Zeit. f. Math. u. Physik. 46 (1901)

Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten.

Von C. Runge in Hannover.

Die Abhängigkeit zwischen zwei messbaren Grössen kann, strenge genommen, durch Beobachtung überhaupt nicht gefunden werden. Denn selbst wenn man von den Beobachtungsfehlern absehen und die Beobachtungen als absolut genau voraussetzen wollte, so bliebe doch immer der Umstand, dass durch Beobachtung immer nur eine diskrete Reihe einander entsprechender Wertepaare der beiden Grössen gefunden werden könnte. Selbst wenn wir die Reihe als unendlich voraussetzten, so würde nicht einmal eine „analytische"[1]) Funktion dadurch bestimmt sein. Gesetzt z. B., es seien für eine unendliche Reihe von äquidistanten Werten der einen Grösse die Werte der andern Grösse absolut genau bekannt, so wäre das Abhängigkeitsverhältnis damit noch nicht gegeben, selbst dann nicht, wenn wir nur nach der „analytischen" Funktion fragen, die das Abhängigkeitsverhältnis darstellen soll. Denn es ist klar, dass man auf mannigfache Weise eine periodische Funktion bilden kann, die für alle jene äquidistanten Werte verschwindet und daher, zu einer Funktion addiert, ihre Werte an jenen Stellen nicht ändert. Dennoch betrachtet man in den beobachtenden Wissenschaften eine Funktion durch eine solche Tabelle ihrer Werte als wohl definiert, sobald die Argumente nur hinreichend nahe aneinander liegen. Wie dicht sie liegen müssen, darüber werden meines Wissens klare Kriterien nicht aufgestellt. Man beschränkt sich darauf zu verlangen, dass die beobachteten Werte graphisch aufgetragen eine „glatte Kurve" geben. Eine Wellenlinie, die zwischen je zwei aufeinanderfolgenden beobachteten Punkten ein Maximum oder Minimum hätte, würde man stillschweigend ausschliessen.

Dieses übliche Verfahren kann in der That auch mathematisch gerechtfertigt werden.

Man kann nämlich auch durch eine Tabelle eine Funktion wohl definieren, wenn man zugleich ein Interpolationsverfahren vorschreibt,

1) Im Sinne von Weierstrass.

mit Hülfe dessen die zwischenliegenden Werte gefunden werden sollen. Allerdings liegt eine gewisse Willkür in der Wahl des Interpolationsverfahrens. Vor allem bieten sich zwei Möglichkeiten dar, die wir beide einer näheren Betrachtung unterziehen wollen.

Erstes Verfahren. Es sei x die unabhängige Veränderliche und es seien die Werte der Funktion für $x = 0,\ h,\ 2h, \ldots$ gegeben. Man bilde dann eine ganze Funktion ersten Grades $g_1(x)$, die für $x = 0$ und $x = h$ die gegebenen Werte annimmt, eine ganze Funktion zweiten Grades $g_2(x)$, die für $x = 0,\ h,\ 2h$ die gegebenen Werte annimmt u. s. f. eine ganze Funktion $n$ten Grades $g_n(x)$, die für $x = 0,\ h,\ 2h, \ldots nh$ die gegebenen Werte annimmt. Dann fragt es sich, ob $\lim g_n(x)$ konvergent ist. So weit die Konvergenz reicht, so weit lässt sich dann die Funktion durch $\lim g_n(x)$ definieren.

Zweites Verfahren. Die Werte der Funktion seien für $x = o,\ \pm h,\ \pm 2h, \ldots$ gegeben. Man bilde eine ganze Funktion ersten Grades $G_1(x)$, die für $x = 0$ und $x = h$ die vorgeschriebenen Werte annimmt, eine ganze Funktion zweiten Grades $G_2(x)$, die für $x = -h$, $x = 0$, $x = +h$ die vorgeschriebenen Werte annimmt u. s. f., eine ganze Funktion $(2n-1)$ten Grades $G_{2n-1}(x)$, die für $x = -(n-1)h$, $-(n-2)h, \ldots, 0,\ h, \ldots, +nh$ die vorgeschriebenen Werte annimmt und eine ganze Funktion $2n$ten Grades $G_{2n}(x)$, die für $x = -nh, \ldots, 0, \ldots, +nh$ die vorgeschriebenen Werte annimmt. Dann fragt es sich, ob $\lim G_\lambda(x)$ konvergent ist. So weit die Konvergenz reicht, ist dann die Funktion durch $\lim G_\lambda(x)$ zu definieren.

Es ist lehrreich, einige einfache Beispiele nach diesen beiden Verfahren durchzuführen und zu sehen, an welche Bedingungen die Konvergenz geknüpft ist.

Erstes Verfahren. Die für $x = 0,\ h,\ 2h, \ldots$ vorgeschriebenen Werte seien: $1, e^h, e^{2h}, \ldots$

Schreibt man:

$$g_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x(x-h)}{1\cdot 2} + \cdots + a_n \frac{x(x-h)\cdots(x-(n-1)h)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n},$$

so ergiebt die Differenzenrechnung bekanntlich $a_\nu h^\nu = \Delta^\nu g_n$ (für $x = 0$).

In unserm Fall ist daher

$$a_\nu h^\nu = (e^h - 1)^\nu$$

und, wenn man $e^h - 1 = u$, $\frac{x}{h} = v$ setzt

$$g_n(x) = 1 + u\cdot v + u^2 \frac{v(v-1)}{1\cdot 2} + \cdots + u^n \frac{v(v-1)\cdots(v-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}$$

Mithin ist $g_n(x)$ gleich der Summe der ersten $n+1$ Glieder in der binomischen Reihe für $(1+u)^v$. Für die Werte von x, die, nicht in der Tabelle vorkommen, ist v nicht gleich einer ganzen positiven Zahl. Die binomische Reihe für $(1+u)^v$ ist alsdann unendlich, und damit sie konvergiert, darf u dem absoluten Betrage nach nicht grösser als 1 sein, oder was desselbe ist, h muss entweder negativ oder nicht grösser als $l(2)$ sein. Dann und nur dann konvergiert $\lim g_n(x)$ und ist gleich $(1+u)^v$ d. i. gleich e^x und zwar für beliebige Werte von x. Sobald h grösser ist als $l(2)$, so lässt sich das Interpolationsverfahren nicht mehr anwenden. Oder mit andern Worten: Soll nach diesem Interpolationsverfahren eine Kurve gezogen werden, die für die Abscissen $0, h, 2h, \ldots$ die Ordinaten $1, e^h, e^{2h}, \ldots$ hat, so ergiebt sich eine bestimmte Curve nur dann, wenn diese Punkte dicht genug aneinander liegen ($h \leqq l(2)$) oder wenn h negativ ist. Für andere Werte von h kann man zwar die Näherungskurven durch die vorgeschriebenen Punkte legen; aber zwischen ihnen weichen die Näherungskurven um beliebig grosse Beträge von einander ab.

Zweites Verfahren. Die für $x = 0, \pm h, \pm 2h, \ldots$ vorgeschriebenen Werte seien: $1, e^{\pm h}, e^{\pm 2h}, \ldots$

Schreibt man:

$$G_{2n}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x(x-h)}{1 \cdot 2} + a_3 \frac{(x+h)x(x-h)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$
$$+ a_{2n} \frac{(x+(n-1)h)(x+(n-2)h) \ldots x(x-h) \ldots (x-nh)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}$$

und

$$G_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x(x-h)}{1 \cdot 2} + a_3 \frac{(x+h)x(x-h)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$
$$+ a_{2n+1} \frac{(x+nh) \cdots (x+h)x(x-h) \cdots (x-nh)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}$$

so ergiebt die Differenzenrechnung auf bekannte Weise

$$a_0 = G, \qquad a_1 h = \Delta G \text{ für } x = 0$$
$$a_2 h^2 = \Delta^2 G, \; a_3 h^3 = \Delta^3 G \text{ für } x = -h$$
$$a_4 h^4 = \Delta^4 G, \; a_5 h^5 = \Delta^5 G \text{ für } x = -2h \text{ u. s. f.}$$

In dem Schema der Differenzen:

$$\begin{array}{llll}
\vdots & \vdots & & \\
G(-2h) & & & \\
 & \Delta G(-2h) & & \\
G(-h) & & \Delta^2 G(-2h) & \\
 & \Delta G(-h) & & \Delta^3 G(-2h) \\
G(0) & & \Delta^2 G(-h) & \\
 & \Delta G(0) & & \Delta^3 G(-h) \\
G(h) & & \Delta^2 G(0) & \\
 & \Delta G(h) & & \\
G(2h) & & & \\
\vdots & \vdots & &
\end{array}$$

stehen, wenn die Differenzen immer in der halben Höhe zwischen den beiden von einander abgezogenen Grössen geschrieben werden, die Werte $a_0, a_2 h^2, a_4 h^4, \ldots\ldots$ auf einer Horizontalreihe und $a_1 h, a_3 h^3, \ldots\ldots$ auf einer anderen Horizontalreihe.

Auf diese Weise findet man aus der Tabelle der Differenzen

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & \Delta & \Delta^2 & \Delta^3 & \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
e^{-2h} & & & & \\
 & e^{-2h} \cdot u & & & \\
e^{-h} & & e^{-2h} \cdot u^2 & & \\
 & e^{-h} \cdot u & & e^{-2h} \cdot u^3 & \\
1 & & e^{-h} \cdot u^2 & & \text{etc.} \\
 & 1 \cdot u & & e^{-h} \cdot u^3 & \\
e^h & & 1 \cdot u^2 & & \\
 & e^h \cdot u & & 1 \cdot u^3 & \\
e^{2h} & & \vdots & &
\end{array}$$

wo u für $e^h - 1$ geschrieben ist, $a_0 = 1$, $a_2 h^2 = e^{-h} u^2$, $a_4 h^4 = e^{-2h} u^4$, etc. und $a_1 h = u$, $a_3 h^3 = e^{-h} u^3$, $a_5 h^5 = e^{-2h} u^5$ etc.

Mithin

$$G_{2n}(x) = 1 + u \cdot \frac{x}{h} + e^{-h} u^2 \frac{x(x-h)}{h \cdot 2h} + e^{-h} u^3 \frac{(x+h)x(x-h)}{h \cdot 2h \cdot 3h} + \cdots$$
$$+ e^{-nh} \cdot u^{2n} \frac{(x+(n-1)h) \cdots (x+h)x(x-h) \cdots (x-nh)}{h \cdots (n-1)h \, nh \, (n+1)h \cdots 2nh}$$

und

$$G_{2n+1}(x) = 1 + u \cdot \frac{x}{h} + e^{-h} u^2 \frac{x(x-h)}{h \cdot 2h} + e^{-h} u^3 \frac{(x+h)x(x-h)}{h \cdot 2h \cdot 3h} + \cdots$$
$$+ e^{-nh} u^{2n+1} \cdot \frac{(x+nh) \cdots (x+h)x(x-h) \cdots (x-nh)}{h \cdots nh \cdot (n+1)h \, (n+2)h \cdots (2n+1)h}$$

Es ist daher $\lim G_\lambda(x)$, wenn $\frac{x}{h} = v$ gesetzt wird, gleich der unendlichen Reihe:

$$\left\{\begin{array}{l}
\quad 1 + e^{-h} \cdot u^2 \cdot \dfrac{v \cdot v-1}{1 \cdot 2} \qquad + e^{-2h} u^4 \cdot \dfrac{v+1 \cdot v \cdot v-1 \cdot v-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots \\
+ u \cdot v + e^{-h} \cdot u^3 \cdot \dfrac{v+1 \cdot v \cdot v-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + e^{-2h} u^5 \cdot \dfrac{v+2 \cdot v+1 \cdot v \cdot v-1 \cdot v-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots\cdots
\end{array}\right.$$

Wie man aus dem Quotienten zweier benachbarter Glieder erkennt, divergiert die Reihe, wenn $e^{-h} u^2 > 4$ ist, und konvergiert, wenn $e^{-h} u^2 < 4$ ist. Nun ist $e^{-h} u^2 = (e^{h/2} - e^{-h/2})^2$. Zur Konvergenz ist also notwendig, dass h nicht ausserhalb der beiden Werte liege, für die

$$\mathfrak{Sin} \frac{h}{2} = \pm 1, \text{ d. i. } h = \pm 1.76275 \cdot\cdot$$

Dass die Reihe wirklich für beliebige Werte von x, soweit sie konvergiert, die Funktion e^x darstellt, ergiebt sich, indem man die Eigenschaften von $G_{2n}(x)$ auf die der oben betrachteten Funktion $g_{2n}(x)$ zurückführt. Nach den obigen Bezeichnungen ist $g_{2n}(x)$ eine ganze Funktion $2n^{\text{ten}}$ Grades, die für $x = 0, h, 2h, \cdots, 2nh$ die Werte $1, e^h, e^{2h}, \cdots, e^{2nh}$ annimmt. $G_{2n}(x)$ ist eine ganze Funktion $2n^{\text{ten}}$ Grades, die für $x = -nh, -(n-1)h, \cdots 0, h \cdots, nh$ die Werte $e^{-nh}, e^{-(n-1)h}, \cdots, e^{-h}, 1, e^h, \cdots, e^{nh}$ annimmt. Folglich ist

$$G_{2n}(x) = e^{-nh} \cdot g_{2n}(x + nh).$$

Nun fanden wir oben, dass $g_{2n}(x)$ gleich der Summe der ersten $2n + 1$ Glieder in der Taylor'schen Entwickelung von $(1 + u)^v$ ist. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz haben wir daher

$$(1 + u)^v = g_{2n}(x) + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{(1+z)^v \cdot u^{2n+1}}{z^{2n+1}(z-u)}\, dz$$

wobei das Integral über eine Kontour im Gebiete der komplexen Zahlen zu erstrecken ist, welche den Punkt u, aber nicht den Punkt -1 einschliesst. Setzt man nun links und rechts für x den Wert $x + nh$ und demnach für v den Wert $v + n$ ein, während u unverändert bleibt, so ergiebt sich

$$(1 + u)^v (1 + u)^n = g_{2n}(x + nh) + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{(1+z)^n (1+z)^v u^{2n+1}}{z^{2n+1}(z-u)}\, dz$$

und, wenn durch $(1 + u)^n = e^{nh}$ auf beiden Seiten dividiert wird:

$$(1 + u)^v = G_{2n}(x) + \frac{1}{2\pi i}\int \left(\frac{1+z}{1+u}\right)^n \cdot \left(\frac{u}{z}\right)^{2n+1} \cdot \frac{(1+z)^v}{z-u}\, dz.$$

Das Integral wird für hinreichend grosse Werte von n beliebig klein, wenn nur für alle Punkte der Kontour $\frac{1+z}{1+u} \cdot \frac{u^2}{z^2}$ dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist. Man kann die Kontour so führen, dass sie dicht um den Teil der reellen Achse von -1 bis $-\infty$ herumläuft, ihn ausschliessend, und dann in einem unendlich grossen Kreise um die ganze komplexe Ebene herum. Der grösste Wert des absoluten Betrages von $\frac{1+z}{z^2}$ ist dabei gleich $\frac{1}{4}$. Es braucht daher nur $\frac{u^2}{1+u}$ dem absoluten Betrage nach kleiner als 4 zu sein, damit $\lim G_{2n}(x)$ gleich $(1 + u)^v = e^x$ ist. Das ist dieselbe Konvergenzbedingung, die wir auch oben fanden.

Wie bei der Interpolation nach dem ersten Verfahren, so finden wir also auch bei dem zweiten Verfahren eine Grenze für die Grösse des Intervalles h. Aus der Tabelle, in der wir uns die Werte e^0, $e^{\pm h}$, $e^{\pm 2h}$, ... ausgerechnet denken, wird in der That die Funktion e^x durch Interpolation gefunden, wenn h nicht grösser ist als 2 Ar Sin 1. Wenn aber h grösser ist als 2 Ar Sin 1, so kann man die Interpolation auf die Tabelle nicht anwenden. Denn wenn man sich auch die Näherungskurven durch die vorgeschriebenen Punkte gezogen denkt,

so weichen sie zwischen den vorgeschriebenen Punkten um beliebig grosse Beträge von einander ab.

Drittes Beispiel. Es soll durch das zweite Verfahren eine Funktion gesucht werden, welche für äquidistante Werte der Veränderlichen die Werte

$$\ldots\ldots 0, -1, 0, +1, 0, -1, 0 \ldots\ldots$$

annimmt.

Das Schema der Differenzen giebt:

	$\varDelta$	$\varDelta^2$	$\varDelta^3$	$\varDelta^4$
:				
	:			
0				
	-1			
-1		$+2$	-2	
	$+1$			
0		0	-2	0
	$+1$			
$+1$		-2	$+2$	$+4$
	-1			
0		0	$+2$	0
	-1			
-1		$+2$		
	$+1$			
0				

Mithin erhalten wir die unendliche Reihe

$$\frac{x}{h} - 2\,\frac{x+h \cdot x \cdot x-h}{h \cdot 2h \cdot 3h} + 4 \cdot \frac{x+2h \cdot x+h \cdot x \cdot x-h \cdot x-2h}{h \cdot 2h \cdot 3h \cdot 4h \cdot 5h} - \cdots$$

und haben nur zu untersuchen, ob diese Reihe konvergiert. Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder ist

$$-2 \cdot \frac{(x+nh)(x-nh)}{2nh \cdot (2n+1)h} = -\frac{x^2}{n(2n+1)h^2} + \frac{n}{2n+1}$$

und wird also für hinreichend grosse Werte von n, was auch für x und h für Werte angenommen sein mögen, kleiner als $\frac{1}{2}$. Die Reihe konvergiert mithin für alle Werte von x und h.

Es lässt sich in der folgenden Weise zeigen, dass diese Reihe nichts anderes ist als $\sin\left(\frac{x\pi}{h\,2}\right)$.

Wir fanden oben

$$e^x = 1 + e^{-h} u^2 \frac{v \cdot v-1}{1 \cdot 2} + e^{-2h} u^4 \frac{v+1 \cdot v \cdot v-1 \cdot v-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$
$$+ u \cdot v + e^{-h} u^3 \frac{v+1 \cdot v \cdot v-1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, e^{-2h} u^5 \frac{v+2 \cdot v+1 \cdot v \cdot v-1 \cdot v-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$$

wo $v = \frac{x}{h}$ und $u = e^h - 1$ geschrieben war.

Wir schreiben diese Formel in etwas anderer Weise:

$$e^{hv} = A + (e^h - 1)\,B,$$

wo

$$A = 1 + e^{-h} u^2 \frac{v \cdot v - 1}{1 \cdot 2} + e^{-2h} u^4 \cdot \frac{v + 1 \cdot v \cdot v - 1 \cdot v - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

$$B = v + e^{-h} u^2 \frac{v + 1 \cdot v \cdot v - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + e^{-2h} u^4 \cdot \frac{v + 2 \cdot v + 1 \cdot v \cdot v - 1 \cdot v - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$$

Man bemerke nun, dass $e^{-h} u^2 = 4 \,\mathfrak{Sin}^2 \frac{h}{2}$ ist und sich also nicht ändert, wenn man h in $-h$ verwandelt, dass folglich auch A und B bei Verwandlung von h in $-h$ unverändert bleiben.

Man hat daher neben der Gleichung

$$e^{hv} = A + (e^h - 1) B$$

auch die Gleichung

$$e^{-hv} = A + (e^{-h} - 1) B.$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\mathfrak{Sin}\,(hv) = \mathfrak{Sin}\,h \cdot B$$

oder

$$\mathfrak{Sin}\,x =$$

$$= \mathfrak{Sin}\,h \left[v + 2^2 \mathfrak{Sin}^2 \frac{h}{2} \frac{v + 1 \cdot v \cdot v - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 2^4 \mathfrak{Sin}^4 \frac{h}{2} \cdot \frac{v + 2 \cdot v + 1 \cdot v \cdot v - 1 \cdot v - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots \right]$$

Verwandeln wir nun x in ix und zugleich h in ih, so dass $v = \frac{x}{h}$ also ungeändert bleibt, so ergiebt sich, nachdem der Faktor i weggehoben ist:

$$\sin x =$$

$$= \sin h \left[v - 2^2 \sin^2 \frac{h}{2} \frac{v + 1 \cdot v \cdot v - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 2^4 \sin^4 \frac{h}{2} \frac{v + 2 \cdot v + 1 \cdot v \cdot v - 1 \cdot v - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots \right]$$

Für $h = \frac{\pi}{2}$ geht diese Reihe in die oben gefundene Reihe über.

Es zeigt sich also, dass die Tabelle der Werte ... 0, -1, 0, $+1$, 0, -1, 0 ... genügt um die Sinusfunktion zu definieren. Wenn wir die Kurve, die das gewählte Interpolationsverfahren liefert, eine „glatte“ Kurve nennen, so würden wir das Resultat so aussprechen können: Legt man durch die äquidistanten Ordinaten ... 0, -1, 0, $+1$, 0, -1, ... eine glatte Kurve, so erhält man die Sinuskurve.

Diese Beispiele beziehen sich aber noch nicht eigentlich auf den in den beobachtenden Wissenschaften vorliegenden Fall. Denn erstens hat man es niemals mit einer unendlichen Reihe von beobachteten Werten zu thun und zweitens sind beobachtete Werte niemals absolut genau. Ich lasse den zweiten Umstand ausser Betracht und stelle die Aufgabe so: „Es seien die Werte einer Funktion von x für eine endliche Anzahl äquidistanter Werthe von x gegeben. Unter welchen Umständen kann man erwarten, dass die ganze rationale Funktion niedrigsten Grades, die für dieselben Werte von x die gegebenen Werte annimmt, auch eine gewisse Annäherung an die Funktion für die Zwischenwerte von x darstellt?“ Oder besser ausgedrückt, unter welchen Umständen wird die Annäherung, wenn man mehr und mehr äquidistante Werte von x zwischen gegebenen Grenzen einschaltet, eine beliebige Genauigkeit erreichen?

Um dieser Frage näher zu treten, soll der Cauchy'sche Integralsatz auf die Differenzenrechnung erweitert werden. Es sei $f(x)$ eine Funktion eines complexen Argumentes, die sich in irgend einem zusammenhängenden Gebiete regulär verhält, so dass

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)\, dz}{z - x},$$

wenn das Integral um den Rand des Gebietes erstreckt wird. Es seien nun $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n von einander verschiedene Werte der Veränderlichen, die im Innern des betrachteten Gebietes liegen.

Nun ist:

$$\frac{1}{z - x} = \frac{1}{z - x_\alpha} + \frac{x - x_\alpha}{z - x_\alpha} \cdot \frac{1}{z - x}$$

und daher:

$$\frac{1}{z - x} = \frac{1}{z - x_1} + \frac{x - x_1}{z - x_1} \cdot \frac{1}{z - x}$$

$$\frac{1}{z - x} = \frac{1}{z - x_1} + \frac{x - x_1}{z - x_1} \cdot \frac{1}{z - x_2} + \frac{x - x_1}{z - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{z - x_2} \cdot \frac{1}{z - x}$$

u. s. w.

Bezeichnet man mit $g_\nu(x)$ die ganze rationale Funktion νten Grades:

$$g_\nu(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_\nu),$$

so kann man die sich ergebende allgemeine Formel so schreiben:

$$\frac{1}{z - x} = \frac{1}{g_1(z)} + \frac{g_1(x)}{g_2(z)} + \frac{g_2(x)}{g_3(z)} + \cdots + \frac{g_{n-1}(x)}{g_n(z)} + \frac{g_n(x)}{g_n(z)} \cdot \frac{1}{z - x}$$

Indem man diese Entwicklung in das Integral von Cauchy einsetzt, ergiebt sich für $f(x)$ die Entwicklung:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{g_1(z)}\, dz + \frac{g_1(x)}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{g_2(z)}\, dz + \cdots + \frac{g_{n-1}(x)}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{g_n(z)}\, dz$$

$$+ \frac{g_n(x)}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{g_n(z)} \frac{dz}{z - x}.$$

Die Summe der ersten n Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung bildet eine ganze rationale Funktion von x, deren Grad nicht höher ist als $n - 1$. Bezeichnet man sie mit $G_n(x)$, so ist also:

$$f(x) = G_n(x) + \frac{g_n(x)}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{g_n(z)} \frac{dz}{z - x}.$$

Da nun $g_n(x)$ für die n Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschwindet, so stimmt $G_n(x)$ an diesen Stellen mit $f(x)$ überein. Nun ist aber eine ganze rationale Funktion von nicht höherem als dem $n-1$ten Grade durch n ihrer Werte eindeutig bestimmt. Folglich stellt $G_n(x)$ die Funktion niedrigsten Grades dar, die an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $f(x)$ übereinstimmt. Es seien nun zwei reelle Werte a und b $(b > a)$ gegeben. Wir denken uns dann das Intervall a bis b in $n-1$ gleiche Teile geteilt und setzen $x_1 = a$, $x_n = b$, während $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ die Teilpunkte in der Reihenfolge von a bis b bezeichnen. Von der Funktion $f(x)$ soll die Annahme gemacht werden, dass sie eine analytische Funktion ist, die sich in dem ganzen Intervall von a bis b regulär verhält, so dass sich mithin in der komplexen Zahlenebene ein Gebiet angeben lässt, das die ganze Strecke a bis b umschliesst und in seinem Innern sowohl wie auf seinem Rande nur Punkte enthält, in denen sich $f(x)$ regulär verhält. Um den Rand dieses Gebietes erstrecken wir das Cauchy'sche Integral und haben, wie oben gezeigt wurde:

$$f(x) = G_n(x) + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{g_n(x)}{g_n(z)}\,\frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

Wenn wir nun nachweisen könnten, dass für hinreichend grosse Werte von n auf dem Rande des Gebietes $g_n(x)$ absolut genommen gegen $g_n(z)$ beliebig klein wird, so würde damit gezeigt sein, dass $G_n(x)$ beliebig wenig von $f(x)$ verschieden ist.

Um darüber Aufschluss zu gewinnen, betrachten wir den Ausdruck

$$\frac{1}{z-c}\sqrt[n]{g_n(z)} \quad \left(c = \frac{a+b}{2}\right)$$

als Funktion des komplexen Arguments z. Unter den n Werten, die dieser Ausdruck haben kann, treffen wir die folgende Auswahl.

Wenn man z die Strecke a bis b nicht überschreiten lässt, so sind dadurch die n Werte von einander getrennt, so dass sie bei kontinuierlicher Änderung von z nicht in einander übergehen können. Wir wählen nun denjenigen unter den Werten, der, wenn z ins Unendliche übergeht, gleich 1 wird. Der Logarithmus wird dann im Unendlichen gleich Null und wir können daher den Logarithmus des gewählten Wertes so schreiben:

$$\log\left(\frac{1}{z-c}\sqrt[n]{g_n z}\right) = \int_\infty^z \left(\frac{1}{n}\,\frac{g_n'(z)}{g_n(z)} - \frac{1}{z-c}\right) dz$$

Dabei ist nur zu beachten, dass der Integrationsweg die Strecke a bis b nicht überschreiten darf.

Bezeichne nun r für irgend einen Wert z den kleinsten Abstand zwischen z und allen Punkten der Strecke a_0 bis b, wo a_0 für $a - \frac{b-a}{n-1}$ geschrieben ist; dann wird für Werte von n, die grösser sind als $\frac{b-a_0}{r}$, der absolute Betrag von $z - x_\alpha$ grösser sein als der von $x_\alpha - x_{\alpha-1}$ $= \frac{b-a_0}{n}$. Daher lässt sich $\log\left(1 + \frac{x_\alpha - x_{\alpha-1}}{z - x_\alpha}\right)$ in eine konvergente Reihe nach Potenzen von $\frac{x_\alpha - x_{\alpha-1}}{z-x_\alpha}$ entwickeln und es wird der Unterschied zwischen $\log\left(1 + \frac{x_\alpha - x_{\alpha-1}}{z-x_\alpha}\right) = \log\frac{z - x_{\alpha-1}}{z-x_\alpha}$ und dem ersten Gliede der Entwickelung $\frac{b-a_0}{n(z-x_\alpha)}$ dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b-a_0}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{(z-x_\alpha)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{b-a_0}{nr}}$$

Bedeutet x den Punkt der Strecke ab, der dem Punkte z am nächsten liegt, so kann man a fortiori hierfür setzen:

$$\frac{1}{2}\,\frac{(b-a_0)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{(z-x)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{b-a_0}{nr}}$$

Mithin wird die Summe

$$\sum \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{z-x_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \cdots n)$$

von der Summe

$$\frac{1}{b-a_0}\sum \log\frac{z-x_{\alpha-1}}{z-x_\alpha} = \frac{1}{b-a_0}\log\frac{z-x_0}{z-x_n} \quad \left(x_0 = x_1 - \frac{b-a}{n-1}\right)$$

dem absoluten Betrage nach weniger abweichen als

$$\frac{1}{2}\,\frac{(b-a_0)}{n} \cdot \frac{1}{(z-x)^2}\,\frac{1}{1 - \frac{b-a}{nr}}$$

Nun schreiben wir:

$$\log\left(\frac{1}{z-c}\sqrt[n]{g_n(z)}\right) = \int_\infty^z \left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z-x_1} + \frac{1}{z-x_2} + \cdots + \frac{1}{z-x_n}\right) - \frac{1}{z-c}\right] dz$$

Denken wir uns hier nun die Integration von ∞ bis z auf einer Geraden senkrecht zur Geraden ab vorgenommen, so wird man für das Integral schreiben können:

$$\int_\infty^z \left(\frac{1}{b-a_0}\log\frac{z-x_0}{z-x_n} - \frac{1}{z-c}\right) dz.$$

Der dabei begangene Fehler wird dem absoluten Betrage nach kleiner sein als

$$\frac{1}{2}\,\frac{b-a_0}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{b-a_0}{nr}}\cdot\int\limits_{\infty}^{z}\frac{dz}{(z-x)^2}$$

d. h. kleiner als

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\,\frac{b-a_0}{r-\frac{b-a_0}{n}}.$$

Für hinreichend grosse Werte von n wird also der Fehler beliebig klein.

Die Integration lässt sich ausführen und liefert

$$\frac{1}{b-a_0}\left[(z-x_0)\log(z-x_0)-(z-x_n)\log(z-x_n)\right]-\log(z-c)-1.$$

Für hinreichend grosse Werte von n sind x_0 und a_0 beliebig wenig von x_1 und a_1 verschieden, und daher kann man auch schreiben:

$$\frac{1}{b-a}\left[(z-x_1)\log(z-x_1)-(z-x_n)\log(z-x_n)\right]-\log(z-c)-1.$$

Setzt man hierin $z-x_1=z-a=z-c+\frac{b-a}{2}$,

$$z-x_n=z-b=z-c-\frac{b-a}{2},$$

so kann man auch schreiben;

$$\frac{z-c}{b-a}\log\frac{z-a}{z-b}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{z-a}{z-c}\cdot\frac{z-b}{z-c}\right)-1.$$

Die Logarithmen sind dabei so zu nehmen, dass sie verschwinden, wenn z ins Unendliche rückt, ohne dabei die Strecke ab zu überschreiten. Um das Resultat dieser Überlegung noch einmal zusammenzufassen, so ist also:

$$\lim_{n=\infty}\log\left(\frac{1}{z-c}\sqrt[n]{g_n(z)}\right)=\frac{z-c}{b-a}\log\frac{z-a}{z-b}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{z-a}{z-c}\cdot\frac{z-b}{z-c}\right)-1$$

oder auch, indem man auf beiden Seiten $\log(z-c)$ hinzufügt:

$$\lim_{n=\infty}\log\sqrt[n]{g_n(z)}=\frac{z-c}{b-a}\log\frac{z-a}{z-b}+\frac{1}{2}\log(z-a)(z-b)-1.$$

Die rechte Seite ist ein Zweig einer analytischen Funktion, eindeutig definiert für alle Werte von z, die nicht auf der Strecke ab liegen. Wir zerlegen ihn in seinen reellen und imaginären Teil und schreiben

$$\lim_{n=\infty}\log\sqrt[n]{g_n(z)}=U+Vi$$

$$\text{oder}\quad\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{g_n(z)}=e^U\cdot e^{Vi}.$$

Der absolute Betrag von $\sqrt[n]{g_n(z)}$ nähert sich danach mit wachsendem n dem Werte e^U. Für hinreichend grosse Werte von n wird daher auf den Kurven $U=$ Konst. der absolute Betrag von $g_n(z)$ sich sehr wenig ändern.

Über den Verlauf der Kurven $U=$ Konst. gewinnt man am besten einen Überblick, wenn man sie sich als die rechtwinkligen Trajektorien der Kurven $V=$ Konst. vorstellt und diese wieder sich als die Stromlinien einer unendlich dünnen reibungslosen Flüssigkeitsschicht vorstellt, deren Geschwindigkeitspotential U ist. Für hinreichend grosse Werte von z ist U beliebig wenig von $\log|z-c|$ verschieden. Die Kurven $U=$ Konst. gehen also für grosse Werte von U mehr und mehr in konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt c über. Verfolgt man von einer dieser Kurven aus die Stromlinien rückwärts d. h. also ins Innere des Gebietes hinein, so ist klar, dass sie nur auf der Geraden ab endigen können. Die Flüssigkeit hat man sich als aus dem Spalt ab dringend und nach allen Seiten ins Unendliche fliessend vorzustellen. In jedem Punkte der Linie ab hat $U+Vi$ zwar zwei Werte; aber, wie man aus der Formel unmittelbar erkennt, sind nur die beiden Werte von V von einander verschieden, während U in jedem Punkte nur einen Wert hat. Ferner zeigt sich sofort, dass U in Punkten, die entweder in Bezug auf die x-Achse oder in Bezug auf die durch c gelegte y-Achse Spiegelbilder von einander sind, den gleichen Wert hat. Auf der Geraden ab hat U seinen kleinsten Wert im Punkte c und nimmt nach beiden Seiten zu. Wenn man statt $U+Vi$ die Funktion $\log\sqrt[n]{g_n(z)}$ betrachtet, so ist die entsprechende Strömung für hinreichend grosse Werte von n sehr nahe dieselbe ausser in der Nähe der Geraden ab. Denn hier haben wir uns jetzt die Flüssigkeit aus den n Löchern $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hervorquellend vorzustellen statt aus einem Spalt. Die Kurven, auf denen der reelle Teil von $\log\sqrt[n]{g_n(z)}$ konstant ist, schnüren sich in der Nähe der Löcher zu je n geschlossenen Kurven ab, von denen jede ein Loch einschliesst. Dies Abschnüren kommt dagegen bei den Kurven $U=$ Konst. nicht vor, für die U durchaus endlich bleibt. Selbst bei $z=c$, wo sich die Kurven $U=$ Konst. zu einem Punkt zusammenziehen, liegt kein eigentliches Abschnüren vor, sondern es rücken die beiden Teile der Kurve, die auf verschiedenen Seiten von ab liegen, auf ein anderes Blatt der Riemann'schen Fläche, das für unser Problem nicht in Betracht kommt.

Für die vorliegende Frage spielt nun diejenige Kurve $U=$ Konst. eine wesentliche Rolle, welche durch die beiden Punkte a und b läuft. Setzen wir in der Form

$$U + Vi = \frac{(z-a)\log(z-a) - (z-b)\log(z-b)}{b-a} - 1,$$

$z = a$ oder $z = b$, so wird beide Male

$$U = \log(b-a) - 1.$$

Schreiben wir ferner

$$z - a = r_a e^{\alpha i}$$
$$z - b = r_b e^{\beta i},$$

so wird:

$$(b-a)\,U = r_a \cos\alpha \log r_a - r_a \sin\alpha \cdot \alpha - r_b \cos\beta \log r_b + r_b \sin\beta \cdot \beta - (b-a).$$

Nun ist aber $r_a \cos\alpha - r_b \cos\beta = b - a$

$$r_a \sin\alpha = r_b \sin\beta,$$

folglich kann man schreiben:

$$(b-a)\,U = (b-a)\log r_a + r_b \cos\beta \log \frac{r_a}{r_b} + r_b \sin\beta\,(\beta - \alpha) - (b-a).$$

Setzt man $z - c = x + yi$, so dass x und y also die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes z sind in einem System, dessen x-Achse in die Grade ab und dessen y-Achse in c auf ab senkrecht steht, so hat man

$$r_b \cos\beta = -\frac{b-a}{2} + x$$
$$r_b \sin\beta = y$$

und daher, wenn $\frac{b-a}{2} = m$ geschrieben wird:

$$2mU = 2m \log r_a - m \log \frac{r_a}{r_b} + x \log \frac{r_a}{r_b} + y(\beta - \alpha) - 2m$$

$$= m \log r_a r_b + x \log \frac{r_a}{r_b} + y(\beta - \alpha) - 2m.$$

Die Kurven $U =$ Konst. schreiben wir nun

$$U = \log(pm) - 1,$$

wo $p = 2$ derjenigen Kurve entspricht, die durch die Punkte $z = a$ und $z = b$ läuft, während für grössere positive Werte von p die Kurven sich immer weiter ausdehnen.

Die Gleichung

$$U = \log(pm) - 1$$

bringen wir in die Form:

$$\log \frac{r_a}{m}\frac{r_b}{m} + \frac{x}{m}\log\frac{r_a}{r_b} + \frac{y}{m}(\beta - \alpha) = 2\log p.$$

Hierin bedeutet $\beta - \alpha$ den Winkel bei z in dem Dreieck z, a, b, positiv oder negativ, je nachdem y positiv oder negativ ist. Diese Form zeigt, dass man für verschiedene Wertepaare ab ähnliche Kurven erhält, die zu den Strecken ab ähnlich liegen. Es genügt daher zur

Untersuchung der Kurven $a = -1$ und $b = +1$ und damit $m = 1$ zu setzen. Da ferner die Kurven symmetrisch zur x- und y-Achse liegen, so braucht man sie nur für positive Werte von x und y zu konstruieren. Man berechnet zu dem Ende für eine Reihe von Punkten (x, y) die Werte von

$$\log(r_a r_b) + x \log\frac{r_a}{r_b} + y(\beta - \alpha)$$

oder auch

$$(1 + x)\log r_a + (1 - x)\log r_b + y(\beta - \alpha)$$

und interpoliert zwischen ihnen die Punkte, in denen der Ausdruck denselben Wert hat. Da keine grosse Genauigkeit verlangt wird, so kann man die Werte von r_a, r_b, $\beta - \alpha$, die zu einem Wertepaare x, y gehören, durch Zeichnung finden. Statt der natürlichen Logarithmen multipliziert man besser mit $\log e$ und kann in dem Ausdruck

$$(1 + x)\log r_a + (1 - x)\log r_b + y(\beta - \alpha)\log e$$

überall Brigg'sche Logarithmen nehmen. In der folgenden Tabelle sind die Werte dieses Ausdruckes für einige Wertepaare x, y enthalten:

	$y=0$	$y=\pm 0.1$	$y=\pm 0.2$	$y=\pm 0.3$	$y=\pm 0.4$	$y=\pm 0.5$	$y=\pm 0.6$
$x=0$	0.000	0.132	0.255	0.370	0.477	0.576	0.670
$x=\pm 0.2$	0.017	0.149	0.272	0.386	0.492	0.591	0.683
$x=\pm 0.4$	0.071	0.203	0.324	0.435	0.538	0.633	
$x=\pm 0.6$	0.167	0.297	0.414	0.520	0.616	0.704	
$x=\pm 0.8$	0.320	0.445	0.550	0.641	0.724		
$x=\pm 1$	0.602	0.670	0.734				

Zwischen den Werten in einer Horizontalreihe lässt sich sehr gut interpolieren, da die zweiten Differenzen nur um wenige Einheiten der dritten Stelle von einander abweichen. Die Kurve $U = \log(b-a) - 1$ hat etwa die Gestalt einer Ellipse mit der grossen Achse $b - a$ und der kleinen Achse $0.5255\,(b-a)$. An den Enden der grossen Achse ist unsere Kurve aber spitzer als eine Ellipse.

Jede der inneren Kurven hat dagegen die Gestalt, als wäre sie aus zwei Kreisbögen zusammengesetzt, deren gemeinsame Sehne in die r-Achse fällt. In der Fig. 1 sind ausser der Kurve

$$\text{(I)}\quad U = \log(b-a) - 1$$

noch vier der inneren Kurven gezeichnet:

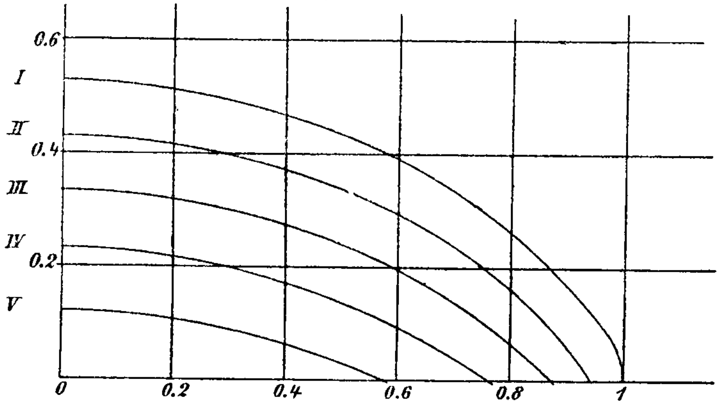
$$\text{(II)}\quad U = \log 0.9\,(b-a) - 1$$
$$\text{(III)}\quad U = \log 0.8\,(b-a) - 1$$
$$\text{(IV)}\quad U = \log 0.7\,(b-a) - 1$$
$$\text{(V)}\quad U = \log 0.6\,(b-a) - 1.$$

Im Punkte c ist $U = \log 0.5\,(b-a) - 1$. Die Figur enthält nur den 4. Teil jeder Kurve. Die übrigen Teile gehen aus dem gezeichneten durch Spiegelung an der x- und y-Achse hervor.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die gestellte Frage beantworten.

Es verhalte sich die Funktion $f(x)$ regulär über das Gebiet hinaus, das von der Kurve $U = \log(b-a) - 1$ umschlossen wird. Wir wollen uns dann zwei U-Kurven denken, die beide die Kurve $U = \log(b-a)$

Fig. 1.



-1 umschliessen, aber beide noch innerhalb des Gebietes liegen, in welchem sich $f(x)$ regulär verhält. Die eine der beiden Kurven $U = U_1$ umschliesse die andere $U = U_2$, so dass $U_1 > U_2$. Wenn nun z auf der Kurve $U = U_1$ und x auf der Kurve $U = U_2$ liegt, so ist für hinreichend grosse Werte von n $\left|\sqrt[n]{g_n(z)}\right|$ sehr wenig von e^{U_1} und $\left|\sqrt[n]{g_n(x)}\right|$ sehr wenig von e^{U_2} verschieden. Mithin ist

$$\left|\sqrt[n]{\frac{g_n(x)}{g_n(z)}}\right| \text{ nahezu gleich } e^{U_2 - U_1}.$$

Da nun $U_1 > U_2$, so ist $e^{U_2 - U_1}$ kleiner als 1. Es lässt sich daher eine positive Zahl $k < 1$ angeben von der Art, dass von einem gewissen Werte von n ab für alle grösseren Werte von n

$$\left|\sqrt[n]{\frac{g_n(x)}{g_n(z)}}\right| \leqq k < 1$$

und daher

$$\left|\frac{g_n(x)}{g_n(z)}\right| \leqq k^n$$

ist. Für hinreichend grosse Werte von n wird daher $\frac{g_n(x)}{g_n(z)}$ dem abso-

luten Betrage nach so klein, wie man nur immer will, und mithin wird das über die Kurve U_1 erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{g_n(x)}{g_n(z)}\,\frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

so klein, wie man nur immer will, d. h. die Funktion $f(x)$ wird auf der ganzen Kurve U_2 mit beliebiger Genauigkeit durch die ganze Funktion $G_n(x)$ dargestellt.

Nach einem bekannten Satze ist nun die Abweichung zwischen $f(x)$ und $G_n(x)$ in dem ganzen von der Kurve U_2 umschlossenen Gebiete absolut genommen kleiner, als die grösste Abweichung auf der Kurve U_2 selbst. Mithin wird die Funktion $f(x)$ in dem ganzen von U_2 umschlossenen Gebiet mit beliebiger Genauigkeit durch die Näherungen $G_n(x)$ dargestellt.

Die Kurven U_1 und U_2 kann man so lange noch erweitern, so lange sie noch keine singulären Punkte der Funktion $f(x)$ enthalten. Wenn daher $f(x)$ im endlichen keine singulären Stellen besitzt, so wird der Bereich der gleichmässigen Konvergenz von

$$f(x) = \lim G_n(x)$$

die ganze komplexe Zahlenebene umfassen. Wenn dagegen im Endlichen singuläre Stellen vorkommen, so wird der Bereich der gleichmässigen Konvergenz sich über das Innere derjenigen U-Kurve erstrecken, die durch wenigstens eine singuläre Stelle hindurchgeht, ohne singuläre Stellen zu umschlingen.

Unter dieser Voraussetzung kann man also zwischen den beobachteten Werten nicht bloss interpolieren, sondern man kann sogar über sie hinaus extrapolieren, so lange man nur innerhalb des Konvergenzbereiches bleibt. Anders gestaltet sich die Sache dagegen in dem Falle, wo $f(x)$ nicht mehr im Innern der durch die Punkte a, b laufenden U-Kurve sich regulär verhält, wenn auch auf der Strecke a, b selbst keine singuläre Stelle liegt. Wir müssen dann zu U-Kurven übergehen, die weiter im Innern liegen. Es sei U_1 eine U-Kurve, die ganz im Innern des Gebietes liegt, wo $f(x)$ sich regulär verhält. Diese U-Kurve schneidet die Strecke ab in zwei Punkten $a'b'$. Wir bilden nun eine Umschlingung der Strecke ab, indem wir diese U-Kurve bis nahe an die Punkte $a'b'$ durchlaufen, in der Nähe dieser Punkte aber Parallelen zu ab anschliessen, die bei a und b durch Halbkreise mit einander verbunden werden (Fig. 2).

Über diese Umschlingung erstrecken wir das Integral

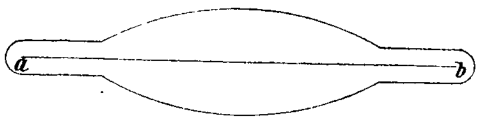
$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{g_n(x)}{g_n(z)}\,\frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

Liegt nun x im Innern der U-Kurve, so lässt sich wieder zeigen, dass für hinreichend grosse Werte von n

$$\left| \sqrt[n]{\frac{g_n(x)}{g_n(z)}} \right| < k < 1$$

und mithin das Integral beliebig klein werden wird. Denn der absolute Betrag von $\lim \sqrt[n]{g_n z}$ ist nach dem Obigen auf den Randteilen, die ausserhalb der U-Kurve liegen, noch grösser als auf der U-Kurve selbst, während $\lim \sqrt[n]{g_n(x)}$, da x im Innern der U-Kurve liegt, absolut genommen kleiner sein muss. Dies ist oben zunächst nur für den Fall nachgewiesen, wo x nicht auf der Strecke ab liegt. Aber es lässt sich auch dann noch in der folgenden Weise zeigen. Liegt x auf der Strecke ab zwischen x_α und $x_{\alpha+1}$, so ist, wenn man $\frac{b-a}{n-1} = h$ setzt:

Fig. 2.



$$\begin{array}{ll} |x - x_\alpha| < h & |x - x_{\alpha+1}| < h \\ |x - x_{\alpha-1}| < 2h & |x - x_{\alpha+2}| < 2h \\ \vdots & \\ |x - x_1| < \alpha h & |x - x_n| < (n-\alpha)h \end{array}$$

und mithin:

$$|g_n(x)| < \alpha!\,(n-\alpha)!\,h^n$$

Nun ist nach der Stirling'schen Formel

$$\log \alpha! = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + \frac{2\alpha+1}{2}\log\alpha - \alpha + \frac{\mu}{12\alpha} \quad (\mu \text{ zwischen } 0 \text{ und } 1)$$

$$\log(n-\alpha)! = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + \frac{2(n-\alpha)+1}{2}\log(n-\alpha) - (n-\alpha) + \frac{\mu'}{12(n-\alpha)}$$

$(\mu'$ zwischen 0 und 1)

Mithin ist

$$\frac{1}{n}\log|g_n(x)| < \frac{1}{n}\log 2\pi + \log(n-\alpha) + \frac{\alpha}{n}\log\frac{\alpha}{n-\alpha} + \frac{1}{2n}\log\alpha(n-\alpha)$$
$$-1 + \frac{\mu}{12\alpha n} + \frac{\mu'}{12(n-\alpha)n} + \log h.$$

Lassen wir nun n grösser und grösser werden, während x ungeändert bleibt, so wird auch α grössere Werte annehmen müssen, damit x immer zwischen x_α und $x_{\alpha+1}$ liegt. Der Bruch $\frac{\alpha}{n-\alpha}$ wird sich dabei dem festen Werte $\frac{x-a}{b-x}$ mehr und mehr nähern, $\frac{\alpha}{n}$ wird sich dem Wert $\frac{x-a}{b-a}$ mehr und mehr nähern, $\frac{n-\alpha}{n}$ dem Werte $\frac{b-x}{b-a}$. Daher erhalten wir:

$$\lim \frac{1}{n}\log|g_n(x)| \leq \log(b-x) + \frac{x-a}{b-a}\log\frac{x-a}{b-x} - 1$$

oder

$$\lim \frac{1}{n}\log|g_n(x)| \leq \tfrac{1}{2}\log(b-x)(x-a) + \frac{x-c}{b-a}\log\frac{x-a}{b-x} - 1.$$

Der Wert der rechten Seiten stimmt mit dem Werte von U an der betreffenden Stelle überein.

Damit ist also gezeigt, dass das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{g_n(x)}{g_n(z)}\,\frac{f(x)}{z-x}\,dz$$

für jeden Wert von x im Innern der U-Kurve beliebig klein wird und damit ist der Beweis für die Konvergenz des Ausdruckes

$$f(x) = \lim G_n(x)$$

erbracht, wo $G_n(x)$ die ganze rationale Funktion niedrigsten Grades bedeutet, die für die n-Werte $x_1\, x_2 \ldots x_n$ mit $f(x)$ übereinstimmt. So lange die U-Kurve keine singuläre Stelle enthält, können wir sie durch eine grössere U-Kurve ersetzen. Der Konvergenzbereich erfüllt daher das ganze Innere derjenigen U-Kurve, die durch wenigstens eine singuläre Stelle hindurchgeht, ohne singuläre Stellen zu umschlingen. Je nach der Lage der singulären Stellen also wird der Konvergenzbereich des Ausdruckes

$$f(x) = \lim G_n(x)$$

nur einen Teil der Strecke ab oder die ganze Strecke ab enthalten. Denn dass der Konvergenzbereich über die betreffende U-Kurve nicht hinausreicht, ergiebt sich daraus, dass für einen Wert von x ausserhalb der U-Kurve und einen Wert von z auf der U-Kurve

$$\lim \left| \sqrt[n]{\frac{g_n(x)}{g_n(z)}} \right| > K > 1$$

ist. Dies gilt auch noch für Werte von x, die auf der Strecke ab, aber in der Mitte zwischen zwei benachbarten Nullstellen der Funktion $g_n(x)$ gewählt werden.

Es ist dann nämlich

$$|g_n(x)| = 1\,.\,3\,.\,5 \ldots 2\alpha - 1\,.\,1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2(n-\alpha)-1)\cdot\frac{h}{2}.$$

Nun ist $1\,.\,3 \ldots 2\alpha - 1 = \frac{2\alpha!}{2^\alpha \alpha!}$

und damit erhält man nach der Stirling'schen Formel in ähnlicher Weise wie oben

$$\frac{1}{n}\log|g_n(x)| = \frac{1}{2}\log(x-a)(b-x) + \frac{x-c}{b-a}\log\frac{x-a}{b-x} - 1.$$

Selbst auf der Strecke ab kann man also ausserhalb der betreffenden U-Kurve Werte von x finden, für welche $\frac{g_n(x)}{g_n(z)}$ mit wachsendem n wie K^n unendlich wird. Für solche Werte kann das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{g_n(x)}{g_n(z)} \frac{f(z)}{z-x} dz$$

nicht beliebig klein werden, wenigstens nicht, so lange über $f(z)$ keine weiteren Voraussetzungen gemacht werden.

Somit erhält man das überraschende Resultat, dass, so bald singuläre Stellen von $f(x)$ im Innern der Kurve

$$U = \log(b-a) - 1$$

liegen, die Interpolation mit Hülfe der Funktionen $G_n(x)$ nur für einen beschränkten Teil der Strecke ab möglich ist.

Dies möge für einen speziellen Fall noch etwas weiter ausgeführt werden.

Es sei $U = C$ die Gleichung einer U-Kurve, welche die Strecke ab und eine singuläre Stelle z_1 der Funktion $f(x)$ umschliesst. An dieser Stelle soll $f(x)$ von erster Ordnung unendlich werden.

Wir denken uns nun aus dem Gebiete einen kleinen Kreis ausgeschlossen, der die Stelle z_1 zum Mittelpunkt hat. Über den gesamten Rand des so modifizierten Gebietes denken wir uns das Integral erstreckt und haben dann wie oben:

$$f(x) = G_n(x) + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{g_n(x)}{g_n(z)} \frac{f(z)}{z-x} dz$$

Den Teil des Integrals, der über den kleinen Kreis erstreckt ist, denken wir uns besonders ausgeführt. Auf dem Kreise ist $\frac{g_n(x)}{g_n(z)} \cdot \frac{1}{z-x}$ sehr nahe konstant um so mehr, je kleiner der Kreis genommen wird, und bei den über $f(z)$ gemachten Annahmen wird der über den Kreis erstreckte Teil gleich:

$$c \cdot \frac{g_n(x)}{g_n(z_1)} \frac{1}{z_1 - x},$$

wo c eine von Null verschiedene Konstante bedeutet. Der übrige Teil des Integrals wird für hinreichend grosse Werte von n beliebig klein, weil für Werte von z, die auf der U-Kurve liegen, der absolute Betrag von $\sqrt[n]{g_n(z)}$ grösser ist, als der von $\sqrt[n]{g_n(x)}$, da x einen im Innern liegenden Punkt bedeutet. Wenn wir nun die U-Kurve konstruiert denken, die durch z_1 läuft, so ist klar, dass für einen Wert von x, der ausserhalb dieser Kurve liegt, der Term $c\frac{g_n(x)}{g_n(z_1)} \cdot \frac{1}{z_1 - x}$ für hinreichend grosse Werte von n beliebig gross wird, und dass daher $f(x) - G_n(x)$ für hinreichend grosse Werte von n beliebig gross werden muss.

Es sei z. B. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $a = -5$, $b = +5$. Dann hat $f(x)$ die beiden singulären Stellen $+i$ und $-i$. Statt eines Kreises haben wir dann zwei Kreise auszuschliessen und erhalten, wenn wir die U-Kurve ins Unendliche rücken lassen

$$\frac{1}{1+x^2} = G_n(x) + \frac{i}{2}\frac{g_n(x)}{g_n(i)}\frac{1}{i-x} + \frac{i}{2}\frac{g_n(x)}{g_n(-i)} \cdot \frac{1}{i+x}.$$

Nun ist

$$(i - x_1)(i - x_n) \quad = -(x_1^2 + 1)$$
$$(i - x_2)(i - x_{n-1}) = -(x_2^2 + 1).$$
u. s. w.

Wird daher n als ungrade vorausgesetzt, so muss $g_n(i)$ rein imaginär sein:

$$g_n(i) \quad = \pm i \,|\, g_n(i) \,|$$
$$g_n(-i) = \mp i \,|\, g_n(i) \,|$$

und wir erhalten:

$$\frac{1}{1+x^2} = G_n(x) \pm \frac{g_n(x)}{|\, g_n(i) \,|} \frac{x}{1+x^2}.$$

Wir konstruieren nun die U-Kurve, die durch die Punkte $\pm i$ geht. Sie trifft die reelle Achse etwa in den Punkten ± 3.63. Über das zwischen diesen beiden Punkten liegende Intervall hinaus ist also die Interpolation mit Hülfe der Funktionen $G_n(x)$ unmöglich. Obgleich diese Funktionen zwischen $+3.63$ und $+5$, sowie zwischen -3.63 und -5 mit wachsendem n für immer dichter und dichter liegende Werte von x mit $\frac{1}{1+x^2}$ übereinstimmen, so wird doch zwischen je zwei Koinzidenzpunkten die Abweichung mit wachsendem n immer grösser und grösser. Wenn man z. B. die Kurve $y = \frac{1}{1+x^2}$ durch die Kurve $y = G_n(x)$ darzustellen sucht, die in den 11 Punkten mit den Abscissen

$$x = -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5$$

mit ihr übereinstimmt, so beträgt die Abweichung bei $x = \pm 4.5$, wie unsere Gleichung lehrt, nicht weniger als 1.53, also mehr als das Anderthalbfache der grössten Ordinate der Kurve $y = \frac{1}{1+x^2}$. Die Abweichung in der Nähe von ± 4.5 wird nun nicht etwa kleiner, wenn wir den Grad der Näherungskurve und zugleich die Zahl der Koinzidenzpunkte zwischen $x = -5$ und $x = +5$ erhöhen, sondern sie wird im Gegenteil immer grösser. Bei $x = \pm 0.5$ dagegen beträgt z. B. die Abweichung nicht mehr als 0.044, und würde in der Nähe dieses Wertes mit einer grösseren Anzahl von Koinzidenzpunkten immer kleiner werden.