Acta Mathematica, 6 (1885), 229-244

ZUR THEORIE DER EINDEUTIGEN ANALYTISCHEN FUNCTIONEN

VON

C. RUNGE[1]

in BERLIN.

Seit dem Bekanntwerden der Modulfunctionen, weiss man, dass der Gültigkeitsbereich einer analytischen Function nicht nothwendig von discreten Punkten begrenzt zu sein braucht, sondern dass auch continuirliche Linien als Begrenzungsstücke auftreten und einen Theil der complexen Ebene von dem Gültigkeitsbereich ausschliessen können.

Hier entsteht nun die Frage, ob der Gültigkeitsbereich analytischer Functionen seiner Form nach irgend welchen Beschränkungen unterliegt oder nicht. Diese Frage bildet, so weit sie sich auf eindeutige analytische Functionen bezieht, den Gegenstand der nachfolgenden Untersuchung. Es wird sich ergeben, dass der Gültigkeitsbereich einer eindeutigen analytischen Function d. h. die Gesammtheit aller Stellen an denen sie sich regulär oder ausserwesentlich singulär verhält keiner andern Beschränkung unterliegt als derjenigen, zusammenhängend zu sein. In dem ersten Theile

---

([1]) Die Aufgabe, welche in dem ersten Paragraphen dieser Arbeit in eleganter Weise gelöst wird, ist nicht in meiner Abhandlung *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante* (Acta mathematica 4, S. 1—79) behandelt worden. Diejenige Aufgabe dagegen, mit welcher sich der Verfasser in dem zweiten Paragraphen beschäftigt, ist in meiner Abhandlung aus mehreren verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet und gelöst worden. Da jedoch der Verfasser seine Untersuchungen vor der Veröffentlichung meiner oben citirten Abhandlung machte und auch ganz andere mit dem CAUCHY'schen Integralsatze in Zusammenhang stehende Methoden braucht, so habe ich die ganze Arbeit für geeignet gehalten hier aufgenommen zu werden.

Der Herausgeber.

Acta mathematica. 6. Imprimé 29 Septembre 1884.

wird gezeigt, dass jede eindeutige analytische Function durch eine einzige unendliche Summe von rationalen Functionen in ihrem ganzen Gültigkeitsbereiche dargestellt werden kann. In dem zweiten Theile wird gezeigt, wie man durch eine Summe von rationalen Functionen eine eindeutige analytische Function bilden kann mit vorgeschriebenem Gültigkeitsbereich, von dem nur vorausgesetzt wird, dass er zusammenhängend sei.

§ 1.

Es sei A der Gültigkeitsbereich einer eindeutigen analytischen Function $f(x)$. Wir wissen von ihm, dass er zusammenhängend ist. D. h. ist x_1 ein Punkt von A so gehören auch alle Punkte einer hinreichend kleinen Umgebung zu A, und ist x_2 ein zweiter Punkt von A, so lassen sich x_1 und x_2 durch eine continuirliche Linie verbinden, deren Punkte sämmtlich zu A gehören. Ich will ferner annehmen, dass der unendlich ferne Punkt nicht zu A gehört. Dies ist keine wesentliche Beschränkung. Denn verhielte sich $f(x)$ im Unendlichen regulär oder ausserwesentlich singulär, so könnte ich an Stelle von $f(x)$ die Function $f\left(x_0 + \frac{1}{x}\right)$ betrachten, die bei passender Wahl von x_0 sich im Unendlichen nicht regulär oder ausserwesentlich singulär verhält. Die Entwicklung von $f\left(x_0 + \frac{1}{x}\right)$ in eine Summe von rationalen Functionen ergiebt unmittelbar diejenige von $f(x)$, wenn ich statt x $\frac{1}{x - x_0}$ setze.

Unsre nächste Aufgabe wird nun sein, A in einer für die folgenden Betrachtungen zweckmässigen Form darzustellen.

Ich denke mir ein Quadrat mit den Eckpunkten

$$2^n \cdot \frac{\pm 1 \pm i}{2} \qquad (n \text{ eine ganze positive Zahl})$$

construirt und durch Parallelen zu den Seiten in 2^{4n} gleiche Quadrate von der Seite $\frac{1}{2^n}$ zerlegt. Ein jedes dieser kleinen Quadrate ist von 8 anderen umgeben, wenn es nicht mit einer Seite an den Rand stösst. Die Gesammtheit derjenigen Quadrate, welche *zugleich mit ihren 8 umliegenden* dem Gebiete A angehören, bezeichne ich mit A_n. Es ist möglich, dass den Werthen $n = 1, 2, 3, \ldots$ anfangs gar keine solchen Quadrate entsprechen. Es muss aber einmal ein Werth von n kommen, wofür A_n eine Bedeutung hat. Ja noch mehr. Jeder Punkt x von A wird sobald n einen gewissen Werth übersteigt im Innern von A_n liegen. Construiren wir nämlich um x das Quadrat mit den Eckpunkten $x + \varepsilon(\pm 1 \pm i)$, so wird auch dieses zu A gehören, vorausgesetzt, dass ε hinreichend klein gewählt wird. Für einen hinreichend grossen Werth von n fällt es in das Innere des Quadrates $2^n . \frac{\pm 1 \pm i}{2}$ und wenn nun zugleich $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, so gehört x zu A_n.

Sobald n gross genug ist, dass A_n ein wirklicher Bereich ist, so ist er in dem folgenden Bereich A_{n+1} vollständig enthalten. Betrachten wir nämlich eines der Quadrate von A_n. Nach der Definition von A_n gehören auch die acht umliegenden zu A. Jedes derselben zerfällt beim nächsten Schritt in 4 kleinere Quadrate. Von diesen gehören jedenfalls diejenigen zu A_{n+1}, welche an das Quadrat von A_n stossen. Folglich ist das letztere ganz in A_{n+1} enthalten.

Nach diesen Vorbereitungen schreite ich zur Darstellung von $f(x)$. Ich werde eine rationale Function $P_n(x)$ bilden, welche in A_n um weniger als $\frac{1}{n}$ (dem absoluten Betrage nach) von $f(x)$ verschieden ist. Dann ist

$$\lim_{n=\infty} P_n(x)$$

oder

$$P_1(x) + \sum_n [P_{n+1}(x) - P_n(x)] \qquad (n=1,2,\ldots,\infty)$$

die gesuchte Darstellung.

Im Innern und auf der Grenze von A_n (ich will hierfür im Folgenden kurz »auf» A_n sagen, während »in» A_n im Innern von A_n bedeuten soll) liegen keine wesentlich singulären Stellen von $f(x)$. Also giebt es eine rationale Function $p(x)$, welche nur auf A_n und dort grade so wie $f(x)$ unendlich wird, so dass $\bar{f}(x) = f(x) - p(x)$ sich auf A_n regulär verhält. Ich kann daher $\bar{f}(x)$ durch das CAUCHY'sche Integral darstellen

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\bar{f}(z)\,dz}{z - x}.$$

welches im richtigen Sinne über die Begrenzungen von A_n zu erstrecken ist. A_n kann nämlich aus mehreren getrennten Theilen bestehen und die einzelnen Theile können mehrfach zusammenhängend sein. Das Integral ist für alle Werthe von x in A_n gleich $f(x)$ dagegen für alle Werthe von x ausserhalb A_n gleich Null, wie von Hermite in seinen Vorlesungen zuerst bemerkt worden ist. Ich zerlege es entsprechend den verschiedenen Begrenzungscurven von A_n und betrachte einen dieser Theile

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\bar{f}(z)\,dz}{z-x}$$

erstreckt über eine Begrenzungscurve C_n^α von A_n.

Nach der Definition eines complexen Integrals ist dies gleich

$$\lim_{\lambda=\infty}\frac{1}{2\pi i}\sum_\mu\frac{\bar{f}(z_{\mu,\lambda})}{z_{\mu,\lambda}-x}(z_{\mu,\lambda}-z_{\mu-1,\lambda}). \qquad \binom{\mu=1,2,\ldots,\lambda}{z_{0,\lambda}=z_{\lambda,\lambda}}$$

wo $z_{1,\lambda}, z_{2,\lambda}, \ldots, z_{\lambda,\lambda}$ Systeme von λ Werthen auf der Curve C_n^α sind, deren Entfernungen

$$|z_{\lambda,\lambda}-z_{1,\lambda}|,\ |z_{1,\lambda}-z_{2,\lambda}|,\ \ldots,\ |z_{\lambda-1,\lambda}-z_{\lambda,\lambda}|,$$

mit wachsendem λ beliebig klein werden.

Die Summe

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_\mu\frac{\bar{f}(z_{\mu,\lambda})}{z_{\mu,\lambda}-x}(z_{\mu,\lambda}-z_{\mu-1,\lambda}) \qquad (\mu=1,2,\ldots,\lambda)$$

ist eine rationale Function von x mit den Unendlichkeitsstellen $z_{\mu,\lambda}$, $(\mu=1,2,\ldots,\lambda)$. Ich bezeichne sie mit $R_\lambda^{(n\alpha)}(x)$. Das Integral ist alsdann

$$\lim_{\lambda=\infty}R_\lambda^{(n\alpha)}(x).$$

Ich behaupte, dieser Ausdruck ist in der Nähe jedes Punktes innerhalb und ausserhalb A_n *gleichmässig* convergent.

Es ist nämlich

$$\frac{\bar{f}(z_{\mu,\lambda})}{z_{\mu,\lambda}-x}(z_{\mu,\lambda}-z_{\mu-1,\lambda})=\int_{z_{\mu-1,\lambda}}^{z_{\mu,\lambda}}\frac{\bar{f}(z_{\mu,\lambda})}{z_{\mu,\lambda}-x}\,dz.$$

Mithin

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C_n^\alpha)} \frac{\bar f(z)}{z-x}\,dz - R_\lambda^{(n\alpha)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_\mu \int\limits_{z_{\mu-1,\lambda}}^{z_{\mu,\lambda}} \left(\frac{\bar f(z)}{z-x} - \frac{\bar f(z_{\mu,\lambda})}{z_{\mu,\lambda}-x}\right) dz. \qquad (\mu=1,2,\ldots,\lambda)$$

Wenn daher für alle Werthe von z auf C_n^α zwischen $z_{\mu-1,\lambda}$ und $z_{\mu,\lambda}$ und alle Werthe von x in der Umgebung eines Punktes x_0 der absolute Betrag von

$$\frac{\bar f(z)}{z-x} - \frac{\bar f(z_{\mu,\lambda})}{z_{\mu,\lambda}-x}$$

kleiner ist als ε, so ist für alle diese Werthe von x der absolute Betrag von

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C_n^\alpha)} \frac{\bar f(z)}{z-x}\,dz - R_\lambda^{(n\alpha)}(x)$$

kleiner als $\frac{\varepsilon}{2\pi i}$ multiplicirt mit der Länge der Begrenzungscurve $C_n^{(\alpha)}$, also kleiner als eine Grösse, welche mit ε zugleich unendlich klein wird. Wählt man λ hinreichend gross, so wird z, wenn es zwischen $z_{\mu-1,\lambda}$ und $z_{\mu,\lambda}$ liegt, beliebig wenig von $z_{\mu,\lambda}$ verschieden sein. Die Frage der gleichmässigen Convergenz von

$$\lim R_\lambda^{(n\alpha)}(x)$$

ist also zurückgeführt auf die folgende Frage. Giebt es eine Grösse h von der Art, dass, wenn z auf der Curve C_n^α sich dem absoluten Betrage nach um weniger als h ändert, die Änderung von

$$\frac{\bar f(z)}{z-x}$$

für alle Werthe von x in einer kleinen Umgebung von x_0 und alle Werthe von z auf C_n^α kleiner als eine beliebig klein vorgeschriebene Grösse sei?

x_0 soll nicht auf C_n^α liegen. Dann gilt dasselbe für alle Punkte einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0. Mithin ist

$$\frac{\bar f(z)}{z-x}$$

für alle in Betracht kommenden Werthsysteme z, x regulär. Für einen speciellen Werth von z lässt sich

$$\frac{\bar{f}(z+h)}{z+h-x}$$

nach Potenzen von h entwickeln:

$$\frac{\bar{f}(z+h)}{z+h-x} - \frac{\bar{f}(z)}{z-x} = h\varphi_1(z,\ x) + h^2\varphi_2(z,\ x) + \dots .$$

Der Convergenzradius dieser Entwicklung hat für alle in Betracht kommenden Werthsysteme z, x eine von Null verschiedene untere Grenze. Denn im anderen Falle gäbe es unter den betrachteten Werthsystemen eines, in dessen Nähe er beliebig klein würde, was nicht der Fall ist.

Es sei ρ diese untere Grenze und $|h| \leqq \rho_1 < \rho$, so ist

$$\frac{\bar{f}(z+h)}{z+h-x}$$

für alle diese Werthe von h und die betrachteten Werthe von z und x regulär und der absolute Betrag muss eine endliche obere Grenze g besitzen. Dann ist aber nach einem bekannten Satze

$$|\varphi_\lambda(z,\ x)| \leqq g\rho_1^{-\lambda},$$

mithin

$$\left|\frac{\bar{f}(z+h)}{z+h-x} - \frac{\bar{f}(z)}{z-x}\right| \leqq \frac{g\,.\,|h|}{\rho_1 - |h|}$$

also für hinreichend kleine Werthe von $|h|$ beliebig klein, für alle betrachteten Werthe von z und x. Ich kann mithin λ so gross wählen, dass $R_\lambda^{(n\alpha)}(x)$ für alle Werthe von x auf A_{n-1} und ausserhalb A_{n+1} beliebig wenig von

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C_n^\alpha)} \frac{\bar{f}(z)}{z-x}\,dz$$

verschieden ist. Analoge Betrachtungen lassen sich in Bezug auf die andern Begrenzungscurven von A_n durchführen. Man sieht, dass sich eine rationale Function von x herstellen lässt, welche auf A_{n-1} und ausserhalb A_{n+1} um weniger als $\frac{1}{n}$ von dem Gesammtintegral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(A_n)} \frac{\bar{f}(z)}{z-x}\,dz$$

verschieden sein wird. Diese rationale Function bezeichne ich mit $R_n(x)$. Und es ist also

auf A_{n-1} $\qquad |\bar{f}(x) - R_n(x)| < \frac{1}{n}$

ausserhalb A_{n+1} $\qquad |R_n(x)| < \frac{1}{n}$.

$R_n(x)$ wird nur auf der Grenze von A_n unendlich. Ich will dieses Resultat in einem besonderen Satze noch einmal zusammenfassen, um mich später seiner zu bedienen.

»Ist B ein endliches aus einer endlichen Anzahl endlichfach zusammenhängender Stücke bestehendes Gebiet auf welchem eine im Übrigen beliebige analytische Function $f(x)$ sich regulär verhält, und ist C ein von B getrenntes Gebiet, so giebt es eine rationale Function $R(x)$, welche auf B beliebig wenig von $f(x)$ und auf C beliebig wenig von Null verschieden ist.»

Von der Beschränkung, dass B endlich sein soll, kann man sich befreien. Man mache eine Transformation $x = x_0 + \frac{1}{x'}$ und wähle für x_0 einen Punkt ausserhalb B, so geht B in ein Gebiet B' über, welches ganz im Endlichen liegt. Für dieses bilde man die rationale Function $R(x')$ und transformire dann wieder zurück.

Daraus erhellt, dass ich eine rationale Function $r_n(x)$ bilden kann, welche ausserhalb A_{n+1} um weniger als $\frac{1}{n}$ von $p(x)$ und auf A_{n-1} um weniger als $\frac{1}{n}$ von Null verschieden ist. Denn $p(x)$ verhält sich ausserhalb und auf der Grenze von $A_{n+1}(x)$ regulär. Es ist also auf A_{n-1} $\quad |f(x) - R_n(x) - p(x) + r_n(x)| < \frac{2}{n}$

und ausserhalb A_{n-1} $\quad |R_n(x) + p(x) - r_n(x)| < \frac{2}{n}$.

Diese rationale Function $R_n(x) + p(x) - r_n(x)$ werde mit $P_n(x)$ bezeichnet. Dann stellt

$$\lim_{n=\infty} P_n(x)$$

oder, was dasselbe ist,

$$P_1(x) + \sum_n [P_{n+1}(x) - P_n(x)] \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

die Function in ihrem ganzen Gültigkeitsbereiche dar.

Aber dieser Entwicklung ist der Vorwurf zu machen, dass Glieder derselben in Punkten unendlich werden, in denen die Function sich regulär verhält. Um diesem Übelstande abzuhelfen, werde ich an Stelle von $R_n(x) - r_n(x)$ eine andere rationale Function setzen, welche nur auf der Grenze von A unendlich wird, aber auf A_{n-1} und ausserhalb und auf der Grenze von A, abgesehn von beliebig kleinen mit n unendlich klein werdenden Umgebungen ihrer Unendlichkeitsstellen, beliebig genau mit $R_n(x) - r_n(x)$ übereinstimmt. Dann geht $P_n(x)$ in eine rationale Function über, welche nur an der Grenze von A und an den ausserwesentlich singulären Stellen, die auf A_n liegen, unendlich wird, und zwar hier genau so wie $f(x)$.

Um diese Umformung von $R_n(x) - r_n(x)$ herzustellen, bediene ich mich des folgenden Satzes:

Liegen x_1 und x_2 im Innern eines zusammenhängenden Gebietes und ist eine rationale Function $R(x)$ gegeben, welche nur in x_1 unendlich wird, so kann man eine andere rationale Function bilden, welche nur in x_2 unendlich wird und für alle Werthe von x ausserhalb jenes Gebietes beliebig genau mit $R(x)$ übereinstimmt.

Das geschieht auf folgende Weise. $R(x)$ hat die Form

$$R(x) = c_0 + \frac{c_1}{x - x_1} + \frac{c_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{c_\lambda}{(x - x_1)^\lambda}.$$

Nun sei a_1 eine Stelle so nahe an x_1, dass für alle Werthe von x ausserhalb des gegebenen Bereiches

$$\left|\frac{x_1 - a_1}{x - a_1}\right| < \varepsilon < 1.$$

Dann wird

$$c_\alpha \left\{ \frac{1}{x - x_1} \left[1 - \left(\frac{x_1 - a_1}{x - a_1} \right)^{n_1} \right] \right\}^\alpha$$

nur an der Stelle $x = a_1$ unendlich und ist bei hinreichend grossem n_1 beliebig wenig von $\frac{c_\alpha}{(x - x_1)^\alpha}$ verschieden, für alle Werthe von x ausserhalb des gegebenen Bereichs. Dasselbe gilt von den übrigen Gliedern von $R(x)$. Ich kann eine rationale Function herstellen, welche nur in a_1 unendlich wird und ausserhalb des gegebenen Gebietes beliebig wenig von $R(x)$ verschieden ist. So geht man weiter zu einer Stelle a_2, für welche

$$\left|\frac{a_1 - a_2}{x - a_2}\right| < \varepsilon < 1$$

u. s. f.

Da sich immer eine Kette von Werthen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wählen lässt, so dass

$$\left|\frac{a_{n-1} - a_n}{x - a_n}\right| < \varepsilon < 1$$

und schliesslich

$$\left|\frac{a_n - x_2}{x - x_2}\right| < \varepsilon < 1,$$

ist, so erhält man auf diese Weise eine rationale Function $\bar{R}(x)$, welche nur in x_2 unendlich wird und für alle Werthe von x ausserhalb des Bereiches beliebig wenig von $R(x)$ verschieden ist. Man sieht leicht ein, dass eine solche Umformung auch dann noch möglich ist, wenn x_1 oder x_2 im Unendlichen liegen. Man braucht nur eine lineare Transformation

$$x' = x_0 + \frac{1}{x}$$

zu machen, durch welche x_1 und x_2 in zwei im Endlichen liegende Stellen übergehn, dann die Umwandlung von $R\left(\frac{1}{x' - x_0}\right)$ in $\bar{R}(x')$ auszuführen und wieder zu x zurückzutransformiren, so hat $\bar{R}\left(x_0 + \frac{1}{x}\right)$ die erforderten Eigenschaften.

Jede beliebige rationale Function kann als Summe von rationalen Functionen dargestellt werden, die nur an je einer Stelle unendlich werden. Indem ich den obigen Satz auf diese anwende, erhalte ich das folgende Resultat. Wenn die sämmtlichen Unendlichkeitsstellen einer rationalen Function $R(x)$ in ρ von einander getrennten zusammenhängenden Gebieten liegen, so lässt sich eine rationale Function bilden, welche an je einer beliebigen Stelle im Innern dieser Gebiete und nur an diesen unendlich wird, und ausserhalb derselben beliebig genau mit $R(x)$ übereinstimmt.

Diese Methode der Umformung werde ich nun auf $R_n(x) - r_n(x)$ anwenden. Die Unendlichkeitsstellen dieser Function liegen sämmtlich in A_{n+1} aber ausserhalb A_{n-1}. Ich betrachte eines der kleinen Quadrate von der Seite $\frac{1}{2^{n+1}}$, aus denen das Gebiet $A_{n+1} - A_{n-1}$ besteht. Von ihm aus kann ich sicherlich die Grenze von A_{n+1} erreichen, ohne A_{n-1} zu treffen. Denn die Quadrate von A_{n-1} können nicht ein Polygon an allen Seiten begrenzen, welches ganz zu A gehört; sondern jedes Polygon, welches sie an allen Seiten begrenzen, muss Quadrate enthalten, die nicht ganz zu A gehören. Denn sonst gehörte das Polygon auch zu A_{n-1}. Irgend ein Theil der Grenze von A_{n+1} gehört zu einem kleinen Quadrat von der Seite $\frac{1}{2^{n+1}}$ ausserhalb A_{n+1}, welches zwar noch zu A gehört und in dem grossen Quadrate mit der Seite 2^{n+1} liegt, von dessen 8 umgebenden aber mindestens eines nicht mehr diese beiden Forderungen erfüllt. Wenn ich daher alle die kleinen Quadrate, welche A_{n+1} von aussen begrenzen sammt ihren 8 umliegenden und das ganze Gebiet ausserhalb des Quadrates $2^{n+1}\cdot\frac{\pm 1 \pm i}{2}$ zu $A_{n+1} - A_{n-1}$ hinzunehme und das Ganze mit B_n bezeichne, so hat B_n die Eigenschaft, dass ich von jeder Stelle aus die Grenze von A erreichen kann ohne das Innere von B_n zu verlassen.

Nun kann ich eine rationale Function bilden, welche nur auf der Grenze von A unendlich wird ausserhalb und auf der Grenze von B_n aber beliebig wenig von $R_n(x) - r_n(x)$ verschieden ist. Diese wird an Stelle von $R_n(x) - r_n(x)$ in $P_n(x)$ eingeführt. Man erhält dadurch eine Function $\overline{P}_n(x)$ von der folgenden Beschaffenheit. Auf A_n wird $\overline{P}_n(x)$ grade so unendlich wie $f(x)$. Auf A_{n-1} ist

$$|f(x) - \overline{P}_n(x)| < \frac{2}{n}.$$

Ausserhalb A_{n-1} und B_n ist

$$|\bar{P}_n(x)| < \frac{2}{n}.$$

Die übrigen Unendlichkeitsstellen von $\bar{P}_n(x)$ liegen auf der Grenze von A.

$$\lim_{n=\infty} \bar{P}_n(x) \quad \text{oder} \quad \bar{P}_1(x) + \sum_n [\bar{P}_{n+1}(x) - \bar{P}_n(x)] \qquad (n=1, \dots, \infty)$$

convergirt gleichmässig innerhalb und ausserhalb A und ist dort gleich $f(x)$ hier gleich Null. In einem ausserwesentlich singulären Punkte x_0 wird nur ein Glied der Summe unendlich. Denn ist A_{m-1} der erste Bereich in der Reihe $A_1, A_2, \dots$ auf welchem x_0 liegt, so ist $\bar{P}_m(x)$ die erste Function in der Reihe $\bar{P}_1(x), \bar{P}_2(x), \dots$ welche in x_0 unendlich wird. Alle folgenden aber werden in x_0 in derselben Weise unendlich. Mithin ist

$$[\bar{P}_m(x) - \bar{P}_{m-1}(x)]$$

das einzige Glied der Summe, welches in x_0 unendlich wird.

Auf jedem continuirlichen Theil der Grenze von A kann man die Unendlichkeitsstellen der Functionen $\bar{P}(x)$ auf eine einzige reduciren.

Es erhellt ferner, dass diese Entwickelungen nicht auf eindeutige Functionen beschränkt sind, sondern überhaupt für einen Zweig irgend einer analytischen Function gelten, der sich in A regulär oder ausserwesentlich singulär verhält. Denn die Eigenschaft von $f(x)$, keine Fortsetzungen über die Grenze von A hinaus zuzulassen, wurde gar nicht benutzt, sondern nur diese, bei irgend welchen Fortsetzungen in A eindeutig zu sein.

§ 2.

Es sei A ein Gebiet, von dem nichts Anderes vorausgesetzt wird als dass es zusammenhängend ist und den unendlich fernen Punkt nicht in seinem Innern enthält. Dann kann ich in der angegebenen Weise die Gebiete A_n bilden. Mit Hilfe derselben werde ich nun eine Summe von rationalen Functionen bilden, welche nur auf der Grenze von A unendlich werden, dergestalt dass die Summe in A überall gleichmässig convergirt und in der Nähe jedes Punktes der Grenze von A unstetig ist. Das liefert eine analytische Function, welche in A sich überall regulär und eindeutig verhält, über A hinaus aber nicht fortgesetzt werden kann.

Es sei $R_n(x)$ eine beliebige rationale Function, welche nur auf der Grenze von A unendlich wird. Nach dem Obigen kann ich eine rationale Function $R_{n+1}(x)$ bilden, welche auf A_{2n-1} um weniger als $\frac{1}{n^2}$ von $R_n(x)$ und ausserhalb A_{2n} um weniger als $\frac{1}{n}$ von 0 verschieden ist. Diese Function wird nur in dem Gebiete $A_{2n} - A_{2n-1}$ unendlich. Nun kann ich wie oben gezeigt ist, jeden Punkt von $A_{2n} - A_{2n-1}$ entweder mit der Grenze von A oder mit dem Rande des Quadrates $2^{2n+1}\frac{\pm 1 \pm i}{2}$ verbinden ohne A_{2n-1} zu treffen. Ich verbinde die Unendlichkeitspunkte von $R_{n+1}(x)$ durch Linien mit der Grenze von A respective mit dem Rande des Quadrates $2^{2n+1}\frac{\pm 1 \pm i}{2}$ und hülle diese Linien in Canäle ein, welche so schmal sind, dass sie keines der Quadrate mit der Seite $\frac{1}{2^{2n+1}}$ ganz enthalten.

Nun kann ich, wie oben auseinandergesetzt ist, die Unendlichkeitsstellen von $R_{n+1}(x)$ in diesen Canälen verschieben und mir eine andere Function $\overline{R}_{n+1}(x)$ bilden welche nur an der Grenze von A unendlich wird und die Eigenschaft besitzt im Innern des Quadrates $2^{2n+1}\frac{\pm 1 \pm i}{2}$ abgesehn von dem Gebiete $A_{2n} - A_{2n-1}$ und den Canälen beliebig wenig von $R_{n+1}(x)$ verschieden zu sein. Es lässt sich mithin erreichen, dass $\overline{R}_{n+1}(x)$ auf A_{2n-1} um weniger als $\frac{1}{n^2}$ von $R_n(x)$ verschieden ist und zugleich in einem Theile eines jeden der kleinen Quadrate von der Seite $\frac{1}{2^{2n+1}}$, welche das Gebiet $A_{2n+1} - A_{2n}$ ausmachen, um weniger als $\frac{1}{n}$ von Null abweicht. Denn keines dieser kleinen Quadrate ist ganz in den Canälen enthalten.

Auf ganz dieselbe Weise lässt sich eine rationale Function $\overline{R}_{n+2}(x)$ bilden, welche auf $A_{2(n+1)-1}$ um weniger als $\frac{1}{(n+1)^2}$ von $\overline{R}_{n+1}(x)$ verschieden ist und zugleich in einem Theile eines jeden der Quadrate von der Seite $\frac{1}{2^{2(n+1)+1}}$, welche das Gebiet $A_{2(n+1)+1} - A_{2n+1}$ ausmachen, um weniger als $\frac{1}{n+1}$ von 1 abweicht. Denn ich brauche ja nur eine Function $R_{n+2}(x)$ zu bilden, welche auf $A_{2(n+1)+1}$ von $\overline{R}_{n+1}(x) - 1$ um weniger als $\frac{1}{(n+1)^2}$ und in einem Theil jedes der kleinen Quadrate um weniger als $\frac{1}{n+1}$ von Null abweicht, so is $\overline{R}_{n+2}(x) = R_{n+2}(x) + 1$ die gesuchte Function.

Auf diese Weise bilde ich eine Reihe von Functionen

$$\overline{R}_{n+1}(x),\ \overline{R}_{n+2}(x), \ldots$$

welche den folgenden Bedingungen genügen. 1°. Sie werden nur auf der Grenze von A unendlich. 2°. Es ist auf $A_{2(n+m)-1}$:

$$|\overline{R}_{n+m+1}(x) - \overline{R}_{n+m}(x)| < \frac{1}{(n+m)^2}.$$

3°. In einem Theile eines jeden der kleinen Quadrate von der Seite $\frac{1}{2^{2(n+m)+1}}$, aus denen $A_{2(n+m)+1} - A_{2(n+m)}$ besteht, ist:

$$|\overline{R}_{n+m+1}(x)| < \frac{1}{n+m} \quad \text{wenn } m \text{ grade.}$$

dagegen $$|\overline{R}_{n+m+1}(x) - 1| < \frac{1}{n+m} \quad \text{wenn } m \text{ ungrade ist.}$$

Der Ausdruck

$$\lim_{\lambda=\infty} \overline{R}_\lambda(x)$$

oder was dasselbe ist

$$\overline{R}_n(x) + \sum_\lambda [\overline{R}_{n+\lambda}(x) - \overline{R}_{n+\lambda-1}(x)] \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \infty)$$

convergirt in der Nähe jeder Stelle x_0, welche in A liegt, gleichmässig. Denn sobald x_0 in $A_{2(n+m)-1}$ liegt, was für einen hinreichend grossen Werth von m eintritt, ist:

$$\|[\overline{R}_{n+m+1}(x) - \overline{R}_{n+m}(x)] + [\overline{R}_{n+m+2}(x) - \overline{R}_{n+m+1}(x)] + \ldots$$
$$\ldots + [\overline{R}_{n+m+\lambda+1}(x) - \overline{R}_{n+m+\lambda}(x)]\|$$

oder

$$|\overline{R}_{n+m+\lambda+1}(x) - \overline{R}_{n+m}(x)|$$

kleiner als:

$$\frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(n+m+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+m+\lambda)^2}$$

eine Grösse, welche bekanntlich für einen hinreichend grossen Werth von m beliebig klein ist, wie gross man auch λ wählen möge.

Mithin stellt jener Ausdruck in A eine analytische Function $f(x)$ dar, welche sich in A regulär verhält. Ausserdem hat diese Function die Eigenschaft in einem Theil eines jeden der kleinen Quadrate des Gebietes $A_{2(n+m)+1} - A_{2(n+m)}$ um nicht mehr als

$$\frac{1}{n+m} + \frac{1}{(n+m+1)^2} + \frac{1}{(n+m+2)^2} + \dots$$

von 0 beziehungsweise von 1 abzuweichen je nachdem m grade oder ungrade ist.

Denn es ist daselbst

$$|\overline{R}_{n+m+1}(x)| < \frac{1}{n+m} \quad \text{respective} \quad |\overline{R}_{n+m+1}(x) - 1| < \frac{1}{n+m}.$$

Da aber auf $A_{2(n+m)+1}$

$$|\overline{R}_{n+m+\lambda+1}(x) - \overline{R}_{n+m+1}(x)| < \frac{1}{(n+m+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+m+\lambda)^2},$$

so folgt, dass für x auf $A_{2(n+m)+1}$

$$|f(x) - \overline{R}_{n+m+1}(x)| \leqq \frac{1}{(n+m+1)^2} + \frac{1}{(n+m+2)^2} + \dots,$$

also auch dass $f(x)$ in den kleinen Quadraten des Gebietes $A_{2(n+m)+1} - A_{2(n+m)}$ die genannte Eigenschaft besitzt. Nun sei a eine Stelle der Grenze von A (es ist nicht ausgeschlossen, dass a der unendlich ferne Punkt sei), so kann man beweisen, dass die Function $f(x)$ in jeder Nähe von a, sowohl dem

Werth o als dem Werth 1 beliebig nahe kommt, dass mithin a eine wesentlich singuläre Stelle von $f(x)$ sein muss.

Um dies zu zeigen werde um a ein kleiner Kreis geschlagen (wenn $a = \infty$ ist, so werde ein grosser Kreis um den Nullpunkt geschlagen). In der auf diese Weise begrenzten Umgebung von a müssen für einen hinreichend grossen Werth von λ Punkte von A_λ liegen. Ich verbinde einen dieser Punkte durch eine grade Linie mit a. Diese Strecke muss Punkte des Gebietes $A_{\lambda+1} - A_\lambda$ enthalten, denn dieses Gebiet trennt A_λ von A, ebenso muss sie Punkte von $A_{\lambda+2} - A_{\lambda+1}$ u. s. w. enthalten. Mithin fallen für einen hinreichend grossen Werth von m Quadrate des Gebietes $A_{2(n+m)+1} - A_{2(n+m)}$ ganz in die Umgebung von a, und ebenso für alle grösseren Werthe von m. In diesen Quadraten kommt $f(x)$ den Werthen o und 1 beliebig nahe, sobald m hinreichend gross ist. Mithin kann sich $f(x)$ in a weder regulär noch ausserwesentlich singulär verhalten. Denn im ersten Falle wäre der Unterschied zweier Werthe von $f(x)$ in der Nähe von a beliebig klein, im zweiten Falle wären alle Werthe von $f(x)$ hinreichend nahe bei a beliebig gross. Alle möglichen Fortsetzungen von $f(x)$ bleiben mithin im Innern von A und da $f(x)$ hier eindeutig ist, so ist es überhaupt eindeutig, in A überall regulär und über A hinaus nicht fortsetzbar.

Wenn auf irgend eine Weise eine Punktmenge definirt ist, deren Häufungspunkte nicht zur definirten Punktmenge gehören, so giebt es stets eine eindeutige analytische Function, welche an diesen Punkten in vorgeschriebener Weise unendlich wird, und zugleich in dem ganzen Gebiete aller Stellen sich regulär verhält, welche sich mit jenen Punkten continuirlich verbinden lassen, ohne die Häufungspunkte zu treffen.

Ich nenne dies Gebiet sammt den definirten Punkten A', nehme an, dass es den unendlich fernen Punkt nicht enthalte (was keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit ist), und construire mir die Gebiete A'_n auf die oben angegebene Weise. Da A'_n ganz im Innern von A' liegt, so enthält es nur eine endliche Anzahl der definirten Punkte; denn im andern Falle läge ein Häufungspunkt in A'.

Die Gesammtheit der Glieder mit negativen Exponenten, welche den Punkten ausserhalb A'_{n-1} und auf A'_n entsprechen, bezeichne ich mit $r_n(x)$. Jetzt bilde ich eine rationale Function $p_n(x)$, welche nur an der Grenze von A' d. h. in Häufungspunkten unendlich wird und welche auf A'_{n-1}

um weniger als $\frac{1}{n^2}$ von $r_n(x)$ verschieden ist. Nach den früheren Erörterungen ist dies stets möglich. Dann wird

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} [r_\nu(x) - p_\nu(x)]$$

die gesuchte Function. Die Summe convergirt in A' gleichmässig, denn es ist in A'_{n-1}

$$\left| \sum_{k=n+m}^{\infty} [r_k(x) - p_k(x)] \right| < \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(n+m+1)^2} + \cdots$$

Dass $\varphi(x)$ an den vorgeschriebenen Punkten in der vorgeschriebenen Weise unendlich wird, eindeutig ist und an den übrigen Stellen von A' sich regulär verhält, ist nach der Bildungsweise evident.

Wenn jene Punktmenge im Innern des Gebietes A liegt, ihre Häufungspunkte jedoch auf der Grenze von A, so ist $\varphi(x) + f(x)$ eine eindeutige analytische Function, welche an den vorgeschriebenen Punkten in vorgeschriebener Weise unendlich wird, an den übrigen Punkten von A sich regulär verhält und über A hinaus nicht fortsetzbar sein kann. Denn die Häufungspunkte der Unendlichkeitsstellen sind als solche wesentlich singulär, die übrigen Stellen der Grenze von A dagegen aus dem Grunde wesentlich singulär, weil $\varphi(x)$ sich daselbst regulär, $f(x)$ aber wesentlich singulär verhält.