^{(0)}$, welche jedes Kernelement in sich selbst und jedes Nullelement in 0 überführt.[1] *Jede Funktion wird durch $B^{(0)}$ in ein Kernelement, durch $E-B^{(0)}$ in ein Nullelement verwandelt und es ist $B^{(0)2}=B^{(0)}$, $AB^{(0)}=B^{(0)}A$.*

Beweis. Nach Satz 8. entspricht jeder Funktion f ein Kernelement f_1 derart, dass $f-f_1$ ein Nullelement ist. Wir definieren die Transformation $B^{(0)}$, indem wir jeder Funktion f das entsprechende Kernelement f_1 zuordnen. Das hiedurch jedes Kernelement sich selbst enspricht und jedes Nullelement in 0 übergeht, folgt unmittelbar aus der in Satz 8. ausgeprochenen Eindeutigkeit der Zerlegung. Ferner wird laut Definition jede Funktion durch $B^{(0)}$ resp. $E-B^{(0)}$ in ein Kernelement resp. in ein Nullelement, nämlich in die nach Satz 8. entsprechenden beiden Teile verwandelt. Die Distributivität der Transformation $B^{(0)}$ folgt ebenfalls unmittelbar aus der Eindeutigkeit der Zerlegung und aus dem Umstande,

[1] Die Bezeichnung $B^{(0)}$ soll daran erinnern, dass für $r=0$ die Transformation $B^{(0)}$ mit der identischen $E=B^0$ zusammenfällt.

dass die Kernelemente für sich und ebenso die Nullelemente für sich je eine lineare Mannigfaltigkeit bilden. Wir haben noch zu zeigen, dass die Transformation $B^{(0)}$ auch beschränkt und somit eine lineare Transformation ist. Dies folgt nun durch Anwendung von Hilfssatz 6. auf die Nullmannigfaltigkeit und die Kernmannigfaltigkeit, deren erstere ja von endlicher Dimensionszahl ist. Nach Hilfssatz 6. gibt es daher eine Konstante C derart, dass $\|f_1\| + \|f - f_1\| \leq C\|f\|$ und und somit a fortiori

$$\|f_1\| \leq C\|f\|$$

wird.

Um $AB^{(0)} = B^{(0)}A$ zu beweisen, genügt es nach Satz 8., das Übereinstimmen für Kern- und für Nullelemente zu zeigen. Da $A = E - B$ jedes Nullelement in ein Nullelement, $B^{(0)}$ aber in o verwandelt, so ist für ein Nullelement $AB^{(0)}[f] = B^{(0)}A[f] = 0$. Für Kernelemente aber stimmen beide Transformationen mit A überein, da $B^{(0)}$ mit E übereinstimmt und A jedes Kernelement in ein ebensolches verwandelt. Endlich folgt die Gleichung $B^{(0)2} = B^{(0)}$ daraus, dass $B^{(0)}$ laut Definition jede Funktion in ein Kernelement und dieses, wie wir gezeigt haben, in sich selbst überführt.

Wir haben noch zu zeigen, dass es nur eine Transformation von der im Satze geforderten Eigentümlichkeit gibt. Die Differenz zweier solcher Transformationen müsste sowohl jedes Kernelement, wie auch jedes Nullelement und somit auf Grund von Satz 8. überhaupt jede Funktion in o überführen; also wären die beiden Transformationen mit einander identisch.

Satz 10. Die Transformation A gestattet eine und nur eine Zerlegung in lineare Transformationen $A = A_1 + A_2$ derart, dass A_1 alle Nullelemente, A_2 aber alle Kernelemente in 0 überführt.

Die Transformation A_1 stimmt für alle Kernelemente, die Transformation A_2 für alle Nullelemente mit A überein.

Jede Funktion wird durch A_1 in ein Kernelement, durch A_2 in ein Nullelement verwandelt.

Die Transformationen A_1, A_2 sind zueinander orthogonal, d. h. es ist $A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0$.

Die Transformationen A_1 und A_2 sind vollstetig.

Beweis. Wir setzen $A_1 = B^{(0)}A = AB^{(0)}$, $A_2 = (E - B^{(0)})A = A(E - B^{(0)})$. Dann ist $A_1 + A_2 = A$. Da $B^{(0)}$ jedes Nullelement in o überführt, so ist dies auch für $A_1 = AB^{(0)}$ der Fall. Andererseits wird jedes Kernelement sowohl durch E wie durch $B^{(0)}$ in sich und somit durch $E - B^{(0)}$, also auch durch $A_2 = A(E - B^{(0)})$ in o überführt.

Die Aussage, dass A_1 für alle Kernelemente, A_2 für alle Nullelemente mit A

übereinstimmen, ist nur eine Umformulierung der definierenden Eigenschaft. Die nächste Aussage des Satzes folgt aus der entsprechenden Aussage des Satzes 9. über $B^{(0)}$ und $E-B^{(0)}$ und daraus, dass B und also auch $A=E-B$ jedes Kern- resp. Nullelement wieder in ein solches überführen.

Die Eindeutigkeit der Zerlegung folgt unmittelbar aus der definierenden Eigenschaft und aus Satz 8., da A_1 und A_2 durch die definierende Eigenschaft sowohl für jedes Kernelement, wie auch für jedes Nullelement, also nach Satz 8. zufolge der Distributivität für jede Funktion eindeutig bestimmt sind.

Dass $A_1A_2=0$ ist, schliessen wir wie folgt. Wenden wir A_1A_2 auf eine Funktion an, so wird dies zunächst durch A_2 in ein Nullelement und dieses dann durch A_1 in 0 verwandelt. Ähnlich folgt auch $A_2A_1=0$.

Endlich folgt die Vollstetigkeit der Transformationen A_1, A_2 aus ihrer Produktdarstellung zufolge des vollstetigen Faktors A.

Der nächstfolgende Satz 11. gibt solche charakteristische Eigenschaften der Transformationen A_1, A_2 an, welche unabhängig von der Zahl ν sind.

Satz 11. Die Transformation $B_1=E-A_1$ lässt eine inverse Transformation B_1^{-1} zu, für welche also $B_1B_1^{-1}=B_1^{-1}B_1=E$ ist. Die Transformation $B_2=E-A_2$ hat die Eigenschaft, dass die beiden homogenen Gleichungen $B^n[\varphi]=0$ und $B_2^n[\varphi]=0$ für jedes n genau dieselben Lösungen zulassen und die Gleichungen $B^n[\varphi]=g$ und $B_2^n[\varphi]=g$ für ein und dieselbe Funktion g entweder keine oder beide lösbar sind.

Beweis. Die Umkehrbarkeit der Transformation B_1 folgt aus Satz 7., sobald wir nur zeigen, dass $B_1[\varphi]=0$ keine Lösung ausser $\varphi=0$ zulässt. Würde es eine Lösung $\varphi=f$ geben, so zerlegen wir f nach Satz 8. in ein Kernelement f_1 und ein Nullelement $f-f_1$. Dann wäre $B_1[f_1]+B_1[f-f_1]=0$. Ferner ist für das Nullelement $f-f_1$ nach Satz 10. $A_1[f-f_1]=0$, somit $B_1[f-f_1]=f-f_1$, also $B_1[f_1]=$ $=f_1-f$. Andererseits aber stimmt für ein Kernelement A_1 mit A, also auch B_1 mit B überein, somit wäre auch $B[f_1]=f_1-f$, also $B^{\nu+1}[f_1]=B^{\nu}[f_1-f]=0$, d. i. das Kernelement f_1 wäre zugleich ein Nullelement. Also müsste die Lösung $f=f_1+(f-f_1)$ als Summe von zwei Nullelementen ebenfalls ein Nullelement sein, dann wäre aber $A_1[f]=0$ und somit $B_1[f]=f$; daraus folgt wegen $B_1[f]=0$ auch $f=0$.

Die Aussagen des Satzes über B_2 liest man unmittelbar aus den beiden Identitäten $B^n=B_1^nB_2^n=B_2^nB_1^n$ und $B_2^n=(B_1^{-1})^nB^n=B^n(B_1^{-1})^n$ ab, deren erstere sich aus $B=E-A=E-A_1-A_2+A_1A_2=(E-A_1)(E-A_2)=B_1B_2$ durch Potenzieren nebst Beachtung der Vertauschbarkeit von A_1, A_2, also auch von B_1, B_2 ergibt, während die zweite aus der ersten durch Multiplizieren mit $(B_1^{-1})^n$ entsteht.

Je nach der Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von $B[\varphi]=0$ lässt die Transformation A_2 eine weitere Spaltung in orthogonale Teile zu, die der kanonischen Umformung einer linearen Substitution von n Veränderlichen entspricht und durch eine Parameterdarstellung der Nullmannigfaltigkeit, die ja von endlicher Dimensionszahl ist, leicht auf jene Umformung zurückgeführt werden kann, indem man nämlich A_2 als eine Transformation der Nullmannigfaltigkeit in sich selbst auffasst.

Wir gehen hier auf dieses Problem nicht weiter ein. Der nächste Satz 12. soll einem Gesichtspunkte Rechnung tragen, der für die meisten verwandten Untersuchungen von Anfang an grundlegend ist. Anstatt der einzelnen Transformation $E - A$ wollen wir nämlich hier die ganze *Schar* $E - \lambda A$ betrachten, wo λ einen beliebig veränderlichen komplexen *Parameter* bedeutet. Da mit A auch λA vollstetig ist, so gelten die bisher entwickelten Sätze entsprechend für sämtliche Transformationen $E - \lambda A$. Zu jedem Werte von λ gehört dann eine ganze Zahl $\nu = \nu(\lambda)$, die entweder o oder > 0 ist. Im ersten Falle sagt man, λ sei in bezug auf A ein *regulärer* Parameterwert; im zweiten, wo nach den Sätzen 2. und 6. die Gleichung $\varphi = \lambda A[\varphi]$ wenigstens eine nicht identisch verschwindende Lösung zulässt, heisst λ ein *singulärer* Parameterwert oder auch *Eigenwert* von A. Der Satz 12. wird diese Benennungen rechtfertigen, indem nämlich nach diesem Satze *$\nu = 0$ die Regel, $\nu > 0$ die Ausnahme ist.*

Satz 12. Die Eigenwerte λ besitzen im Endlichen keine Häufungsstelle.

Beweis. Der Satz wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, dass es keine *beschränkte* unendliche Folge aus sämtlich verschiedenen Eigenwerten gibt, d. h. dass die Annahme der Existenz einer beschränkten Folge aus sämtlich verschiedenen Zahlen λ_n, für welche die Gleichungen $\varphi = \lambda_n A[\varphi]$ wenigstens je eine nicht identisch verschwindende Lösung φ_n zulassen, auf einen Widerspruch führt. Zunächst ist klar, dass $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ für jedes n linear unabhängig sein müssten, da ja aus $\varphi_n = c_1\varphi_1 + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1}$ durch Anwendung der Transformation $\lambda_n A$ wegen $A[\varphi_k] = \frac{\varphi_k}{\lambda_k}$ ($\lambda = 0$ ist sicher kein Eigenwert) auch $\varphi_n = \lambda_n \left(\frac{c_1}{\lambda_1}\varphi_1 + \cdots + \frac{c_{n-1}}{\lambda_{n-1}}\varphi_{n-1}\right)$ und nach Einsetzung von $\varphi_n = c_1\varphi_1 + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1}$ eine linear homogene Beziehung mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten schon zwischen $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ folgt, woraus sich durch Rekurrenz die behauptete Unabhängigkeit für jedes n ergibt. Es sei nun $L^{(n)}$ die aus den linearen Verbindungen von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ gebildete Mannigfaltigkeit. Dann ist erstens für jedes Element $g = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$ aus $L^{(n)}$ die Differenz $g - \lambda_n A[g] = c_1\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\varphi_1 + \cdots + c_{n-1}\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right)\varphi_{n-1}$ eine lineare Verbindung von $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, also ein Element aus $L^{(n-1)}$. Ferner ist $L^{(n-1)}$ ein echter Teil von $L^{(n)}$, da ja φ_n nicht in $L^{(n-1)}$ enthalten ist; also gibt es nach Hiffssatz 2. für jedes n ein Element g_n aus $L^{(n)}$, derart dass $\|g_n\| = 1$ und für jedes Element g aus $L^{(n-1)}$ die Distanz $\|g_n - g\| > \frac{1}{2}$ ist. Wäre nun die Folge $\{\lambda_n\}$ beschränkt, so wäre es auch die Funktionenfolge $\{\lambda_n g_n\}$ und da A vollstetig ist, wäre dann die Folge $\{\lambda_n A[g_n]\}$ *kompakt*. Andererseits aber ist für $m < n$, da sowohl $\lambda_m A[g_m]$, wie $g_n - \lambda_n A[g_n]$ der Mannigfaltigkeit $L^{(n-1)}$ angehören,

$$\|\lambda_n A[g_n] - \lambda_m A[g_m]\| = \|g_n - (g_n - \lambda_n A[g_n] + \lambda_m A[g_m])\| > \frac{1}{2};$$

also kann die Folge $\{\lambda_n A[g_n]\}$ *nicht kompakt* sein. Die Annahme einer beschränkten Folge $\{\lambda_n\}$ stösst damit auf einen Widerspruch.

Bevor wir den Satz 13. aussprechen, müssen wir noch festlegen, wann wir die Stelle $\lambda = \infty$ als regulär resp. singulär betrachten. Um die für endliche λ geltende Definition entsprechend übertragen zu können, geben wir derselben folgende Fassung: λ ist in Bezug auf A regulär, wenn aus $\|f - \lambda A[f]\| = 0$ auch $\|f\| = 0$ folgt. Entsprechend definieren wir: $\lambda = \infty$ heisse in Bezug auf A regulär, wenn für jede ins Unendiche wachsende Folge $\lambda_n \to \infty$ aus $\|f_n - \lambda_n A[f_n]\| \to 0$ auch $\|f_n\| \to 0$ folgt.

Satz 13. In Bezug auf die in Satz 10. definierte Transformation A_2 sind alle von 1 verschiedene Werte λ, auch $\lambda = \infty$, regulär.

Beweis. Ist λ endlich, so haben wir zu zeigen, dass aus $f - \lambda A_2[f] = 0$ auch $f = 0$ folgt. Nach Satz 10. ist $A_2[f]$ ein Nullelement in Bezug auf B, also nach Satz 11. auch in Bezug auf B_2. Somit ist auch $f = \lambda A_2[f]$ selbst ein Nullelement für B_2. Andererseits folgt aus $f - \lambda A_2[f] = 0$ wegen $E - \lambda A_2 = (1 - \lambda) E + \lambda E - \lambda A_2 = (1 - \lambda) E + \lambda B_2$, dass $f = \frac{\lambda}{\lambda - 1} B_2[f]$ ist. Also ist auch $f = \frac{\lambda^n}{(\lambda - 1)^n} B_2^n[f]$. Da nun f ein Nullelement ist, so ist für genügend grosse n, nämlich $n \geq \nu$, sicher $B_2^n[f] = 0$. Also ist auch $f = 0$.

Was nun die Stelle $\lambda = \infty$ betrifft, nehmen wir an, sie sei in Bezug auf A_2 singulär; dann gibt es also eine Folge $\lambda_n \to \infty$ und eine Folge $\{f_n\}$, für welche $\|f_n - \lambda_n A_2[f_n]\| \to 0$, $\|f_n\|$ aber nicht gegen Null konvergiert. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\|f_n\| = 1$ annehmen, denn es gibt jedenfalls eine unendliche Teilfolge von $\{f_n\}$, für welche die Normen $\|f_n\|$ oberhalb einer von 0 verschiedenen positiven Schranke liegen; für die der Teilfolge entsprechenden Funktionen $\varphi_n = \frac{f_n}{\|f_n\|}$ wird dann $\|\varphi_n - \lambda_n A_2[\varphi_n]\| \to 0$ und $\|\varphi_n\| = 1$ ausfallen. Nehmen wir also sofort $\|f_n\| = 1$ an. Da alle Funktionen $A_2[f]$ Nullelemente sind, so sind es auch die Funktionen $\lambda_n A_2[f_n]$, ferner bilden diese wegen

$$\lambda_n A_2[f_n] = f_n + f_n - \lambda_n A_2[f_n] \to 1$$

eine beschränkte Folge. Da diese beschränkte Folge in einer Mannigfaltigkeit endlicher Dimensionszahl, nämlich der Nullmannigfaltigkeit enthalten ist, so ist sie auch kompakt. Also gibt es eine gleichmässig konvergente Teilfolge

$$\lambda^{(n)} A_2[f^{(n)}] \to f^*,$$

wo auch f^* ein Nullelement ist. Nun folgt einerseits aus der soeben erhaltenen Grenzgleichung und aus $f^{(n)} - \lambda^{(n)} A_2[f^{(n)}] \to 0$, dass auch gleichmässig $f^{(n)} \to f^*$ und damit auch $\|f^*\| = 1$. Andererseits folgt nach Division durch $\lambda^{(n)}$, dass gleichmässig $A_2[f^{(n)}] \to 0$ und somit auch $A_2[f^*] = 0$; also wird $B_2[f^*] = f^* - A_2[f^*] = f^*$ und somit auch $B_2^n[f^*] = f^* \neq 0$ für jedes n. Dies wiederspricht aber dem oben gefundenen Ergebnisse, wonach f^* ein Nullelement sein muss. Also ist auch $\lambda = \infty$ regulär.

§ 3. Anwendung auf Integralgleichungen.

Um Anschluss an die Theorie der Integralgleichungen zu gewinnen, betrachten wir die Transformation vom »*Integraltypus*«

$$K[f] = \int_a^b K(x, y) f(y) dy,$$

wo wir, um zunächst nur den wichtigsten Fall vor Augen zu halten, die Funktion $K(x, y)$ für $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$ stetig voraussetzen. Um unsere allgemeine Resultate auf die sogenannte FREDHOLM'sche *Integralgleichung* oder — nach HILBERT — *Integralgleichung zweiter Art*: $\varphi - K[\varphi] = g$ anwenden zu können, müssen wir vorerst zeigen, dass die Transformation vom Integraltypus $K[f]$ *linear* und *vollstetig* ist. Mit anderen Worten, wir müssen zeigen, dass K distributiv ist und dass sie jede beschränkte Folge in eine nicht nur beschränkte, sondern auch kompakte Folge überführt. Die Distributivität von K folgt unmittelbar aus der Distributivität der Integration, die Beschränktheit aus der Abschätzung

$$|K[f]| \leq \|f\| \int_a^b |K(x, y)| dy.$$

Wir haben noch zu zeigen, dass für jede beschränkte Folge $\{f_n\}$ die entsprechende Folge $\{K[f_n]\}$ auch kompakt ist. Damit eine beschränkte Folge $\{g_n\}$ kompakt sei, ist nach ARZELÀ notwendig und hinreichend, dass die g_n in ihrer Gesamtheit *in gleichem Masse* stetig seien. Darunter versteht man, dass es zu jedem positiven ε ein δ gibt derart, dass für $|x-x'|<\delta$ und für alle g_n zugleich $|g_n(x)-g_n(x')|<\varepsilon$ ausfällt. Es kommt uns hier nur darauf an, dass die Bedingung *hinreicht*. Wir wollen den Beweis hiefür kurz wiederholen. Nehmen wir irgend eine Teilfolge von $\{g_n\}$; diese Teilfolge ist, wie $\{g_n\}$ selbst, beschränkt, und man kann also daraus durch das bekannte Diagonalverfahren eine weitere Teilfolge $\{g^{(n)}\}$ aussondern, die an allen rationalen Stellen des Intervalls (a, b) konvergiert. Wir zeigen, dass $\{g^{(n)}\}$ auf der Strecke (a, b) überall und gleichmässig konvergiert. Wir wählen ε beliebig klein, dann gibt es dazu nach Voraussetzung ein entsprechendes δ. Nun zerlegen wir die Strecke (a, b) durch rationale Punkte $r_1, \ldots, r_k$ in eine endliche Anzahl von Teilstrecken $<\delta$. Dann gibt es unter diesen k Punkten zu jedem x wenigstens einen, so dass $|x-r|<\delta$ und also für alle n auch $|g^{(n)}(x)-g^{(n)}(r)|\leq\varepsilon$ wird. Andererseits ist, wenn m und n genügend gross sind, für jeden der k Punkte $|g^{(m)}(r)-g^{(n)}(r)|<\varepsilon$. Also ist auch

$$|g^{(m)}(x)-g^{(n)}(x)|\leq|g^{(m)}(x)-g^{(m)}(r)|+|g^{(m)}(r)-g^{(n)}(r)|+|g^{(n)}(r)-g^{(n)}(x)|<3\varepsilon;$$

und zwar gilt diese Abschätzung für jeden Punkt x, indem man für r den nächstliegenden der Punkte $r_1, \ldots, r_k$ einsetzt. Also ist für genügend grosse m, n die Distanz $\|g^{(m)}-g^{(n)}\|<3\varepsilon$, d. i. beliebig klein, die Folge $\{g^{(n)}\}$ ist somit gleichmässig konvergent.

Betrachten wir nun die Folge $\{g_n = K[f_n]\}$, wo die f_n eine beschränkte Folge bilden, also $\|f_n\|\leq G$ ist. Dann ist

$$|g_n(x)-g_n(x')| = \left|\int_a^b [K(x, y)-K(x', y)]f_n(y)dy\right| \leq G\int_a^b |K(x, y)-K(x', y)|dy.$$

Da $K(x, y)$ stetig ist, so kann im letzten Integral der Integrand und somit also auch das Integral beliebig klein gemacht werden, indem man x und x' genügend nahe wählt. D. h. zu jedem positiven ε gibt es ein δ derart, dass für $|x-x'|<\delta$ das Integral $<\frac{\varepsilon}{G}$ und somit $|g_n(x)-g_n(x')|<\varepsilon$ wird. Also ist die ARZELÀ'sche Bedingung befriedigt und die Folge $\{g_n = K[f_n]\}$ ist kompakt. Die Transformation K ist somit vollstetig.

Betrachten wir nun die Transformation $B = E - K$: nehmen wir zuerst den regulären Fall $r = 0$, also die Existenz einer inversen Transformation B^{-1} an. Wegen $B^{-1} - B^{-1}K = B^{-1}(E-K) = B^{-1}B = E$ ist $B^{-1} = E + B^{-1}K = E - H$, wo auch $H = -B^{-1}K$ eine vollstetige Transformation ist, und es liegt die Vermutung nahe, dass auch diese vom *Integraltypus* ist, so dass also *die Umkehrung der Integralgleichung*

$$f(x) - \int_a^b K(x, y) f(y) dy = g(x)$$

durch eine Gleichung vom selben Typus

$$f(x) = g(x) - \int_a^b H(x, y) g(y) dy$$

geschieht. Es gilt in der Tat allgemein der Satz: *Ist T eine beliebige lineare Transformation, K aber eine solche vom Integraltypus, dann ist auch die Transformation $H = TK$ vom Integraltypus.* Um diese Behauptung zu beweisen, definieren wir zuerst die entsprechende Funktion $H(x, y)$, indem wir in $K(x, y)$ die Veränderliche y für einen Augenblick als konstant ansehen und also auf $K(x, y)$, als Funktion von x allein betrachtet, die Transformation T anwenden. Damit ist $H(x, y)$ für jeden Wert y als stetige Funktion von x definiert. Dass $H(x, y)$ auch als Funktion von x, y stetig ist, schliesst man aus der Erhaltung gleichmässiger Konvergenz bei jeder linearen Transformation; danach folgt nämlich aus $y_n \to y^*$ und damit gleichmässig $K(x, y_n) \to K(x, y^*)$ die ebenfalls gleichmässige Konvergenz von $H(x, y_n)$ gegen $H(x, y^*)$. Es muss noch gezeigt werden, dass die der so definierten Funktion $H(x, y)$ entsprechende Transformation $H = TK$ ist. Dies folgt aber auf Grund der Definition des bestimmten Integrals durch Grenzübergang aus der Identität

$$\sum_{k=1}^{n} H(x, y_k) f(y_k)(y_{k+1} - y_k) = \sum_{k=1}^{n} T[K(x, y_k)] f(y_k)(y_{k+1} - y_k) =$$

$$= T\left[\sum_{k=1}^{n} K(x, y_k) f(y_k)(y_{k+1} - y_k)\right],$$

die ihrerseits aus der definierenden Formel von $H(x, y)$, nämlich $H(x, y_k) = T[K(x, y_k)]$ und aus der Distributivität von T folgt.

Zwischen $K(x, y)$ und der Funktion $H(x, y)$, die der Transformation $H = -B^{-1}K$ entspricht, bestehen die Beziehungen

$$K(x, y) + H(x, y) = \int_a^b K(x, u) H(u, y) du = \int_a^b H(x, u) K(u, y) du,$$

die unmittelbar aus den Identitäten $(E-K)(E-H)=(E-H)(E-K)=E$, d. i. $K+H=KH=HK$ fliessen. Durch diese Identitäten, ja sogar *schon durch* $K+H=KH$, ist die Transformation H und somit auch die Funktion $H(x, y)$ vollständig festgelegt, da sie ja aussagt, dass die Funktion $f=g-H[g]$ die Gleichung $f-K[f]=g$ befriedigt, dass somit diese Gleichung für alle g lösbar ist, und da in diesem Falle nach Satz 3. die Lösung f, also auch $H[g]=g-f$ durch Angabe von g eindeutig bestimmt wird. Besteht also zwischen H und K die Beziehung $K+H=KH$, so ist die Transformation $E-K$ umkehrbar, ihre inverse Transformation ist $E-H$, und es besteht daher auch die zweite Beziehung $K+H=HK$.

Nun sind wir in der Lage, sofort auch die sogenannte *transponierte* Integralgleichung zu erledigen. Setzen wir $\mathfrak{K}(x, y)=K(y, x)$ und sei $\mathfrak{K}$ die entsprechende Transformation; dann sagt man, die Gleichung $\mathfrak{f}-\mathfrak{K}[\mathfrak{f}]=\mathfrak{g}$ sei in Bezug auf die vorhin behandelte vom transponierten Typus. Umgekehrt ist $f-K[f]=g$ der zu $\mathfrak{f}-\mathfrak{K}[\mathfrak{f}]=\mathfrak{g}$ transponierte Typus. Tritt nun für den einen Typus die allgemeine Umkehrbarkeit ein, so *ist es auch für den andern der Fall*, da nämlich aus den obigen Beziehungen zwischen $K(x, y)$ und $H(x, y)$ die ähnlichen Beziehungen zwischen $\mathfrak{K}(x, y)$ und $\mathfrak{H}(x, y)=H(y, x)$ durch Vertauschung der Variabeln unmittelbar folgen. *Die Lösung der transponierten Integralgleichung wird hienach durch die Formel*

$$\mathfrak{f}(y)=\mathfrak{g}(y)-\int_a^b H(x, y)\,\mathfrak{g}(x)\,dx$$

geleistet.

Wir wenden uns jetzt dem Falle $\nu>0$ zu; wir verzichten jedoch darauf, sämtliche Resultate in die Sprache der Theorie der Integralgleichungen zu übersetzen und beschränken uns auf das Wesentlichste. Zunächst ist klar, dass der Fall $\nu>0$ für beide Transformationen $B=E-K$ und $\mathfrak{B}=E-\mathfrak{K}$ zugleich eintritt; denn wir haben soeben gesehen, dass aus der Umkehrbarkeit der einen Transformation, d. i. aus $\nu=0$ für diese Transformation, auch die Umkehrbarkeit der anderen, also auch für diese $\nu=0$ folgt. Ziehen wir nun den Satz 7. heran, so ergibt sich somit die FREDHOLM'*sche Alternative:*

Entweder besitzen die Gleichungen

$$f(x)-\int_a^b K(x, y)f(y)\,dy=g(x), \quad \mathfrak{f}(y)-\int_a^b K(x, y)\,\mathfrak{f}(x)\,dx=\mathfrak{g}(y)$$

für alle g und $\mathfrak{g}$ je eine eindeutig bestimmte Lösung, oder, wenn dies nicht der Fall ist, dann haben die entsprechenden homogenen Gleichungen ausser der identisch verschwindenden noch weitere Lösungen.

Die weiteren FREDHOLM'schen Sätze, nämlich das Übereinstimmen der Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der beiden homogenen Gleichungen und die durch diese »Nullösungen« ausgedrückte Bedingung für die Lösbarkeit der inhomogenen Gleichung bei vorgegebenem g resp. $\mathfrak{g}$, erhält man aus obigem Satze, wie Herr W. A. HURWITZ vor Kurzem gezeigt hat, durch einen sehr einfachen Kunstgriff.[1] Die Sätze 10., 11. und 13. gestatten es uns, einen andern Weg einzuschlagen, der weiter führt und tieferen Einblick in das Verhalten sämtlicher Nullelemente gewährt. Wir wollen diesen Weg hier kurz andeuten. Wir zerlegen die Transformation K nach Satz 10. in orthogonale Teile: $K = K_1 + K_2$, $K_1 K_2 = K_2 K_1 = 0$, $K_1 = B^{(0)} K$, $K_2 = (E - B^{(0)}) K$. *Dann sind auch die Transformationen K_1, K_2 vom Integraltypus*, da im definierenden Produkt der zweite Faktor vom Integraltypus ist. Wir haben somit eine Zerlegung $K(x, y) = K_1(x, y) + K_2(x, y)$ vor uns. Ich behaupte, dass *die entsprechende Zerlegung der transponierten Funktion $\mathfrak{K}(x, y) = K(y, x)$ durch die Transponierten von K_1 und K_2, also durch $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ geleistet wird.* Zunächst überführt nämlich K_2 alle Kernelemente von $B = E - K$ in 0; diese Tatsache drückt sich durch die Identität $K_2 B^r = 0$ aus, die ihr gleichwertig ist, da ja $B^r[f]$ die allgemeine Form der Kernelemente ist. Da nun K_2 und B vertauschbar sind, so ist auch $B^r K_2 = 0$. Diese Identität lässt sich auch als eine Integralbeziehung zwischen $K(x, y)$ und $K_2(x, y)$ hinschreiben, die wieder nach Vertauschen der Variablen die Identität $\mathfrak{K}_2 \mathfrak{B}^r = 0$ ergibt. Da alle Kernelemente der Transformation $\mathfrak{B}$ für jedes n, also auch für $n = r$, auf die Form $\mathfrak{B}^n[\mathfrak{f}]$ gebracht werden können, so besagt die soeben gewonnene Identität, dass *$\mathfrak{K}_2$ jedes Kernelement von $\mathfrak{B}$ in 0 überführt.* Andererseits ist $K_1 = K_1 - K_2 K_1 = (E - K_2) K_1 = B_2 K_1$ und somit auch allgemein $K_1 = B_2^n K_1$, woraus wegen der Umkehrbarkeit von B_1 weiter $K_1 = B_2^n B_1^n (B_1^{-1})^n K_1 = B^n (B_1^{-1})^n K_1$ folgt. Durch Übergang zur entsprechenden Integralformel und Transposition ergibt sich hieraus die Identität $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_1 (\mathfrak{B}_1^{-1})^n \mathfrak{B}^n$, so dass also für jedes Element $\mathfrak{f}$, für welches $\mathfrak{B}^n[\mathfrak{f}]$ bei irgendeinem n identisch verschwindet, dies auch für $\mathfrak{K}_1[\mathfrak{f}]$ der Fall ist. D. h. *die Transformation $\mathfrak{K}_1$ überführt alle Nullelemente von $\mathfrak{B}$ in 0.* Somit besitzen tatsächlich $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ jene Eigenschaften, die nach Satz 10. die Zerlegung eindeutig charakterisieren.

Was nun die besondere Bedeutung der Zerlegung $K = K_1 + K_2$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2$ für die Untersuchung der Transformationen B und $\mathfrak{B}$ anbelangt, so besagt erstens

[1] W. A. HURWITZ, *On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral equation*, Transactions of the American Math. Soc., Vol. 13 (1912), S. 405—418.

Satz 11., dass die Transformationen B und B_2, resp. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_2$ dieselben Kern- und Nullelemente besitzen, und dass auch bezüglich der letzteren der kleinste Exponent n, für welche $B^n[f]$, $B_2^n[f]$, resp. $\mathfrak{B}^n[\mathfrak{f}]$, $\mathfrak{B}_2^n[\mathfrak{f}]$ identisch verschwinden, für dieselbe Funktion f resp. $\mathfrak{f}$ bei beiden Transformationen derselbe ist. Der Grund für die letztere Erscheinung ist schon in Satz 10. angegeben; danach stimmen B und B_2 resp. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_2$ für die entsprechenden Nullmannigfaltigkeiten überein. Demgemäss darf man $K(x, y)$ bei allen diesbezüglichen Fragen, wie z. B. Lösbarkeit der inhomogenen Gleichung, Anzahl der unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung oder allgemeiner kanonische Gruppierung der Nullelemente, *durch die Funktion* $K_2(x, y)$ *ersetzen*. Diese Funktion ist aber von einer sehr *speziellen* Form; es ist nämlich

$$K_2(x, y) = f_1(x)\mathfrak{f}_1(y) + \cdots + f_m(x)\mathfrak{f}_m(y),$$

wo $f_1, \ldots, f_m$ Nullelemente von B, $\mathfrak{f}_1, \ldots \mathfrak{f}_m$ Nullelemente von $\mathfrak{B}$ sind. Denn zunächst geht die Funktion $K_2(x, y)$ aus der Funktion $K(x, y)$ dadurch hervor, dass man auf diese, als Funktion von x allein betrachtet, die Transformation $E - B^{(0)}$ wirken lässt, also jene Transformation, die jeder Funktion das bei der in Satz 8. angegebener Zerlegung entsprechende Nullelement zuordnet. Danach ist also $K_2(x, y)$, als Funktion von x betrachtet, ein Nullelement und kann daher als lineare Verbindung einer endlichen Anzahl von Nullelementen $f_1, \ldots, f_m$ dargestellt werden, die wir als linear unabhängig voraussetzen. Die Koeffizienten, die ja noch von y abhängen, sind zufolge der soeben gemachten Voraussetzung eindeutig bestimmte Funktionen $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_m$ von y. Wir wollen zeigen, dass diese Funktionen ihrerseits Nullelemente von $\mathfrak{B}$ sind. Zu diesem Zwecke erinnern wir zunächst daran, dass die Transformation $\mathfrak{K}_2$ jede Funktion in ein Nullelement von $\mathfrak{B}$ überführt; nun aber entsteht z. B. die Funktion $\mathfrak{f}_1$, wie die Integraldarstellung von $\mathfrak{K}_2$ unmittelbar zeigt, dadurch dass wir die Transformation $\mathfrak{K}_2$ auf eine Funktion $\mathfrak{f}$ anwenden, deren Produktintegral mit f_1 gleich 1, mit den übrigen f_i, d. i. mit $f_2, \ldots, f_m$ aber gleich Null wird. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ lässt sich bekanntlich eine solche Funktion $\mathfrak{f}$ als lineare Verbindung der konjugierten Funktionen $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m$ bestimmen. Somit ist $\mathfrak{f}_1$ tatsächlich ein Nullelement von $\mathfrak{B}$ und dasselbe gilt aus ähnlichem Grunde für $\mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_m$.

Zufolge der speziellen Struktur von $K_2(x, y)$ kann man nun die erwähnten Probleme, wie wir dies schon in Anlehnung an den Satz 11. andeuteten, auf die entsprechende Untersuchung einer quadratischen Matrix mit den m^2 Elementen $a_{ij} = \int\limits_a^b f_i(x)\mathfrak{f}_j(x)dx$ zurückführen; dabei wird man auch mit Nutzen die aus Satz

13. fliessende Eigenschaft dieser Matrix verwenden, dass ihre charakteristische Determinante $|\varepsilon_{ij} - \lambda \alpha_{ij}|$ (wo $\varepsilon_{ij} = 1$ für $i = j$ und 0 für $i \neq j$ ist), *den Wert* $\lambda = 1$ *als einzige, d. i. als m-fache Wurzel aufweist.* Wir begnügen uns damit, bezüglich der ausführlichen Untersuchung und der Literaturangaben auf das Buch von T. LALESCO: Introduction à la théorie des équations intégrales, Paris 1912, u. zw. speziell auf die Seiten 49—59 zu verweisen.

Zum Schlusse bemerke ich, dass die Entwickelungen dieses Paragraphs leicht auf allgemeinere, nicht ausnahmslos stetige Funktionen $K(x, y)$ ausgedehnt werden können, so z. B. auf jenen besonders wichtigen Fall, wo die Funktion für $x = y$ unendlich wird und zwar unendlich von der Ordnung $\alpha < 1$, d. i. $|K(x, y)| \leq G|x - y|^{-\alpha}$ ist. In der Tat gelten ja auch für diesen Fall alle Integralabschätzungen, die wir aus der Annahme der Stetigkeit von $K(x, y)$ folgerten. Ich erwähne noch beiläufig, dass in gewissem allgemeineren Sinne alle lineare Transformationen von Integraltypus sind, indem nämlich, wie dies aus meinen vor einigen Jahren angestellten Untersuchungen über lineare Funktionaloperationen[1] unmittelbar hervorgeht, jede lineare Transformation durch ein STIELTJES'*sches Integral* dargestellt werden kann. Die charakteristischen Eigenschaften der dabei zur Verwendung gelangenden Funktion von zwei Veränderlichen sind sowohl im allgemeinen, wie auch im vollstetigen Falle unschwer zu ermitteln.

Györ, den 19 Januar 1916.

---

[1] F. RIESZ, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, Comptes rendus de l'Acad. d. Sc., Paris, 29 novembre 1909.