Sur un théorème de la moyenne et ses applications.

Par M. MARCEL RIESZ à Stockholm.

1. Soit $\varphi(x)$ une fonction définie pour $x \leqq 0$, intégrable au sens de M. *Lebesgue*. Pour fixer les idées, nous supposons encore que $\varphi(x)$ est une fonction bornée dans tout intervalle fini, hypothèse qui pourrait être remplacée par des hypothèses bien plus générales. Nous entendons par intégrale de *Liouville-Riemann* d'ordre α de la fonction $\varphi(x)$ l'expression

$$I^{(\alpha)}(\varphi(x)) = \Phi_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}\, dt, \quad 0 < \alpha.\text{[1]} \tag{1}$$

D'abord, on voit facilement que $\Phi_\alpha(x)$ est une fonction continue (et même que $\Phi_\alpha(x)$ satisfait à une condition de *Lipschitz* d'ordre α). D'autre part, en exprimant l'intégrale d'*Euler* de la première espèce par la fonction Γ, on établit le fait connu que l'opération en question est distributive par rapport à l'indice α, c'est-à-dire qu'on a

$$I^{(\alpha+\beta)}(\varphi(x)) = I^{(\alpha)}\left[I^{(\beta)}\varphi(x)\right]. \tag{2}$$

On a en particulier

$$\Phi_1(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt, \tag{3}$$

$$\Phi_{\alpha+1}(x) = \int_0^x \Phi_\alpha(t)\, dt \tag{4}$$

et

$$\Phi'_{\alpha+1}(x) = \Phi_\alpha(x). \tag{5}$$

---

[1]) La limite inférieure *zéro* dans l'intégrale (1) peut évidemment être remplacée par un nombre fini quelconque et, avec des conditions supplémentaires sur $\varphi(x)$, aussi par $-\infty$.

2. Admettons maintenant que $0 < \alpha < 1$. Posons

$$(6) \qquad g(x,\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\xi} \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}\, dt, \qquad 0 \leqq \xi < x.$$

On a alors *le théorème de la moyenne*

$$(7) \qquad g(x,\xi) = \Phi_\alpha(\tau)$$

où

$$0 \leqq \tau < \xi.$$

Pour démontrer ce théorème, admettons d'abord que la dérivée $\Phi'_\alpha(x)$ existe et que, par exemple, cette dérivée soit une fonction continue de x. Alors, évidemment, à cause de la distributivité de l'opération, $\varphi(x)$ sera l'intégrale d'ordre $(1-\alpha)$ de $\Phi'_\alpha(x)$, c'est-à-dire qu'on aura

$$(8) \qquad \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \Phi'_\alpha(v)(t-v)^{-\alpha}\, dv.$$

En portant cela dans (6) et en observant que, sous les conditions admises, on peut intervertir l'ordre des intégrations, il vient

$$(9) \qquad g(x,\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\xi} (x-t)^{\alpha-1}\, dt \int_0^t \Phi'_\alpha(v)(t-v)^{-\alpha} dv =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\xi} \Phi'_\alpha(v)\, dv \int_v^{\xi} (x-t)^{\alpha-1}(t-v)^{-\alpha}\, dt =$$

$$= \int_0^{\xi} \Phi'_\alpha(v) M(v)\, dv$$

où l'on a posé

$$(10) \qquad M(v) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_v^{\xi} (x-t)^{\alpha-1}(t-v)^{-\alpha}\, dt.$$

Comme on a, indépendamment de v et x,

$$(11) \qquad \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_v^{x} (x-t)^{\alpha-1}(t-v)^{-\alpha}\, dt = 1,$$

il résulte

$$(12) \qquad M(v) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_{\xi}^{x} (x-t)^{\alpha-1}(t-v)^{-\alpha}\, dt.$$

L'intégrale qui figure au second membre et dont les limites sont indépendantes de v, est évidemment croissante lorsqe v va de 0 à ξ. Par conséquent, $M(v)$ est une fonction décroissante. On pourra alors appliquer le second théorème de la moyenne du calcul intégral et écrire

$$(13)\qquad g(x,\xi)=M(0)\int_0^{\tau_1}\Phi'_\alpha(v)\,dv=M(0)\,\Phi_\alpha(\tau_1),\qquad 0\leqq\tau_1\leqq\xi.$$

Dans cette dernière formule, on a déjà utilisé le fait que $\Phi_\alpha(0)=0$. Si l'on observe en outre que Φ_α est une fonction continue et que d'après (10), (11) et (12) on a $0\leqq M(0)<1$, on voit qu'il existe toujours un nombre τ $(0\leqq\tau<\tau_1)$ tel que $M(0)\,\Phi_\alpha(\tau_1)=\Phi_\alpha(\tau)$ et alors notre théorème se trouve démontré.

3. Dans la démonstration qui précède, les hypothèses concernant Φ'_α nous permettaient d'écrire la formule (8) qui conduisait à la formule (9). Or, en utilisant l'intégrale de *Stieltjes*, on arrive sans aucune hypothèse sur Φ'_α à la formule analogue à (9)

$$(14)\qquad g(x,\xi)=\int_0^{\xi}M(v)\,d\,\Phi_\alpha(v).$$

Pour éviter le raisonnement assez délicat dont on a besoin pour arriver à (14), nous suivrons ici une autre voie plus laborieuse, qui pourtant a l'avantage de n'exiger que des calculs formels.

L'intégration par parties de (9), faite à un point de vue tout à fait formel, donne, en observant que $\Phi_\alpha(0)=0$ et que $M(\xi)=0$,

$$(15)\qquad g(x,\xi)=-\int_0^{\xi}\Phi_\alpha(v)\,M'(v)\,dv.$$

L'intégrale au second membre est absolument convergente, puisque $M'(v)$ ne devient infini, pour $v=\xi$, que de l'ordre α. Donnons maintenant une vérification directe de la dernière formule sans aucune hypothèse sur Φ'_α.

---

[2]) La formule (14) se vérifie immédiatement, si l'on démontre d'abord que l'on a, sous la condition que $\varphi(x)$ est bornée, presque partout

$$\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x(x-t)^{-\alpha}\,d\,\Phi_\alpha(t).$$

Dans un travail plus élaboré, nous mettrons au point le rôle qui revient à l'intégrale de *Stieltjes* dans toutes ces questions.

On a

$$
\begin{aligned}
-\int_0^{\xi}\Phi_\alpha(v)\,M'(v)\,dv &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\xi} M'(v)\,dv\int_0^{v}\varphi(t)\,(v-t)^{\alpha-1}\,dt = \\
(16)\qquad &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\xi}\varphi(t)\,dt\int_t^{\xi} M'(v)\,(v-t)^{\alpha-1}\,dv.
\end{aligned}
$$

Or, on obtient par la distributivité (*voir* les formules (2)—(5)) et en intégrant par parties

$$
-\int_t^{\xi} M'(v)\,(v-t)^{\alpha-1}\,dt = \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dt}\int_t^{\xi} M'(v)\,(v-t)^{\alpha}\,dv =
$$

$$
= \frac{d}{dt}\int_t^{\xi} M(v)\,(v-t)^{\alpha-1}\,dv =
$$

$$
= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\left(\int_t^{\xi}(v-t)^{\alpha-1}\,dv\int_v^{\xi}(x-u)^{\alpha-1}\,(u-v)^{-\alpha}\,du\right) =
$$

$$
= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\left(\int_t^{\xi}(x-u)^{\alpha-1}\,du\int_t^{u}(v-t)^{\alpha-1}\,(u-v)^{-\alpha}\,dv\right).
$$

En tenant encore compte de (11), cette expression se réduit à

$$
(x-t)^{\alpha-1}.
$$

Alors, en introduisant cela dans (16), la formule (15) se trouve établie.

En observant maintenant que $M'(v)$ est de signe constant, que $0 < M(v) < 1$ et que $M(\xi) = 0$, (7) se déduit de (15) par l'application du premier théorème de la moyenne du calcul intégral.

4. Nous passons maintenant aux applications de notre théorème. Ce théorème, je l'ai déjà donné sous des conditions plus restrictives dans une Note des *Comptes rendus.* (Une méthode équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques, 12 juin 1911). C'est par ce théorème que j'y établis pour des indices non entiers que certaines moyennes que j'ai introduites sont entièrement équivalentes à celles de *Cesàro.* Les dites moyennes (sur lesquelles nous reviendrons au No. 11) sont sous plusieurs rapports plus maniables que celles de *Cesàro*, et ont un grand avantage sur ces dernières notamment dans la théorie des séries de *Dirichlet.*[3]) Or, dans cette théorie, le théorème de la moyenne que

[3]) Ainsi M. *Schnee* en travaillant (Acta Math. t. 35) avec les moyennes de *Cesàro,* obtenait d'abord des résultats très peu satisfaisants, pour arriver dans un supplément ajouté plus tard, en utilisant mon théorème d'équivalence, à des résultats simples.

nous venons d'établir, joue (même sous une forme bien plus particulière) un rôle fondamental pour tout ce qui concerne la sommation à ordres non entiers. (*Voir G. H. Hardy* and *M. Riesz*, The general theory of *Dirichlet*'s series, Cambr. Tracts of Math. No. 18 (1915). *Voir* en particulier le lemme 7 et ses applications). Disons enfin que notre théorème est trés utilisable dans le calcul aux différences à ordres non entiers, en élucidant le lien qui existe entre ces différences et les dérivées (et intégrales) de *Liouville—Riemann*. En remettant cette question à une autre occasion, je passe aux applications concernant certains théorèmes de *convexité*.

5. M. *H. Bohr*[4]) a démontré en se restreignant à *des séries de Dirichlet de la forme* $\Sigma a_n n^{-s}$ *et à des indices entiers de sommation* que *l'abscisse de sommabilité* des moyennes de Cesàro était une *fonction convexe de l'indice*. En combinant le théorème général qu'on va démontrer tout à l'heure avec les formules explicites pour les abscisses de sommabilité qui se trouvent dans le *Tract* cité (p. 45), on arrive à un théorème énoncé dans ce *Tract* (p. 60) qui dit que *le résultat de M. Bohr subsiste pour des séries de Dirichlet de la forme générale* $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ *et pour des indices de sommation quelconques, la méthode de sommation étant celle des moyennes typiques*.

Le théorème général qui suit, fut donné pour des indices *entiers* (et sous une forme un peu différente) par MM. *Hardy* et *Littlewood*.[5])

I. Soit α *un nombre positif quelconque. Admettons qu'il existe deux fonctions non décroissantes* $V(x)$ *et* $W(x)$, *telles que pour toute valeur positive de* x, *on ait*

$$|\varphi(x)| < V(x) \quad \text{et} \quad |\Phi_\alpha(x)| < W(x). \tag{17}$$

Soit en outre $0 < \alpha' < \alpha$. *Alors, il existe toujours une constante* C, *telle que*

$$|\Phi_{\alpha'}(x)| < C\Big(V(x)\Big)^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}}\Big(W(x)\Big)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}. \tag{18}$$

La démonstration qui suit montre que C est même indépendant de α'.

---

[4]) *H. Bohr*, Bidrag til de Dirichlet'ske Raekkers Theorie. Thèse, Copenhague, 1910, p. 101.

[5]) *G. H. Hardy* and *J. E. Littlewood*, Contributions to the arithmetic theory of series, Lond. Math. Soc. Proc. (2) vol. 11. (1912).

Nous nous restreignons d'abord au cas $0 < \alpha < 1$, le cas général pouvant facilement être réduit sur ce cas particulier (*voir* le *n°* 10).

On a d'abord

$$\Phi_{\alpha'}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha')}\int_0^x \varphi(t)\,(x-t)^{\alpha'-1}\,dt.$$

Nous déterminons ξ de façon que

$$x-\xi = \left(\frac{W(x)}{V(x)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{19}$$

Si cette équation donne pour ξ une valeur négative, nous posons $\xi = 0$. (Dans ce dernier cas, la démonstration se simplifie, car l'intégrale que nous désignons dans la suite par I_1 n'intervient pas). On aura

$$\Gamma(\alpha')\,\Phi_{\alpha'}(x) = \int_0^x \varphi(t)\,(x-t)^{\alpha'-1}\,dt = \int_0^\xi + \int_\xi^x = I_1 + I_2$$

et

$$|I_2| = \left|\int_\xi^x \varphi(t)\,(x-t)^{\alpha'-1}\,dt\right| < V(x)\int_\xi^x (x-t)^{\alpha'-1}\,dt = \tag{20}$$

$$= V(x)\,\frac{(x-\xi)^{\alpha'}}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha'}\Big(V(x)\Big)^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}}\Big(W(x)\Big)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}.$$

D'autre part

$$I_1 = \int_0^\xi \varphi(t)\,(x-t)^{\alpha'-1}\,dt = \int_0^\xi \varphi(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\,(x-t)^{\alpha'-\alpha}\,dt.$$

Puisque $\alpha'-\alpha$ est négatif, on a d'après le second théorème de la moyenne

$$I_1 = (x-\xi)^{\alpha'-\alpha}\int_u^\xi \varphi(\,)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt,\quad 0 \leq u \leq \xi.$$

Alors, d'après notre théorème (7), la dernière intégrale est

$$= \Gamma(\alpha)\Big(\Phi_\alpha(\tau_2) - \Phi_\alpha(\tau_1)\Big),\quad 0 < \tau_1 < \xi < x,\ 0 < \tau_2 < \xi < x,$$

c'est-à-dire

$$|I_1| \leq 2\,\Gamma(\alpha)\,(x-\xi)^{\alpha'-\alpha}\,W(x) = \tag{21}$$

$$= 2\,\Gamma(\alpha)\Big(V(x)\Big)^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}}\Big(W(x)\Big)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}.\quad C.\,Q.\,F.\,D.$$

6. On a encore le théorème

II. Si pour $x \to \infty$, on a

$$\varphi(x) : V(x) \to 0 \quad et \quad |\Phi_\alpha(x)| < W(x) \tag{22}$$

ou

$$|\varphi(x)| < V(x) \quad et \quad \Phi_\alpha(x) : W(x) \to 0, \tag{23}$$

on aura aussi pour $0 \leqq \alpha' < \alpha$

$$\Phi_{\alpha'}(x) : \left(V(x)\right)^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}} \left(W(x)\right)^{\frac{\alpha'}{\alpha}} \to 0. \tag{24}$$

Remarquons tout de suite que, si sous l'hypothèse (22) la fonction $V(x)$, ou sous l'hypothèse (23) la fonction $W(x)$ tend vers l'infini avec x, le dernier théorème se réduit facilement au théorème précédent. P. ex., sous l'hypothèse (22), on pourra alors trouver une fonction non décroissante $V_1(x)$ telle que $V_1(x) : V(x) \to 0$ et que, en remplaçant dans (22) $V(x)$ par $V_1(x)$, l'hypothèse (22) soit encore remplie. En appliquant alors le théorème *I*, le nouveau théorème découle. Nous pourrions donc dans la démonstration qui suit nous restreindre au cas où $V(x)$ ou $W(x)$ restent bornées respectivement. Or, du moins dans la démonstration de la première partie du théorème, cette hypothèse particulière n'amène aucune simplification. Quant à la seconde partie, nous la démontrons par un lemme que nous voulons établir sous des conditions aussi générales que possible. C'est pour ces raisons que, dans la démonstration suivante, la seule hypothèse faite au sujet de $V(x)$ et $W(x)$ c'est que ces fonctions sont non décroissantes.

7. Aussi dans la démonstration du théorème *II*, nous supposons d'abord $0 < \alpha < 1$.

Admettons d'abord l'hypothèse (22) et déterminons t_0 de façon que l'on ait

$$|\varphi(t)| < \varepsilon V(t), \qquad t > t_0,$$

ε étant un nombre arbitrairement petit. Cela étant, on détermine ξ par l'équation

$$x - \xi = \left(\frac{W(x)}{\varepsilon V(x)}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

en posant $\xi = t_0$, si cette équation donne pour ξ une valeur $\leqq t_0$.

a) Supposons d'abord $\xi > t_0$.

En posant, pour abréger,

$$(25)\qquad \Big(V(x)\Big)^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}}\Big(W(x)\Big)^{\frac{\alpha'}{\alpha}} = U(x),$$

on aura par le même raisonnement que plus haut

$$|I_2| = \left|\int_\xi^x \varphi(t)\,(x-t)^{\alpha'-1}\,dt\right| < \frac{\varepsilon^{1-\alpha'/\alpha}}{\alpha'}U(x)$$

et

$$|I_1| = \left|\int_0^\xi \varphi(t)\,(x-t)^{\alpha'-1}\,dt\right| < \frac{2\,\varepsilon^{1-\alpha'/\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,U(x).$$

b) Si l'équation donne pour ξ une valeur $\leqq t_0$, nous posons

$$|I_2| = \left|\int_{t_0}^x\right| < \frac{V(x)}{\alpha'}(x-t_0)^{\alpha'} < \frac{\varepsilon^{1-\alpha'/\alpha}}{\alpha'}U(x)$$

et

$$|I_1| = \left|\int_0^{t_0}\right| < (x-t_0)^{\alpha'-1}\int_0^{t_0}|\varphi(t)|\,dt \to 0 \qquad \text{quand } x\to\infty.$$

Ainsi la démonstration de la première partie du théorème *II* se trouve achevée.

8. Pour arriver à la seconde partie, nous démontrons d'abord le lemme suivant:

Sous l'hypothèse (23), *on a pour* $0<\xi<x$, *uniformément en* ξ,

$$g(x,\xi):W(x)\to 0,\ x\to\infty,$$

la fonction $g(x,\xi)$ *étant encore définie par la formule* (6) *et* α *étant* <1.

La démonstration de ce lemme est immédiate, lorsque $W(x)$ tend vers l'infini avec x. En effet, en vertu de (7), on a

$$(26)\qquad g(x,\xi) = \Phi_\alpha(\tau), \qquad 0\leqq\tau\leqq\xi\leqq x.$$

On pourra d'autre part d'après (23) déterminer t_1 de façon que

$$|\Phi_\alpha(t)| < \varepsilon\, W(t) \quad \text{pour} \quad t\geqq t_1.$$

$W(x)$ tendant vers l'infini on pourra choisir x assez grand pour que

$$W(t_1) < \varepsilon\, W(x).$$

Le nombre τ figurant en (26) étant alors $\gtreqless t_1$, on aura toujours

$$|g(x,\xi)| < \varepsilon\, W(x).$$

Lorsque $W(x)$ ne tend pas vers l'infini avec x, la démonstration de ce lemme devient un peu plus délicate.

Nous pourrons poser dans ce cas $W(x) = 1$. Déterminons alors t_2 de façon que

(27) $$|\Phi_\alpha(t)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad t > t_2$$

et désignons le maximum de $|\Phi_\alpha(t)|$ pour $0 \leq t \leq t_2$ par K.

Nous aurons par la formule (15) pour $\xi \leq t_2$

$$|g(x, \xi)| = \left| \int_0^\xi M'(v)\, \Phi_\alpha(v)\, dv \right| \leq K \left| \int_0^\xi M'(v)\, dv \right| = K\, M(0) =$$

$$= \frac{K}{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(1-\alpha)} \int_0^\xi (x-t)^{\alpha-1}\, t^{-\alpha}\, dt <$$

$$< \frac{K}{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_2} (x-t)^{\alpha-1}\, t^{-\alpha}\, dt \to 0, \quad x \to \infty.$$

Pour $\xi > t_2$, on a d'autre part

$$|g(x, \xi)| \leq \left| \int_0^{t_2} M'(v)\, \Phi_\alpha(v)\, dv \right| + \left| \int_{t_2}^\xi M'(v)\, \Phi_\alpha(v)\, dv \right| = \vartheta_1 + \vartheta_2.$$

Il vient

$$|\vartheta_1| < K \Big(M(0) - M(t_2) \Big) =$$

$$= \frac{K}{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^\xi (x-t)^{\alpha-1}\, t^{-\alpha}\, dt - \int_{t_2}^\xi (x-t)^{\alpha-1} (t-t_2)^{-\alpha}\, dt \right)$$

$$\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_2} (x-t)^{\alpha-1}\, t^{-\alpha}\, dt \to 0, \; x \to \infty.$$

Enfin, d'après (27), on a

$$|\vartheta_2| < \varepsilon\, M(t_2) < \varepsilon$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

9. Ce point établi, la seconde partie du théorème *II* résulte immédiatement. On choisit d'abord x assez grand pour que $|g(x, \xi)| < \varepsilon$ pour toute valeur de ξ, telle que $0 \leq \xi \leq x$. Aprés, on n'a qu'à déterminer ξ par l'équation

$$x - \xi = \left(\frac{\varepsilon\, W(x)}{V(x)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

(en posant $\xi = 0$ si cette équation donne une valeur négative) et appliquer le raisonnement qui a conduit à (18).

On pourra compléter le résultat qu'on vient de démontrer par le théorème suivant :

Si

$$|\varphi(x)| < V(x) \quad \textit{et} \quad \Phi_\alpha(x) \to A,$$

$V(x)$ étant toujours une fonction non décroissante et A étant un nombre fini, on aura $\Phi_{\alpha'}(x) : \left(V(x)\right)^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}} \to 0.$

Pour $A = 0$, ce théorème est un cas particulier de la seconde partie du théorème *II*. Pour réduire le cas de A quelconque au cas $A = 0$, posons

$$\overline{\varphi}(t) = \varphi(t) - \frac{A}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}.$$

Alors on aura[6]) [*cf.* la formule (11)]

$$\overline{\Phi}_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \overline{\varphi}(t)(x-t)^{\alpha-1} dt = \Phi_\alpha(x) - A \to 0$$

et

$$\overline{\Phi}_{\alpha'}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha')} \int_0^x \overline{\varphi}(t)(x-t)^{\alpha'-1} dt = \Phi_{\alpha'}(x) - \frac{A}{\Gamma(1+\alpha'-\alpha)} x^{\alpha'-\alpha}.$$

Par ces dernières formules, on a obtenu la réduction désirée.

10. Reste à se débarrasser dans les théorèmes précédents de la restriction $\alpha < 1$. Soit maintenant α un nombre positif quelconque. Déterminons un nombre entier n de façon que $\frac{\alpha}{n} < 1/2$ et posons $\alpha_k = \frac{k\alpha}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots n-1)$. Si l'on établit maintenant les théorèmes précédents pour les valeurs particulières $\alpha' = \alpha_k$, on n'aura qu'à appliquer encore une fois ces théorèmes sous la restriction $\alpha < 1$, pour les obtenir sans aucune restriction.

Occupons-nous d'abord du théorème *I*. Posons

$$\Psi_\beta(x) = \text{Max}\,|\Phi_\beta(t)| \text{ pour } 0 \leq t \leq x.$$

Or, il est clair que les fonctions Ψ ne sont pas décroissantes. On trouve alors d'après le théorème démontré tout à l'heure (en y remplaçant V, $\Phi_{\alpha'}$, W par $\Psi_{\alpha_{k-1}}$, Ψ_{α_k}, $\Psi_{\alpha_{k+1}}$)

$$\Psi_{\alpha_k}(x) < C\sqrt{\Psi_{\alpha_{k-1}}(x)\,\Psi_{\alpha_{k+1}}(x)}. \tag{28}$$

[6]) L'infinitude que $\overline{\varphi}(t)$ présente à l'origine n'améne aucune difficulté.

Cette inégalité est valable pour $k=1, 2, \ldots n-1$, si l'on pose $\Psi_{\alpha_0}=\Psi_0=V$ et $\Psi_{\alpha_n}=\Psi_\alpha=W$.

Soit maintenant l un quelconque des nombres $1, 2, \ldots n-1$. Élevons ces inégalités correspondant à $k=1, 2, \ldots l-1, l, l+1, \ldots n-2, n-1$ aux puissances repectives $(n-l)$, $2(n-l)$, $\ldots$, $(l-1)(n-l)$, $l(n-l)$, $(n-l-1)\,l, \ldots, 2\,l, l$. On trouve par multiplication

$$\Psi_{\alpha_l}(x) < C^{l(n-l)}\left(V(x)\right)^{1-\frac{l}{n}}\left(W(x)\right)^{\frac{l}{n}} =$$

$$= C^{l(n-l)}\left(V(x)\right)^{1-\frac{\alpha_l}{\alpha}} W(x)^{\frac{\alpha_l}{\alpha}}$$

et alors, d'après ce qu'on a dit, le théorème *I* résulte sans aucune restriction.

En s'appuyant maintenant sur ce théorème, la première partie de *II* se démontre de proche en proche pour $\alpha'=\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, tandis que la seconde se démontre de proche en proche pour $\alpha'=\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots \alpha_1$. Cela étant, ce théorème résulte aussi sans aucune restriction.

11. Quant aux applications des théorèmes qu'on vient de démontrer, en voici une concernant les moyennes auxquelles nous avons fait allusion au n^0 4.

Soit $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n$ une série quelconque. Posons

$$\sigma_k(\omega)=\sum_{n=0}^{[\omega]} a_n(\omega-n)^k \qquad k\geq 0.$$

Si la limite

$$\lim_{\omega\to\infty} \omega^{-k}\sigma_k(\omega)=\sigma$$

existe et est finie, nous disons que la série Σa_n est *sommable* d'ordre k avec la somme σ.

Les moyennes $\omega^{-k}\sigma_k(\omega)$ sont équivalentes aux moyennes de *Cesàro* d'ordre k dans le sens qu'une série quelconque est sommable en même temps et avec la même somme par ces deux espèces de moyennes. De plus, si pour une série, les moyennes d'ordre k de *Cesàro* sont bornées, il en sera de même pour nos moyennes d'ordre k et inversement.

Cela posé, on voit que dans le théorème qui suit, on pourra entendre par „moyennes" celles de *Cesàro* ou les nôtres. Ajoutons encore qu'on peut donner une démonstration directe pour les moyennes de *Cesàro,* cette démonstration étant très analogue à celle du texte.

Voici le théorème en question.

Si une série Σa_n est sommable par des moyennes d'un certain ordre et que ses moyennes d'ordre k sont bornées, alors la série est sommable par des moyennes d'ordre quelconque $> k$.[7])

La démonstration est immédiate. La série soit sommable d'ordre l. Il suffit évidemment de considérer des indices $< l$.

En changeant au besoin a_0, on pourra supposer que la somme de la série est zéro. On appliquera alors la seconde partie du théorème *II* en posant $\varphi(x) = \sigma_k(x)$, $\Phi_{k'-k}(x) = \text{const.}\ \sigma_{k'}(x)$, $\Phi_{l-k}(x) = \text{const.}\ \sigma_l(x)$, $V(x) = x^k$, $W(x) = x^l$, on trouve pour $k < k' < l$

$$\frac{\sigma_{k'}(x)}{x^{k'}} \to 0, \quad x \to \infty \qquad C.\,Q.\,F.\,D.$$

12. Voici encore une application. En combinant nos théorèmes avec un théorème sur les séries de *Dirichlet* que j'ai donné il y a bien longtemps et dont la démonstration paraîtra prochainement,[8]) on trouve la généralisation suivante d'un théorème de MM. *Hardy* et *Littlewood.*[9])

Si la série de Dirichlet $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ est sommable par les moyennes typiques[10]) *d'ordre r pour $s = 0$ et qu'elle est sommable d'ordre $(r-l)$ $(l < r)$ pour une valeur s dont la partie réelle est β (> 0), la série sera sommable d'ordre $(r-k)$ $(k < l)$ pour toute valeur s dont la partie réelle est $\geqq \frac{k\beta}{l}$. Le théorème subsiste, si dans l'une des hypothèses, au lieu de la sommabilité, on suppose seulement que les moyennes en question restent bornées.*

---

7) MM. *Hardy* et *Littlewood* ont donné une application très remarquable de ce théoreme dans leur Note: On the *Fourier* series of a bounded function, Lond. Math. Soc. Proc. (2) vol 17 (1917) p. XIII—XV (Records of Proceedings at Meetings).

8) Über die Summierbarkeit durch typische Mittel (paraîtra dans ce journal). Au lieu de combiner les résultats ci-dessus avec ceux du travail que je viens de citer, on pourra rester dans la voie indiquée plus haut en utilisant certaines formules de transformation données dans le *Tract* cité.

9) *Voir* le théorème 19 du travail cité au n^o 5.

10) Par moyennes typiques on pourra entendre ici, soit celles de première espèce, soit celles de seconde espèce; *cf.* le *Tract* cité p. 21 et suiv.

On trouvera beaucoup d'applications très intéressantes de notre théorème de la moyenne et des théorèmes *I* et *II* dans un Mémoire étendu de M. *K. Ananda Rau.*[11]) On y trouve, en particulier, un examen approfondi des questions de convexité concernant les abscisses de sommabilité et une généralisation remarquable du théorème de *Schnee-Landau.*[12])

---

[11]) *K. Ananda Rau,* On the convergence and summability of *Dirichlet's* series. Je ne sais pas si ce Mémoire a déjà paru ou non.

[12]) *E. Landau, Handbuch,* p. 853 et suiv.