BULLETINS

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1908

BRUXELLES
HAYEZ, IMPRIMEUR DES ACADÉMIES ROYALES DE BELGIQUE
Rue de Louvain, 112

1908

Observation relative à l'action du soufre sur le gaz acétylène; par M. Oechsner de Coninck.

Rapport de M. W. Spring.

« Dans cette note, l'auteur confirme l'exactitude d'une observation faite récemment par M. G. Capelle sur la non-production du tiophène dans l'action du soufre sur l'acétylène.

J'ai l'honneur de proposer l'insertion de cette note dans le *Bulletin* de la séance. » — Adopté.

—

Quelques réflexions sur le rôle de l'ionisation dans certaines réactions chimiques; par le même.

Rapport de M. W. Spring.

« Dans cette seconde note, l'auteur cherche à expliquer l'action des sels dissous sur les sels insolubles par l'ionisation des premiers; la réaction se produirait parce que l'*anion* du sel dissous se porterait sur l'élément métallique du sel insoluble.

Je propose également l'insertion de cette note dans le *Bulletin* de la séance. » — Adopté.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

—

Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier; par Ch.-J. de la Vallée Poussin, professeur à l'Université de Louvain, correspondant de l'Académie.

CHAPITRE PREMIER

Approximation des fonctions par des polynômes.

§ 1. — *Définition du polynôme d'approximation.*

1. Préliminaire. — *Toute fonction continue peut être représentée par une série de polynômes.* Ce théorème fondamental de Weierstrass a reçu depuis un grand nombre de démonstrations. Nous renverrons pour les renseignements bibliographiques aux excellentes *Leçons sur les variables réelles et les développements en séries de polynômes*, par M. E. Borel (*).

Nous allons donner, de ce théorème, une nouvelle

(*) Paris, G. V., 1905.

démonstration, qui nous paraît plus simple et plus directe qu'aucune autre, mais qui aura surtout l'avantage de nous conduire à des résultats complètement neufs sur la représentation des fonctions dérivées.

Le problème de la représentation d'une fonction par une série de polynômes est le même que celui de la représentation indéfiniment approchée par un polynôme P_n, car si P_n tend vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini, la série

$$P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \cdots$$

converge vers $f(x)$.

C'est le problème de la représentation approchée par un polynôme P_n que nous traiterons, en nous bornant toutefois aux fonctions d'une seule variable x.

2. Nous prendrons notre point de départ dans la formule bien connue

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\,dt = \frac{1}{k_n},$$

en désignant par k_n le nombre rationnel

$$k_n = \frac{3.5\ldots(2n+1)}{2.4\ldots 2n}.$$

Quand n tend vers l'infini, la valeur asymptotique ${}_n$ se tire des relations

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,dt > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\,dt > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2} t\,dt,$$

qui deviennent, en remplaçant chaque intégrale par sa valeur :

$$\frac{k_n}{2n+1}\frac{\pi}{2} > \frac{1}{k_n} > \frac{k_n}{2n+2}\frac{\pi}{2},$$

d'où

$$k_n = \sqrt{(2n+1+\theta)\frac{2}{\pi}} \qquad (0 < \theta < 1).$$

On remarquera, en particulier, que l'on a

$$k_n < 2\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$$

et que k_n a pour valeur asymptotique $2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.

3. Hypothèses sur la fonction à représenter $f(x)$ et définition du polynôme d'approximation P_n. — Soit à représenter la fonction $f(x)$ dans un intervalle (a, b). Nous commencerons par supposer que cet intervalle est intérieur à l'intervalle $(0,1)$, c'est-à-dire que

$$0 < a < b < 1.$$

Cette hypothèse n'apporte aucune restriction essentielle à la théorie, car il suffit de faire une substitution linéaire de variables pour ramener n'importe quel intervalle fini au précédent.

En ce qui concerne la fonction $f(x)$ à représenter, nous admettrons qu'elle est bornée et intégrable dans l'intervalle (a, b) au sens de Riemann. Plus généralement, nous admettrons qu'elle devient infinie en certains points, mais de manière que l'intégrale

$$\int_a^b |\, f(x) \,|\, dx$$

conserve une valeur finie.

Le lecteur, qui connaît les nouvelles théories de l'intégration, verra encore que l'on peut même supposer la fonction *sommable* au sens très général de M. LEBESGUE (*), sans qu'il y ait rien à changer à nos raisonnements. Mais cette connaissance n'est pas nécessaire pour la lecture du mémoire.

En dehors de l'intervalle (a, b), nous conviendrons de faire :

$$f(x) = f(a), \qquad \text{si} \qquad x < a,$$
$$f(x) = f(b), \qquad \text{si} \qquad x > b.$$

A moins que la fonction ne soit discontinue au point a ou au point b, auquel cas nous poserions :

$$f(x) = 0, \qquad \text{si} \qquad x < a,$$

ou

$$f(x) = 0, \qquad \text{si} \qquad x > b,$$

ce qui n'introduit pas de nouvelle discontinuité.

Nous pouvons maintenant définir notre *polynôme*

(*) *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, par H. LEBESGUE (Paris, G. V., 1904). Voir surtout le chapitre VII.

d'approximation. Ce sera le polynôme P_n de degré $2n$, défini par l'intégrale très simple (*)

$$P_n = \frac{k_n}{2}\int_0^1 f(u)[1-(u-x)^2]^n du.$$

En développant cette puissance, on aperçoit immédiatement que P_n est un polynôme en x dont les coefficients sont donnés par des intégrales définies.

Nous allons étudier, dans diverses hypothèses, la limite ou la valeur asymptotique de ce polynôme pour $n = \infty$, ce qui va nous conduire à des conclusions intéressantes. A ce point de vue, il peut être utile de remarquer que l'on peut, sans rien changer à nos conclusions sur les limites, remplacer le polynôme P_n par un autre

$$Q_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^1 f(u)[1-(u-x)^2]^n du$$

qui s'en déduit par la substitution à k_n de sa valeur asymptotique (n° 2). Mais nous trouvons avantage à raisonner sur P_n.

(*) Au moment où je termine la rédaction de ce mémoire, je reçois communication d'un article de M. LANDAU dans les *Rendiconti del circolo matematico di Palermo* (26 janvier 1908) : *Ueber die Approximation einer stetigen Function durch eine ganze rationale Function.* M. Landau rencontre cette même intégrale et je vois, dans son article, qu'elle a déjà été considérée par STIELTJES dans une lettre à HERMITE, du 27 novembre 1891. Je me place à un point de vue beaucoup plus général que M. Landau, et M. Landau n'aborde pas l'étude des dérivées, qui forme la partie neuve de mon travail.

Pour trouver la limite de P_n, il convient de changer la variable d'intégration u en $x + u$, ce qui donne

$$P_n = \frac{k_n}{2}\int_{-x}^{1-x} f(x+u)(1-u^2)^n du.$$

§ 2. — *Convergence du polynôme d'approximation.*

4. Théorème I. — *La valeur asymptotique de* P_n *dépend uniquement de la nature de* $f(x)$ *dans le voisinage immédiat du point* x; *elle est la même que celle de l'expression*

$$\frac{k_n}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+u)(1-u^2)^n du,$$

quelque petit que soit le nombre positif fixe ε.

En effet, reportons-nous à l'expression de P_n qui termine le paragraphe précédent; P_n n'en diffère que par les deux intégrales

$$\frac{k_n}{2}\left[\int_{\varepsilon}^{1-x} + \int_{-x}^{-\varepsilon} f(x+u)(1-u^2)^n du\right].$$

Mais comme on a (n° 2)

$$\frac{k_n}{2} < \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}, \quad (1-u^2) < e^{-u^2},$$

ces intégrales sont infiniment petites de l'ordre de

$$\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, e^{-n\varepsilon^2},$$

car, pour la première par exemple, on a

$$\left|\frac{k_n}{2}\int_{\varepsilon}^{1-x} f.(1-u^2)^n du\right| < \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, e^{-n\varepsilon^2}\int_{\varepsilon}^{1-x} |f|\, du.$$

On remarquera, de plus, que, si x varie, ces intégrales tendent *uniformément* vers O.

5. Théorème II. — *En tout point de l'intervalle* (a, b) *où* $f(x)$ *est continue, on a, pour* n *infini,*

$$\lim P_n = f(x).$$

Considérons l'expression donnée dans l'énoncé du théorème I et soit μ une valeur moyenne de $f(x)$ entre $x - \varepsilon$ et $x + \varepsilon$; on peut appliquer à cette expression le théorème de la moyenne, d'où

$$\lim P_n = \lim \mu \frac{k_n}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1-u^2)^n du.$$

On peut sans altérer la limite étendre l'intervalle d'intégration de -1 à $+1$, car les deux portions d'intégrales de -1 à $-\varepsilon$ et de ε à $+1$ ainsi ajoutées sont infiniment petites du même ordre que

$$\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, e^{-n\varepsilon^2},$$

comme dans la démonstration du théorème précédent.

Si l'on observe que (n° 2)

$$\int_{-1}^{+1} (1-u^2)^n du = 2\int_{0}^{1} (1-u^2)^n du = \frac{2}{k_n},$$

il vient ainsi

$$\lim P_n = \mu.$$

Mais comme ε est aussi petit que l'on veut, μ; qui est une valeur moyenne de $f(x)$ dans l'intervalle $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, ne peut différer de $f(x)$ qui est supposée continue au point x.

6. Théorème III. — *Si* f(x) *est continue dans une portion de l'intervalle* (a, b), P_n *converge uniformément vers* f(x) *dans tout intervalle intérieur à cette portion* (*).

En effet, x variant, les quantités considérées comme infiniment petites dans les deux démonstrations précédentes tendent uniformément vers 0, et les valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ tendent uniformément vers $f(x)$ quand ε tend vers 0.

En particulier, *si* f(x) *est continue dans l'intervalle* (a, b) *tout entier, la convergence de* P_n *vers* f(x) *sera uniforme dans tout l'intervalle.* On peut, en effet, considérer l'intervalle (a, b) comme intérieur à un autre $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ où $f(x)$ est continue.

7. Théorème IV. — *Si* f(x) *est discontinue mais bornée au point* x, *les plus petite et plus grande limites de* P_n *pour* $n = \infty$ *sont comprises dans l'intervalle des bornes inférieure et supérieure de* f(x) *au point* x.

En effet, on peut reproduire, sur ces plus grande et plus petite limites, la démonstration du théorème II jusqu'à la relation

$$\lim P_n = \mu;$$

et μ, qui est une valeur moyenne de $f(x)$ dans l'intervalle *infiniment petit* $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, ne peut sortir des limites indiquées dans l'énoncé du théorème.

8. Théorème V. — *Si* f(x) *est discontinue au point* x, *mais que* f(x + h) + f(x — h) *tende vers une limite déterminée* $2a_0$ *quand* h *tend vers* 0, *on aura*

$$\lim P_n = a_0.$$

On a, en effet, par le théorème I :

$$\lim P_n = \lim \frac{k_n}{2}\left[\int_0^{\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{0} f(x+u)(1-u^2)^n du\right]$$

$$= \lim \frac{k_n}{2}\int_0^{\varepsilon} [f(x+u) + f(x-u)](1-u^2)^n du.$$

Exactement comme dans la démonstration du théorème II, on voit que la limite de cette expression sera a_0.

9. Cas particulier. — On dit que x est un *point de discontinuité de première espèce* si $f(x+h)$ et $f(x-h)$ tendent vers les limites déterminées $f(x+0)$ et $f(x-0)$ quand h tend vers 0 par des valeurs positives.

(*) M. LEBESGUE a démontré le théorème suivant (*Bulletin des sciences mathématiques*, 1898, p. 280) : *Toute fonction continue dans un intervalle* (a, b), *sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de la variable, est développable dans cet intervalle en série de polynômes absolument et uniformément convergente dans tout intervalle où n'existent pas de points de discontinuité.*

On trouve une seconde démonstration du même théorème, due également à M. Lebesgue, dans les *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, de M. E. BOREL, page 95.

Donc, *en un point de discontinuité de première espèce, on aura*

$$\lim P_n = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

§ 3. — *Convergence des dérivées première et deuxième.*

10. Préliminaire. — Les théorèmes précédents ne nous ont encore rien appris de bien nouveau et le polynôme P_n ne possède encore sur ceux considérés par d'autres auteurs que l'avantage d'être explicite ou beaucoup plus simple.

Mais si nous passons maintenant à la considération des dérivées, nous allons rencontrer des résultats complètement neufs.

M. Painlevé (*) a montré que, si la fonction continue $f(x)$ a des dérivées *continues*, on peut la représenter par une série de polynômes telle que les séries dérivées convergent uniformément vers les dérivées de $f(x)$ (**).

Nous allons montrer que la considération du polynôme P_n conduit à un résultat plus précis. A cet effet, donnons d'abord une définition.

11. Dérivée première généralisée. Dérivée moyenne. — Nous appelons *dérivée première généralisée* de $f(x)$ au point x la limite pour $h=0$ du rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}.$$

(*) *Comptes rendus*, 7 février 1898.

(**) V. Borel, *Leçons sur les variables reelles...*, p. 66.

Cette limite peut évidemment exister sans que $f'(x)$ existe.

Si $f(x)$ a, au point x, des dérivées à gauche et à droite finies et déterminées

$$f'(x,-0), \qquad f'(x,+0),$$

nous appelons *dérivée moyenne* de $f(x)$ la demi-somme

$$\tfrac{1}{2}[f'(x,-0)+f'(x,+0)].$$

Observons que l'on peut écrire

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right]$$

et que le second membre est la demi-somme des rapports qui définissent les dérivées à gauche et à droite; nous en concluons que :

La dérivée généralisée est égale à la dérivée moyenne en tout point où celle-ci existe.

Quand $f(x)$ n'a pas de dérivées à gauche ou à droite, les plus grande et plus petite limites des deux rapports

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \frac{f(x-h)-f(x)}{-h},$$

sont les quatre *nombres dérivés* de $f(x)$ au point x. La dernière équation montre donc que : *Quand la dérivée généralisée existe, elle est une moyenne entre les quatre nombres dérivés.*

Elle montre aussi que, dans tous les cas, les plus grande et plus petite limites du rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

sont toujours des moyennes entre les quatre nombres dérivés au point x.

12. Dérivation de P_n. — Reprenons la formule initiale

$$P_n = \frac{k_n}{2}\int_0^1 f(u)\,[1-(u-x)^2]^n du,$$

dans laquelle x désignera un point de l'intervalle (a, b).

Dérivons par rapport à x, ce qui se fait sans difficulté (car on dérive, en fait, un polynôme dont les coefficients seuls sont des intégrales); et observons que la dérivée de

$$[1-(u-x)^2]^n$$

est égale à celle par rapport à u changée de signe; il vient

$$P'_n = -\frac{k_n}{2}\int_0^1 f(u)\,\frac{d}{du}[1-(u-x)^2]^n du;$$

et, en changeant u en $u+x$,

$$P'_n = -\frac{k_n}{2}\int_{-x}^{1-x} f(x+u)\,d(1-u^2)^n.$$

La valeur asymptotique de P'_n pour n infini n'est pas changée si l'on néglige les portions d'intégrales en dehors de l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, car elles sont infiniment petites de l'ordre de

$$-\frac{k_n}{2}\int_\varepsilon^{1-x} |f(x+u)|\,d(1-u^2)^n = nk_n\int_\varepsilon^{1-x} |f|\,(1-u^2)^{n-1}u\,du$$

$$< nk_n e^{-(n-1)\varepsilon^2}\int_\varepsilon^{1-x} |f|\,du$$

car u est < 1 et $1-u^2 < e^{-u^2}$.

Nous pouvons donc écrire (*lim* signifiant *valeur asymptotique*) :

$$\lim P'_n = -\lim \frac{k_n}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+u)\,d(1-u^2)^n$$

$$= -\lim \frac{k_n}{2}\int_0^{\varepsilon} [f(x+u)-f(x-u)]\,d(1-u^2)^n$$

$$= -\lim k_n\int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+u)-f(x-u)}{2u}\,u\,d(1-u^2)^n.$$

Désignons par μ une valeur moyenne dans l'intervalle (o, ε) du rapport

$$\frac{f(x+u)-f(x-u)}{2u},$$

et observons que $u\,d\,(1-u^2)^n$ ne change pas de signe; nous aurons, par le théorème de la moyenne,

$$\lim P'_n = -\lim \mu k_n\int_0^{\varepsilon} u\,d(1-u^2)^n$$

et, en ajoutant une intégrale dont la limite est nulle pour n infini,

$$\lim P'_n = -\lim \mu k_n\int_0^{1} u\,d(1-u^2)^n.$$

Mais on a, en intégrant par parties,

$$-\int_0^1 u\,d(1-u^2)^n = \int_0^1 (1-u^2)^n du = \frac{1}{k_n}.$$

Substituons cette valeur, nous trouvons (*lim* pouvant ne désigner qu'une valeur asymptotique)

$$\lim P'_n = \lim \mu.$$

Cette relation subsiste quelque petit que soit ε; supposons donc que la dérivée généralisée existe au point x, le rapport dont μ désigne la valeur moyenne différera aussi peu qu'on veut de cette dérivée généralisée et, par conséquent, la limite de P'_n lui sera égale.

De là le remarquable théorème qui suit :

13. Théorème VI. — *La dérivée première* P'_n *a pour limite : 1° la dérivée* $f'(x)$ *en tout point où cette dérivée existe ; 2° la dérivée moyenne de* $f(x)$ *en tout point où celle-ci existe ; 3° la dérivée généralisée* (n° 11) *de* $f(x)$ *en tout point où celle-ci existe. — Dans tous les cas, la valeur asymptotique de* P'_n *est intermédiaire entre les quatre nombres dérivés de* $f(x)$ *au point* x.

Il est à remarquer que toutes les intégrales négligées comme infiniment petites dans la démonstration précédente, le sont *uniformément* quand x varie dans l'intervalle (a, b). La convergence de P'_n vers sa limite sera donc *uniforme* dans tout intervalle où le rapport

$$\frac{f(x+u) - f(x-u)}{2u}$$

convergera uniformément vers sa limite; donc, en particulier, *dans tout intervalle intérieur à un autre où* $f'(x)$ *sera continue.*

Toutefois, on n'oubliera pas que nous avons fait (n° 3) $f(x)$ constant hors de l'intervalle (a, b); les points a et b sont donc, en général, des points de discontinuité pour

la dérivée, et la convergence cessera d'être uniforme dans leurs environs.

Au besoin, on évitera cet inconvénient par une définition de $f(x)$ hors de (a, b) telle que la dérivée soit continue.

Avant de passer à l'étude des dérivées d'ordre plus élevé de P_n, il convient encore de généraliser la définition des dérivées.

14. Dérivée seconde généralisée. — Nous donnerons, avec M. Lebesgue (*), le nom de dérivée seconde généralisée à la limite (pour $h = 0$) du quotient

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2},$$

quand cette limite est finie et déterminée.

Cette définition suppose $f(x)$ continue au point x. Si $f(x)$ est discontinue au point x, il peut encore arriver que

$$f(x+h) + f(x-h)$$

ait une limite $2a_0$ quand h tend vers 0.

Dans ce cas, nous conviendrons de remplacer $2f(x)$ qui figure au numérateur de la fraction précédente par cette limite $2a_0$.

D'une manière générale, la dérivée seconde généralisée sera donc la limite, si elle existe, du quotient

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2a_0}{h^2}.$$

(*) *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 6. Paris, G. V., 1906.

Ce quotient peut avoir une limite sans que la dérivée seconde ordinaire existe. Mais sa limite sera certainement $f''(x)$, si cette dérivée existe au point x. C'est un cas particulier de la proposition plus générale suivante :

Si la dérivée première f'(x) *a une dérivée première généralisée* a *au point* x, *la dérivée seconde généralisée de* f(x) *sera égale à cette dérivée* a.

On a, en effet, dans ce cas, par définition de la dérivée première généralisée de $f'(x)$:

$$f'(x+h) - f'(x-h) = (a+\varepsilon)2h,$$

où ε tend vers 0 avec h. De plus, $f(x)$ sera continue au point x.

Soit α une constante positive d'une petitesse arbitraire; il suit de la relation précédente que la fonction de h

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - ah^2 \pm \alpha h^2$$

a, pour h positif et suffisamment petit, sa dérivée du signe de $\pm\alpha$. Donc la fonction, s'annulant avec h, sera elle-même du signe de $\pm\alpha$, donc aussi son quotient par h, savoir

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - a \pm \alpha,$$

ce qui entraine, pour h positif,

$$\lim \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = a,$$

et le raisonnement serait analogue pour h négatif.

15. Dérivée seconde de P_n. — Dérivons deux

fois par rapport à x l'expression de P_n déjà utilisée au début du n° 12; il vient

$$P_n'' = \frac{k_n}{2}\int_0^1 f(u) D_x^2 [1 - (u-x)^2]^n du.$$

Mais la dérivée par rapport à x est la même que par rapport à u et l'on peut, comme au n° 12, remplacer la variable d'intégration u par $u + x$, ce qui donne

$$P_n'' = \frac{k_n}{2}\int_{-x}^{1-x} f(x+u)\, D^2(1-u^2)^n du.$$

On peut, sans en changer la limite, négliger les portions de cette intégrale en dehors de l'intervalle $(-\varepsilon, \varepsilon)$. En effet, dans les intégrales négligées, le facteur

$$D^2(1-u^2)^n$$

est un infiniment petit d'ordre au moins égal à celui de

$$n^2(1-\varepsilon^2)^n < n^2 e^{-n\varepsilon^2};$$

et les intégrales négligées sont des infiniment petits de l'ordre de

$$n^2 k_n e^{-n\varepsilon^2}\int |f|\, du.$$

Il vient donc

$$\lim P_n'' = \lim \frac{k_n}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+u)\, D^2(1-u^2)^n du$$

$$\lim P_n'' = \lim \frac{k_n}{2}\int_0^{\varepsilon} [f(x+u) + f(x-u)]\, D^2(1-u^2)^n du.$$

Soit $2a_0$ la limite (supposée existante) de $f(x+u) + f(x-u)$ pour $u = 0$.

On peut, sans changer sa limite, remplacer, dans l'intégrale, $f(x+u)+f(x-u)$ par

$$f(x+u)+f(x-u)-2a_0,$$

car cela revient à en retrancher une intégrale qui a pour limite 0. On a, en effet,

$$k_n\int_0^\varepsilon D^2(1-u^2)^n du = k_n[D(1-u^2)^n]_0^\varepsilon = -2nk_n\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{n-1}.$$

Écrivons donc

$$\lim P''_n = \lim \frac{k_n}{2}\int_0^\varepsilon \frac{f(x+u)+f(x-u)-2a_0}{u^2}\,u^2D^2(1-u^2)^n du.$$

Supposons maintenant que la dérivée seconde généralisée existe. Effectuons la dérivation indiquée; nous voyons que la limite de P''_n sera celle de la différence

$$\frac{k_n}{2}\int_0^\varepsilon \frac{f(x+u)+f(x-u)-2a_0}{u^2}\,4n(n-1)u^4(1-u^2)^{n-2}du$$

$$-\frac{k_n}{2}\int_0^\varepsilon \frac{f(x+u)+f(x-u)-2a_0}{u^2}\,2nu^2(1-u^2)^{n-1}du.$$

Désignons par μ et μ' des valeurs moyennes du rapport

$$\frac{f(x+u)+f(x-u)-2a_0}{u^2}$$

dans l'intervalle $(0, \varepsilon)$; comme ce rapport multiplie, dans chacune des deux intégrales, un facteur qui ne change pas de signe, nous pouvons appliquer le théorème

de la moyenne, et nous voyons que la limite de P''_n sera celle de

$$\mu\,\frac{k_n}{2}\int_0^\varepsilon (1-u^2)^{n-2}\,4n(n-1)u^4du$$

$$-\mu'\,\frac{k_n}{2}\int_0^\varepsilon (1-u^2)^{n-1}\,2nu^2du.$$

La première intégrale se ramène à la seconde par une intégration par parties et on peut négliger le terme aux limites (nul pour $u=0$ et infiniment petit pour $u=\varepsilon$, $n=\infty$). On voit ainsi que la limite de P''_n est celle de

$$\frac{3\mu-\mu'}{2}\,k_n\int_0^\varepsilon (1-u^2)^{n-1}\,2nu^2du.$$

D'ailleurs l'intégration peut être étendue de 0 à 1 sans changer la limite; et l'on a, par une nouvelle intégration par parties

$$\int_0^1 (1-u^2)^{n-1}\,2nu^2du = \int_0^1 (1-u^2)^n du = \frac{1}{k_n}.$$

En définitive, la limite de P''_n est la même que celle de

$$\frac{3\mu-\mu'}{2}.$$

Mais comme ε peut être supposé infiniment petit, μ et μ' sont infiniment voisins de la dérivée généralisée supposée existante et P''_n a cette dérivée pour limite.

De là le théorème suivant :

16. Théorème VII. — *La dérivée seconde P''_n a pour limite la dérivée seconde généralisée de $f(x)$ en tout point où cette dérivée existe. En particulier, P''_n a pour limite $f''(x)$ en tout point où $f''(x)$ existe.*

Ce théorème appelle évidemment des remarques analogues à celles faites au n° 13 à l'occasion de la dérivée première.

Remarquons seulement que *la convergence de P''_n vers sa limite sera uniforme dans tout intervalle où le rapport*

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2a_0}{h^2}$$

tendra uniformément vers sa limite, donc, en particulier, dans tout intervalle intérieur à un autre où la dérivée seconde $f''(x)$ sera continue.

§ 4. — *Dérivées d'ordre supérieur.*

17. Théorème VIII. — *La dérivée d'ordre r quelconque P^r_n a pour limite la dérivée du même ordre de $f(x)$ en tout point où cette dérivée existe.*

Nous pouvons supposer $r > 2$.

Pour que $f^{(r)}(x)$ existe au point x, il faut que $f^{(r-1)}(x)$ existe et soit bornée dans un intervalle suffisamment petit $(x - \varepsilon,\ x + \varepsilon)$; alors $f^{(r-2)}(x)$ est une fonction continue dans cet intervalle.

Considérons la relation

$$P_n = \frac{k_n}{2}\int_0^1 f(u)[1-(u-x)^2]^n\,du.$$

Dérivons r fois par rapport à x, il vient

$$P^r_n = \frac{k_n}{2}\int_0^1 f(u)D^r_x[1-(u-x)^2]^n\,du.$$

Remplaçons D_x par $-D_u$ et u par $u+x$, il viendra

$$P^r_n = (-1)^r\frac{k_n}{2}\int_{-x}^{1-x} f(u+x)\,D^r(1-u^2)^n\,du.$$

On peut, sans changer sa limite pour $n=\infty$, négliger les portions de cette intégrale en dehors de l'intervalle $(-\varepsilon,\ +\varepsilon)$, car, dans ces portions d'intégrale, le facteur

$$D^r(1-u^2)^n$$

est un infiniment petit d'ordre au moins égal à celui de

$$n^r(1-\varepsilon^2)^n < n^r e^{-n\varepsilon^2}$$

et, par conséquent, les intégrales négligées sont infiniment petites comme l'expression

$$n^r k_n e^{-n\varepsilon^2}\int |f|\,du.$$

Écrivons donc

$$\lim P^r_n = (-1)^r \lim \frac{k_n}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x)\,D^r(1-u^2)^n\,du.$$

Si $f(x)$ a une dérivée d'ordre r, nous pouvons effectuer sans difficulté $r-2$ intégrations par parties consécutives, car $f(u + x)$ et ses dérivées peuvent être supposées continues jusqu'à l'ordre $r - 2$ dans l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$. Il vient ainsi, les termes aux limites étant tous infiniment petits pour $n = \infty$:

$$\lim P_n^r = \lim \frac{k_n}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^{r-2}(u + x)\, D^2(1 - u^2)^n du.$$

Mais cette expression est tout juste celle dont nous avons cherché la limite au n° 15; elle a pour limite la dérivée seconde généralisée de $f^{r-2}(x)$ si elle existe. Or, cette dérivée existe dans le cas présent et elle est égale à la dérivée $f^r(x)$ supposée existante.

Le théorème est démontré.

18. Dérivées généralisées d'ordre supérieur. — Nous avons donné aux n^{os} 11 et 14 les définitions des *dérivées première et seconde généralisées*, et l'on aura certainement remarqué que la définition de la dérivée seconde généralisée est complètement indépendante de la considération de la dérivée première.

Il est naturel de se demander s'il est possible d'étendre ces définitions aux ordres supérieurs, de telle sorte que nos deux premières définitions rentrent comme cas particuliers dans une définition générale et que la définition de la dérivée généralisée d'ordre r ne soit pas liée à l'existence des dérivées *ordinaires* d'ordre moindre *dans le voisinage du point* x.

La chose est possible. On peut donner, de la dérivée généralisée d'ordre r, une définition qui suppose seulement l'existence des dérivées *généralisées* d'ordre moindre et de même parité *au seul point* x.

Supposons qu'on puisse écrire

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2} = a_1 h + a_3 \frac{h^3}{3!} + \cdots$$
$$+ a_{2n-1} \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} + (a_{2n+1} + \omega) \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

les coefficients a étant des constantes relativement à h et ω une quantité qui tend vers 0 avec h. Nous dirons que les coefficients $a_1, a_3, \ldots a_{2n+1}$ sont les *dérivées généralisées successives d'ordre impair de* f(x).

De même, supposons qu'on puisse écrire

$$\frac{f(x+h) + f(x-h)}{2} = a_0 + a_2 \frac{h^2}{2!} + a_4 \frac{h^4}{4!} + \cdots$$
$$+ a_{2n-2} \frac{h^{2n-2}}{(2n-2)!} + (a_{2n} + \omega) \frac{h^{2n}}{(2n)!}$$

où les a sont des constantes par rapport à h et où ω tend vers 0 avec h. Nous dirons que $a_2, a_4, \ldots a_{2n}$ sont les *dérivées généralisées successives d'ordre pair de* f(x).

Que ces dérivées généralisées coïncident avec les dérivées ordinaires quand les dérivées ordinaires existent, c'est ce qui résulte immédiatement de la comparaison du théorème IX qui suit avec le théorème VIII qui précède; par contre, l'existence des dérivées généralisées n'est pas liée à celle des dérivées ordinaires.

19. Théorème IX. — *La dérivée d'ordre* r *quelconque* P_n^r *de* P_n *a pour limite quand* n *croît indéfiniment la dérivée généralisée du même ordre de* f(x) *en tout point où cette dérivée généralisée existe.*

Reprenons la formule du n° 17 :

$$\lim \mathrm{P}_n^r = (-1)^r \lim \frac{k_n}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x)\, \mathrm{D}^r(1-u^2)^n du,$$

formule dont la démonstration subsiste aussi bien dans le cas actuel. Changeons la variable d'intégration u en $-u$ dans l'intervalle de $-\varepsilon$ à 0; il viendra

$$\lim \mathrm{P}_n^r = (-1)^r \lim k_n \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+u) \pm f(x-u)}{2u} \mathrm{D}^r(1-u^2)^n du,$$

le signe ambigu dépendant de la parité de r (+ si r est pair, — si r est impair).

Comme la démonstration se fait exactement de la même façon dans les deux cas, nous supposerons, pour fixer les idées, que r soit pair et nous écrirons

$$\lim \mathrm{P}_n^r = \lim k_n \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} \mathrm{D}^r(1-u^2)^n du.$$

Faisons, en passant, une remarque essentielle. Si l'on remplace dans cette formule $f(x)$ par une fonction $\varphi(x)$ ayant une dérivée ordinaire de l'ordre r, le théorème VIII s'appliquant, on aura

$$\varphi^{(r)}(x) = \lim k_n \int_0^{\varepsilon} \frac{\varphi(x+u) + \varphi(x-u)}{2} \mathrm{D}^r(1-u^2)^n du.$$

Ceci bien entendu, supposons que $f(x)$ ait une dérivée

généralisée a_r d'ordre pair (n° 18); on aura, ω tendant vers 0 avec u,

$$\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} = a_0 + a_2 \frac{u^2}{2} + \cdots + (a_r + \omega)\frac{u^r}{r!},$$

ou encore

$$\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} = \frac{\varphi(x+u) + \varphi(x-u)}{2} + \omega \frac{u^r}{r!}$$

en désignant par $\varphi(x+u)$ le polynôme

$$\varphi(x+u) = a_0 + a_2 \frac{u^2}{2!} + \cdots + a_r \frac{u^r}{r!}.$$

Mais la remarque précédente s'applique à la fonction φ (qui est un polynôme), et l'on voit que

$$\varphi^{(r)}(x) = a_r.$$

On a donc

$$\lim k_n \int_0^{\varepsilon} \frac{\varphi(x+u) + \varphi(x-u)}{2} \mathrm{D}^r(1-u^2)^n du = a_r.$$

Par conséquent, la limite de P_n^r ne peut différer de cette dérivée généralisée a_r que par l'expression

$$\lim k_n \int_0^{\varepsilon} \omega \frac{u^r}{r!} \mathrm{D}^r(1-u^2)^n du.$$

20. — La démonstration du théorème IX qui nous occupe est donc ramenée à démontrer que *l'intégrale*

$$k_n \int_0^{\varepsilon} \omega u^r \mathrm{D}^r(1-u^2)^n du$$

est infiniment petite avec ω, *quel que soit* n. Faisons cette démonstration.

La difficulté provient de ce que $D^r(1-u^2)^n$ n'ayant pas un signe invariable, on ne peut pas appliquer le théorème de la moyenne. Nous allons donc décomposer cette dérivée en une somme de termes qui ne changent pas de signe.

A cet effet, je remarque que

$$D^r(1-u^2)^n$$

se décompose en un certain nombre de termes de la forme générale

$$A_{r-s}(1-u^2)^{n-r+s}u^{r-2s},$$

où s parcourt les valeurs entières 0, 1, 2..., qui sont $\leqslant \frac{r}{2}$, et où A_{r-s} est un facteur numérique infiniment grand avec n, mais au plus de l'ordre de la puissance n^{r-s}, ordre marqué par son indice (*).

(*) Il n'y a aucune difficulté à obtenir explicitement ce développement. Posant

$$u^2=t, \qquad \varphi(t)=(1-t)^n,$$

il est donné par la formule générale :

$$\frac{d^r\varphi(u^2)}{du^r}=(2u)^r\varphi^r(t)+\frac{r(r-1)}{1}(2u)^{r-2}\varphi^{r-1}(t)$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2}(2u)^{r-4}\varphi^{r-2}(t)+\cdots$$

Voir mon *Cours d'analyse*, t. I, p. 78, ex. 8; ou TISSERAND, *Recueil complémentaire d'exercices sur l'analyse infinitésimale*, problème 16 (Paris, G. V., 1896).

Cette propriété se vérifie directement pour les premiers ordres; on peut écrire :

$$D(1-u^2)^n = A_1(1-u^2)^{n-1}u$$
$$D^2(1-u^2)^n = A_2(1-u^2)^{n-2}u^2 + A_1(1-u^2)^{n-1}$$
$$D^3(1-u^2)^n = A_3(1-u^2)^{n-3}u^3 + A_2(1-u^2)^{n-2}u$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La valeur de A_1, A_2, ... change dans chaque équation, l'indice désignant seulement l'ordre de grandeur pour n infini.

Pour établir que la propriété est générale, il suffit de constater que la dérivée du terme général écrit plus haut

$$A_{r-s}(1-u^2)^{n-r+s}u^{r-2s}$$

est encore la somme de deux termes de la même forme générale (l'indice de dérivation r devant seulement augmenter d'une unité).

Or cette dérivée est

$$-2(n-r+s)A_{r-s}(1-u^2)^{n-r+s-1}u^{r-2s+1}$$
$$+\quad(r-2s)\quad A_{r-s}(1-u^2)^{n-r+s}\quad u^{r-2s-1}$$

Le premier terme est de la forme

$$A_{(r+1)-s}(1-u^2)^{n-(r+1)+s}u^{(r+1)-2s}$$

et le second de la forme

$$A_{(r+1)-(s+1)}(1-u^2)^{n-(r+1)+(s+1)}u^{(r+1)-2(s+1)}$$

ce qui justifie donc notre affirmation.

Remplaçons donc dans notre intégrale $D^r(1-u^2)^n$ par son développement. Comme le nombre des termes est indépendant de n, nous sommes ramenés à démontrer que l'intégrale de chaque terme

$$k_n A_{r-s} \int_0^{\varepsilon} \omega (1-u^2)^{n-r+s} u^{2r-2s} du$$

est infiniment petite avec ω. Mais, comme ω multiplie maintenant une quantité positive, nous pouvons faire sortir ω du signe $\int$ par le théorème de la moyenne; et il suffit de prouver que l'intégrale, débarrassée de ω,

$$k_n A_{r-s} \int_0^{\varepsilon} (1-u^2)^{n-r+s} u^{2r-2s} du$$

conserve une valeur finie, quel que soit n.

Comme $1-u^2$ est $< e^{-u^2}$, cette intégrale est moindre que

$$k_n A_{r-s} \int_0^{\infty} e^{-(n-r+s)u^2} u^{2r-2s} du$$

$$= \frac{k_n A_{r-s}}{2} \int_0^{\infty} e^{-(n-r+s)u} u^{r-s-\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{k_n}{\sqrt{n-r+s}} \frac{A_{r-s}}{(n-r+s)^{r-s}} \Gamma(r-s+\tfrac{1}{2}).$$

Comme k_n est de l'ordre de $\sqrt{n}$ et A_{r-s} de l'ordre de n^{r-s}, cette expression est finie, quel que soit n.

REMARQUE. — La démonstration précédente met encore en lumière que *la convergence de* $P_n^{(r)}$ *vers sa limite sera uniforme, quand* x *varie, dans tout intervalle où* ω *tend uniformément vers* o; donc, *en particulier, dans tout intervalle intérieur à un autre où la dérivée ordinaire d'ordre* r *est continue.*

§ 5. — *Degré d'approximation obtenu par le polynôme* P_n.

21. Hypothèses à faire sur $f(x)$. — La rapidité plus ou moins grande avec laquelle le polynôme P_n converge vers $f(x)$ quand n augmente, dépend de la nature de la fonction $f(x)$. On ne peut rien dire de plus avec les hypothèses très générales faites jusqu'ici.

Pour arriver à un résultat précis et pouvoir comparer les diverses méthodes d'approximation au point de vue qui nous occupe, il faut faire des hypothèses plus particulières.

Un des cas les plus intéressants et les plus instructifs est celui où l'équation

$$y = f(x)$$

représente une ligne polygonale. Nous allons faire des hypothèses qui comprendront en particulier le cas d'un polygone.

Nous supposerons que la fonction $f(x)$ est continue, qu'elle possède, en chaque point, une dérivée à gauche et une dérivée à droite

$$f'(x, -0), \qquad f'(x, +0),$$

toutes deux bien déterminées mais non nécessairement égales. Nous supposerons ces dérivées bornées dans l'intervalle (a, b) et nous désignerons par M le maximum absolu de $f(x)$, par M′ la borne supérieure absolue de sa dérivée dans l'intervalle (a, b).

Comme nous supposons (n° 3) $f(x)$ constant hors de l'intervalle (a, b), sa dérivée sera nulle hors de cet intervalle et les deux extrémités a et b seront en général des points où les dérivées à gauche et à droite seront différentes.

22. Ordre de l'approximation. — Nous allons montrer que, dans les hypothèses précédentes, l'approximation sera en général de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, c'est-à-dire que la différence

$$f(x) - \mathrm{P}_n$$

sera de cet ordre si l'on considère l'ensemble de l'intervalle (a, b).

Revenons à notre formule du n° 3 :

$$\mathrm{P}_n = \frac{k_n}{2}\int_{-x}^{1-x} f(x+u)(1-u^2)^n du.$$

On a, par définition de k_n (n° 2),

$$1 = \frac{k_n}{2}\int_{-x}^{1-x} + \frac{k_n}{2}\int_{-1}^{-x} + \frac{k_n}{2}\int_{1-x}^{1}(1-u^2)^n du.$$

Désignons par α la plus petite des deux quantités a et $1-b$. Quand x appartient à l'intervalle (a, b), on a

$$\int_{1-x}^{1}(1-u^2)^n du < \int_{\alpha}^{1}(1-u^2)^n du = \frac{1}{2}\int_{\alpha^2}^{1}(1-u)^n \frac{du}{\sqrt{u}},$$

$$< \frac{1}{2\alpha}\int_{\alpha^2}^{1}(1-u)^n du = \frac{(1-\alpha^2)^{n+1}}{2(n+1)\alpha},$$

$$< \frac{e^{-(n+1)\alpha^2}}{2(n+1)\alpha};$$

et, de même, cette quantité est une limite de l'intégrale prise entre -1 et $-x$.

Comme $\frac{k_n}{2}$ est $< \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$, on peut donc écrire $(0 < \theta < 1)$:

$$1 = \frac{k_n}{2}\int_{-x}^{1-x}(1-u^2)^n du + \theta\frac{e^{-(n+1)\alpha^2}}{\alpha\sqrt{(n+1)\pi}}.$$

Multiplions par $f(x)$, dont la valeur absolue est $<$ M, et soustrayons de la formule donnant P_n; il vient :

$$\mathrm{P}_n - f(x) = \frac{k_n}{2}\int_{-x}^{1-x}[f(x+u) - f(x)](1-u^2)^n du$$

$$+ \frac{\theta \mathrm{M}}{\alpha}\frac{e^{-(n+1)\alpha^2}}{\sqrt{(n+1)\pi}} \qquad (-1 < \theta < 1).$$

Le dernier terme décroît comme une exponentielle quand n augmente.

Le terme précédent peut se décomposer dans les deux termes ci-dessous :

$$\frac{k_n}{4}\int_0^{\varepsilon}\frac{f(x \quad u)-f(x)}{u}(1-u^2)^n\, 2u du$$

$$+\frac{k_n}{4}\int_0^{1-x}\frac{f(x+u)-f(x)}{u}(1-u^2)^n\, 2u du.$$

Donc M′ étant la borne supérieure de $|f'(x)|$, ces termes sont moindres en valeur absolue que

$$\frac{k_n}{4}\,M'\left[\int_0^1+\int_0^1(1-u^2)^n du\right]=\frac{M'}{2}\,\frac{k_n}{n+1}<\frac{M'}{2\sqrt{(n+1)\pi}}.$$

En substituant ces limites, il vient, en définitive,

$$|\,P_n-f(x)\,|<\frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}\left[\frac{M'}{2}+\frac{M}{\alpha}e^{-(n+1)\alpha^2}\right].$$

Cette inégalité, valable dans tout l'intervalle $(a,\ b)$, donne la mesure du degré d'approximation obtenu. L'approximation obtenue est donc de l'ordre de $1 : \sqrt{n}$.

D'ailleurs elle ne peut pas être d'un ordre plus élevé pour l'ensemble de l'intervalle $(a,\ b)$, s'il y a des points où les dérivées à droite et à gauche diffèrent.

En effet, les deux termes transformés en dernier lieu

$$\frac{k_n}{4}\int_0^{x}\frac{f(2+u)-f(x)}{u}(1-u^2)^n 2u\,du$$

$$+\frac{k_n}{4}\int_0^{1-x}\frac{f(x+u)-f(x)}{u}(1-u^2)^n 2u\,du$$

sont les deux termes principaux de la différence $P_n - f(x)$ et, en un point où $f'(x,\ +0)$ et $f'(x,\ -0)$ diffèrent, on en trouve immédiatement la valeur asymptotique.

En effet, on peut, sans altérer cette valeur, réduire l'intervalle d'intégration à $(0,\ \varepsilon)$, ε étant infiniment petit, puis faire sortir les rapports

$$\frac{f(x-u)-f(x)}{u},\qquad \frac{f(x+u)-f(x)}{u}$$

hors du signe $\int$ en se servant du théorème de la moyenne. On peut donc remplacer ces rapports par leurs limites

$$-f'(x,\ -0),\qquad f'(x,\ +0)$$

et la valeur asymptotique cherchée est la même que celle de l'expression

$$\left[-\frac{k_n}{4}f'(x,-0)+\frac{k_n}{4}f'(x,+0)\right]\int_0^{\varepsilon}(1-u^2)^n 2u\,du\,,$$

c'est-à-dire (l'intégration s'effectuant)

$$k_n\,\frac{f'(x,\ +0)-f'(x,\ -0)}{4(n+1)},$$

et, en remplaçant k_n par sa valeur asymptotique,

$$\frac{f'(x,\ +0)-f'(x,\ -0)}{4\sqrt{\pi n}}.$$

Telle est donc la valeur asymptotique de la différence $P_n - f(x)$ en un point où les deux dérivées sont inégales. Elle est bien de l'ordre de $1 : \sqrt{n}$.

23. Comparaison avec la méthode de M. Lebesgue (*). — La méthode de M. Lebesgue pour la représentation de l'ordonnée d'un polygone, trouve son point de départ dans la représentation de l'ordonnée de l'*angle droit* représenté par l'équation

$$y = |x| \quad (**).$$

M. Lebesgue remarque que l'on a, en posant $z = x^2 - 1$,

$$|x| = (1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{4} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^3}{6} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^4}{8} + \cdots$$

Si k_n est défini comme au n° 2, le terme général est

$$\pm \frac{k_n}{(2n-1)(2n+1)} z^n;$$

il est donc de l'ordre de

$$\frac{z^n}{n\sqrt{n}},$$

et la série est *absolument* et *uniformément* convergente dans l'intervalle de -1 à $+1$.

En appelant $P_{(x)}$ la somme des n premiers termes de la série, qui est un polynôme de degré $2n - 2$, l'équation

$$y = P(x)$$

représente donc approximativement l'angle droit considéré, au voisinage du sommet.

(*) *Bulletin des sciences mathématiques*, 1898, p. 278.
(**) Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles...*, p. 60.

Cherchons le degré d'approximation au sommet de l'angle, c'est-à-dire pour $x = 0$ ou $z = -1$. Tous les termes négligés sont négatifs, l'erreur est donc de l'ordre de

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad \int_{n}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

c'est-à-dire de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

L'approximation est du même ordre que celle fournie par le polynôme P_n.

Cette approximation n'est pas la meilleure. *On peut représenter l'ordonnée d'un polygone avec une erreur de l'ordre de $\frac{1}{n}$ seulement par un polynôme de degré* n.

Mais la démonstration de ce théorème se rattache naturellement à un mémoire *Sur l'interpolation* que nous présentons à l'Académie en même temps que cette note, et on la trouvera à la fin de ce mémoire.

CHAPITRE II

Approximation des fonctions par des séries limitées de Fourier.

§ 1. — *Définition des formules d'approximation.*

24. Préliminaire. — Weierstrass a démontré que toute fonction continue ayant la période 2π peut se représenter avec telle approximation que l'on veut par une suite finie de Fourier, ou, ce qui est la même chose, par un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$.

Dans le tome Ier de son *Cours d'analyse*, M. Picard déduit de l'intégrale de Poisson, que nous considérons plus loin (n° 41), la possibilité de représenter une fonction continue par une série trigonométrique limitée, et c'est même de là qu'il tire sa démonstration du théorème de Weierstrass sur la représentation par une série de polynômes.

M. Lebesgue (*) a montré qu'on peut faire l'inverse, et passer de l'approximation par une suite de polynômes à l'approximation par une suite de Fourier.

Aucun des auteurs précédents ne paraît s'être préoccupé de la représentation approchée des dérivées.

Nous allons traiter la question de la représentation approchée par une série trigonométrique limitée, en nous plaçant à un point de vue nouveau.

Nous allons voir apparaître une analogie tellement étroite entre le problème que nous posons maintenant et celui de la représentation par un polynôme que nous venons de traiter, que cette analogie nous paraît véritablement digne d'attention.

Notre méthode sera donc calquée sur celle du chapitre précédent, et nous allons retrouver les analogues de tous les théorèmes précédemment établis, ce qui nous permettra d'abréger les démonstrations.

L'extension au problème actuel des théorèmes sur la dérivation nous conduira, en outre, à des conclusions intéressantes sur les séries de Fourier.

25. La constante h_n. — C'est celle qui correspond à la constante k_n du chapitre précédent.

(*) *Bulletin des sciences mathématiques*, 1898, p. 285.

Nous considérons cette fois l'intégrale (n entier)

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n} \frac{u}{2}\, du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u\, du = \frac{1}{h_n}$$

où l'on a

$$h_n = \frac{1}{\pi} \frac{2\,.\,4\,\ldots\,2n}{1\,.\,3\,\ldots\,(2n-1)}.$$

Quand n tend vers l'infini, la valeur asymptotique de h_n se tire des relations

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} u\, du > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u\, du > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} u\, du$$

qui donnent, en remplaçant les intégrales par leurs valeurs,

$$\pi \frac{h_n}{2n} > \frac{1}{2h_n} > \pi \frac{h_n}{2n+1},$$

d'où ($0 < \theta < 1$)

$$h_n = \sqrt{\frac{2n+\theta}{2\pi}}.$$

La valeur asymptotique de h_n sera donc $\sqrt{\frac{n}{\pi}}$ et l'on aura

$$h_n < \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}.$$

26. Définition de l'intégrale I_n. — Cette intégrale est l'analogue de l'intégrale P_n du chapitre précédent.

Nous nous proposons de représenter une fonction $f(x)$

périodique et de période 2π. Cette fonction sera donc complètement définie par ses valeurs dans l'intervalle

$$(-\pi, \quad +\pi)$$

et nous pouvons nous borner à considérer cet intervalle.

Nous supposerons que la fonction $f(x)$ satisfait aux mêmes conditions que dans le chapitre précédent. Elle est bornée et intégrable au sens de Riemann, ou bien elle peut devenir infinie en un certain nombre de points exceptionnels, mais de manière que l'intégrale

$$\int |f| \, dx$$

conserve une valeur finie.

Plus généralement, on peut admettre que la fonction est *sommable* dans le sens de M. Lebesgue.

Ceci entendu, nous posons

$$\mathrm{I}_n = \frac{h_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\cos \frac{u-x}{2}\right]^{2n} du.$$

Cette intégrale possède, comme on va le voir, des propriétés qui la rapprochent de celle de Poisson utilisée par M. Picard et elle peut rendre les mêmes services. Mais tandis que l'intégrale de Poisson se développe en série trigonométrique illimitée (n° 41), celle-ci fournit un développement qui s'arrête de lui-même et donne, par conséquent, la solution du problème que nous nous sommes proposé.

27. Développement de I_n en série limitée de Fourier. — En développement

$$\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n} = \left(e^{\frac{\theta i}{2}} + e^{-\frac{\theta i}{2}}\right)^{2n}$$

par la formule du binôme, et en négligeant la partie imaginaire de chaque terme, on trouve

$$2^{2n} \cos^{2n}\frac{\theta}{2} = \cos n\theta + 2n\cos(n-1)\theta + \frac{2n(2n-1)}{1 \,.\, 2}\cos(n-2)\theta$$
$$+ \cdots + \frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{1 \,.\, 2 \ldots n} + \cdots + \cos n\theta.$$

Nous avons écrit le terme du milieu et ceux à égale distance des extrêmes sont égaux.

Si l'on range les termes dans l'ordre de leur distance au terme du milieu, il vient donc

$$\cos^{2n}\frac{\theta}{2} = g_n\left[\frac{1}{2} + \frac{n}{n+1}\cos\theta + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}\cos 2\theta \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\cos 3\theta + \cdots\right]$$

en désignant par g_n le coefficient numérique

$$g_n = \frac{2}{2^{2n}} \frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{1 \,.\, 2 \ldots n} = \frac{2}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

D'après la formule de Stirling, la valeur asymptotique de g_n pour $n = \infty$ sera

$$\frac{2}{2^{2n}} \frac{\sqrt{2\pi \,.\, 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{2}{\sqrt{\pi n}}.$$

Faisons $\theta = u - x$; d'où

$$\cos k\theta = \cos ku \cos kx + \sin ku \sin x$$

et substituons le développement de $\cos^{2n}\frac{\theta}{2}$ dans l'intégrale I_n; il viendra

$$I_n = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

où les coefficients ont pour valeurs :

$$A_0 = \frac{h_n g_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du$$

$$\begin{cases} A_k = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\,\dfrac{h_n g_n}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos ku\,du \\ B_k = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\,\dfrac{h_n g_n}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin ku\,du. \end{cases}$$

Nous avons ainsi obtenu le développement de I_n en série trigonométrique limitée.

Comme h_n et g_n ont respectivement pour valeurs asymptotiques

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \quad \text{et} \quad \frac{2}{\sqrt{\pi n}},$$

la valeur asymptotique de $\frac{1}{2}\,h_n\,g_n$ est $\frac{1}{\pi}$.

On voit donc que quand n tend vers l'infini les coefficients A_k et B_k tendent vers ceux de Fourier.

28. Définition d'une nouvelle suite limitée de Fourier S_n. — Remarquons que l'on ne change rien aux valeurs asymptotiques de I_n et de ses dérivées en remplaçant dans tous les termes $\left(\frac{h_n g_n}{2}\right)$ par sa valeur asymptotique $\frac{1}{\pi}$.

Cela revient, en effet, à multiplier I_n par un facteur numérique qui tend vers l'unité.

En faisant cela, on obtient le développement

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

dans lequel les coefficients a et b sont ceux de Fourier :

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos ku\,du, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin ku\,du.$$

En définitive, notre somme S_n n'est pas autre chose que la somme des $n+1$ premiers termes de la série de Fourier, respectivement multipliés par un facteur numérique qui décroît constamment d'un terme au suivant : de la valeur 1 (pour le premier terme) jusqu'à la valeur 0 (pour celui de rang $n+2$). De plus, chaque facteur tend vers l'unité quand n tend vers l'infini.

En faisant tendre n vers l'infini et en cherchant la limite de S_n, *nous définissons donc un mode particulier de sommation de la série de Fourier* (*).

(*) Sur la sommation des séries de Fourier divergentes, on peut consulter les *Leçons sur les séries trigonométriques* de M. LEBESGUE (Paris, G. V., 1906), nos 48 et suivants. Le procédé de sommation de M. FEJÉR, qui y est étudié, mérite particulièrement l'attention. Celui que nous définissons a, comme le procédé de M. FEJÉR, l'avantage de passer par l'intermédiaire de suites *finies* de Fourier, mais il est, croyons-nous, beaucoup plus général.

29. Relations entre la somme S_n et la série de Fourier. — *Si la série de Fourier*

$$S = \frac{a_0}{2} + \Sigma(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

est convergente, S_n *a pour limite* S, *quand* n *tend vers l'infini.*

Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ce théorème, car il est clair qu'il se démontre comme le théorème classique d'Abel sur les séries entières, théorème dont voici l'énoncé :

Si la série

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \cdots$$

est convergente et a pour somme S, *on a aussi, quand* x *tend vers* 1 *en croissant,*

$$\lim_{x=1} (\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k + \cdots) = S.$$

En effet, la démonstration connue du théorème d'Abel repose sur cette seule circonstance que l'on a multiplié respectivement les termes successifs de la série $\Sigma\alpha_k$ par les facteurs x^k qui décroissent d'un terme au suivant et qui tendent chacun vers l'unité quand x tend vers l'unité. — On fait exactement la même chose pour passer de la série de Fourier à la somme S_n, sauf que les facteurs de la transformation deviennent tous nuls à partir d'un certain rang.

Donc S_n tend vers la somme S de la série de Fourier quand cette série converge. Mais, comme on le verra, S_n a une limite dans des cas très généraux où la série de Fourier ne converge pas, ce qui généralise donc dans un sens très étendu la sommation de la série de Fourier.

Mais il y a plus : la relation que nous venons d'étudier entre la somme S_n et la série de Fourier se conserve exactement la même entre les dérivées de S_n et les dérivées du même ordre de la série de Fourier. Donc *partout où les dérivées de la série de Fourier convergent, elles ont nécessairement pour sommes les limites des dérivées correspondantes de* S_n.

Cette relation entre S_n et la série de Fourier est accessoire dans notre étude ; mais elle méritait d'être signalée, car elle ajoute un nouvel intérêt à la recherche des limites de S_n ou, ce qui revient au même, de I_n.

Nous allons donc passer maintenant à la recherche de ces limites.

§ 2. — *Convergence des suites d'approximation* I_n *et* S_n.

30. Remarques préliminaires. — Comme nous l'avons dit précédemment (n° 28), les limites de I_n et de S_n ou, plus généralement, leurs valeurs asymptotiques, sont les mêmes quand n tend vers l'infini. Il nous suffira donc de considérer l'intégrale I_n.

Nous avons dit au n° 26 que nous considérions la fonction $f(x)$ de *période* 2π et que cette fonction était, par conséquent, définie par ses valeurs dans l'intervalle $-\pi$ et $+\pi$. Il suffit donc de faire varier x dans cet intervalle.

Toutefois, pour éviter des longueurs inutiles, nous supposerons dans les démonstrations que x ne sort pas de l'intervalle

$$(-\pi + \varepsilon, \qquad \pi - \varepsilon),$$

où ε est un nombre positif, d'ailleurs aussi petit qu'on veut.

Dans cette hypothèse, mettons en regard l'intégrale I_n avec celle P_n de la première partie :

$$I_n = \frac{h_n}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)\cos^{2n}\left(\frac{u-x}{2}\right)du$$

$$P_n = \frac{k_n}{2}\int_0^{+1} f(u)[1-(u-x)^2]^n\,du.$$

Le facteur $\cos^{2n}\left(\frac{u-x}{2}\right)$ de l'intégrale I_n est < 1 dans tout le champ d'intégration, sauf pour la seule valeur $u = x$. On peut donc raisonner sur ce facteur comme nous l'avons fait sur le facteur

$$[1-(u-x)^2]^n$$

de l'intégrale P_n dans les démonstrations de la première partie.

Cependant les théorèmes, établis pour l'intervalle $(-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, subsisteront pour l'intervalle entier $(-\pi, +\pi)$; et les points extrêmes $-\pi$ et $+\pi$ seront complètement assimilables aux autres, à condition d'avoir égard à la périodicité de $f(x)$ et de I_n. Cette extension s'obtient par des raisonnements tout pareils à ceux que l'on fait dans le cas de la série de Fourier et il est inutile de les développer.

Nous allons maintenant donner les analogues des théorèmes de la première partie en donnant le même numéro d'ordre aux théorèmes correspondants. Nous ne recommençons pas la démonstration quand l'extension est immédiate.

31. Théorème I. — *La valeur asymptotique (pour* n *infini) de* I_n *et de* S_n *dépend uniquement de la nature de* $f(x)$ *dans le voisinage immédiat du point* x.

Par le changement de u en $u + x$, il vient

$$I_n = \frac{h_n}{2}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du.$$

La valeur asymptotique de I_n sera la même que celle de

$$\frac{h_n}{2}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x+u)\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du,$$

quelque petite que soit la constante ε. On voit, en effet, comme dans la démonstration du théorème analogue (n° 4), que les parties d'intégrales négligées sont infiniment petites comme les expressions

$$h_n\cos^{2n}\frac{\varepsilon}{2}\int|f|\,dx \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{n}\cos^{2n}\frac{\varepsilon}{2}.$$

32. Théorème II. — *En tout point où* $f(x)$ *est continue, on a, pour* n *infini,*

$$\lim S_n = \lim I_n = f(x).$$

33. Théorème III. — *La convergence est uniforme dans tout intervalle où* $f(x)$ *est continue.*

34. Théorème IV. — *En un point de discontinuité de* $f(x)$, *les plus grande et plus petite limites de* I_n *et de* S_n *sont* *comprises dans l'intervalle des bornes supérieure et inférieure de* f(x) *au point* x.

35. Théorème V. — *En un point de discontinuité de première espèce, on a*

$$\lim \mathrm{I}_n = \lim \mathrm{S}_n = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

§ 3. — *Convergence des dérivées.*

36. Théorème VI. — *Les dérivées premières de* I_n *et de* S_n *ont pour limite la dérivée première généralisée* (n° 11) *de* f(x) *en tout point où celle-ci existe. Cette limite sera égale, en particulier, à la dérivée* f′(x) *partout où cette dérivée ordinaire existe.*

En effet, on peut reproduire, point par point, la démonstration du théorème analogue donnée au n° 12 en y remplaçant seulement k_n par h_n, puis en remplaçant

$$[1-(u-x)^2]^n \qquad \text{par} \qquad \cos^{2n}\frac{u-x}{2},$$

$$d:(1-u^2)^n \qquad \text{par} \qquad d\cos^{2n}\frac{u}{2}.$$

37. Théorème VII. — *Les dérivées secondes de* I_n *et de* S_n *ont pour limite la dérivée seconde généralisée* (n° 14) *de* f(x) *en tout point où cette dérivée généralisée existe.*

En effet, de même qu'on a trouvé, dans la démonstra-

tion du n° 15, que la valeur asymptotique de P''_n est la même que celle de l'intégrale

$$\frac{k_n}{2}\int_0^{\varepsilon}\frac{f(x+u)+f(x-u)-2a_0}{u^2}\,u^2\mathrm{D}^2(1-u^2)^n\,du,$$

de même on trouvera, dans le cas actuel, que la valeur asymptotique de I''_n est la même que celle de l'expression

$$\frac{h_n}{2}\int_0^{\varepsilon}\frac{f(x+u)+f(x-u)-2a_0}{u^2}\,u^2\mathrm{D}^2(1-u^2)^n\,du,$$

l'intégrale

$$\frac{h_n}{2}\int_0^{\varepsilon}\mathrm{D}^2\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du$$

étant infiniment petite.

Si la dérivée seconde généralisée a_2 existe, on a, ω tendant vers 0 avec u,

$$\frac{f(x+u)+f(x-u)-2a_0}{u^2} = a_2+\omega.$$

La limite de I''_n sera donc celle de la somme

$$a_2\frac{h_n}{2}\int_0^{\varepsilon}u^2\mathrm{D}^2\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du$$

$$+\frac{h_n}{2}\int_0^{\varepsilon}\omega u^2\mathrm{D}^2\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du.$$

Si l'on fait deux intégrations par parties consécutives, en observant que les termes aux limites sont infiniment petits, on voit que la limite du premier terme est celle de

$$a_2 h_n \int_0^{\varepsilon} \cos^{2n}\frac{u}{2}\,du, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a_2.$$

Pour établir le théorème, il suffit donc d'établir que le second terme est infiniment petit avec ω, quel que soit n, car ω peut être supposé infiniment petit en même temps que ε.

Comme on peut changer la variable u en $2u$ et remplacer ε par 2ε, nous sommes donc ramenés à établir que

$$h_n \int_0^{\varepsilon} \omega u^2 D^2 \cos^{2n} u\,du$$

est infiniment petit avec ω.

On a

$$D^2 \cos^{2n} u = 2n(2n-1)\cos^{2n-2} u \sin^2 u - 2n \cos^{2n} u.$$

Mais, pour $0 < u < \varepsilon$, on a

$$\sin u < u \qquad \text{et} \qquad \cos u < e^{-\frac{u^2}{2}},$$

car la fonction $e^{\frac{u^2}{2}}\cos u$, qui est égale à 1 pour $u = 0$, est décroissante, sa dérivée

$$e^{\frac{u^2}{2}}\cos u\,[u - \operatorname{tg} u]$$

étant négative. On a donc

$$D^2 \cos^{2n} u = 2n(2n-1)\cos^{2n-2} u \sin^2 u - 2n \cos^{2n} u,$$

$$|D^2 \cos^{2n} u| < 4n^2 e^{-(n-1)u^2} u^2 + 2n e^{-nu^2}.$$

Nous sommes ainsi conduits à démontrer que les deux intégrales

$$h_n n^2 \int_0^{\varepsilon} \omega e^{-(n-1)u^2} u^4\,du,$$

$$h_n n \int_0^{\varepsilon} \omega e^{-nu^2} u^2\,du,$$

sont infiniment petites avec ω, quel que soit n. Mais cette conclusion apparaît par le changement de u en $\frac{u}{\sqrt{n-1}}$ ou en $\frac{u}{\sqrt{n}}$ qui ramène respectivement ces intégrales aux deux suivantes :

$$\frac{h_n}{\sqrt{n-1}} \int_0^{\varepsilon\sqrt{n-1}} \omega e^{-u^2} u^4\,du,$$

$$\frac{h_n}{\sqrt{n}} \int_0^{\varepsilon\sqrt{n}} \omega e^{-u^2} u^2\,du,$$

h_n étant de l'ordre de $\sqrt{n}$.

38. Théorème VIII. — *Les dérivées d'ordre* k *quelconque de* I_n *ou de* S_n *ont pour limite la dérivée du même ordre de* $f(x)$ *en tout point où cette dérivée existe.*

Ce théorème se démontre comme le théorème analogue du n° **17**.

39. Théorème IX. — *Les dérivées d'ordre* r *quelconque de* I_n *et de* S_n *ont pour limite la dérivée généralisée du même ordre de* f(x) (n° 18) *en tout point où cette dérivée généralisée existe.*

De même que la démonstration du théorème analogue sur P_n revient à prouver (n° 19) que l'expression

$$k_n \int_0^{\varepsilon} \omega u^r D^r (1 - u^2)^n du$$

est infiniment petite avec ω quel que soit n, de même la démonstration du théorème actuel revient à prouver que l'expression

$$h_n \int_0^{\varepsilon} \omega u^r D^r \cos^{2n} \frac{u}{2}\, du$$

est infiniment petite avec ω. Pour simplifier, remplaçons u par $2u$ et ε par 2ε, nous devrons prouver la même chose pour l'expression

$$h_n \int_0^{\varepsilon} \omega u^r D^r \cos^{2n} u\, du.$$

A cet effet, remarquons que $D^r \cos^{2n} u$ est la somme d'un certain nombre (fonction de r) de termes de la forme générale

$$A_{r-s} \cos^{2n-r+2s} u \sin^{r-2s} u,$$

où s prend les valeurs 0, 1, 2, ... qui ne surpassent pas $\frac{r}{2}$ et où A_{r-s} désigne en général un coefficient numérique infiniment grand avec n, mais *de l'ordre de* n^{r-s}.

Cette propriété se vérifie directement pour le premier ordre, et on prouve qu'elle est générale en observant que la dérivée du terme général écrit ci-dessus est la somme de deux termes analogues, mais où r est changé en $r+1$. Nous avons développé une démonstration toute pareille au n° 20.

Remplaçons donc, dans la dernière intégrale, $D^r \cos^{2n} u$ par ce développement; il suffira de montrer que

$$A_{r-s} h_n \int_0^{\varepsilon} \omega u^r \cos^{2n-r+2s} u \sin^{r-2s} u\, du$$

est infiniment petit avec ω.

Mais on peut appliquer le théorème de la moyenne pour faire sortir du signe $\int$ le facteur, infiniment petit avec ω,

$$\omega \cos^{2s-r} u;$$

il suffit donc de montrer que l'intégrale

$$A_{r-s} h_n \int_0^{\varepsilon} u^r \cos^{2n} u \sin^{r-2s} u\, du$$

conserve toujours une valeur finie.

Mais on a (n° 37)

$$\cos^{2n} u < e^{-nu^2}, \quad \sin u < u;$$

cette intégrale est donc moindre que

$$A_{r-s} h_n \int_0^{\infty} u^{r-s} e^{-nu^2} du = \frac{A_{r-s}}{n^{r-s}} \frac{h_n}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} u^{r-s} e^{-u^2} du;$$

elle est donc finie, car A_{r-s} est de l'ordre de n^{r-s} et h_n de l'ordre de $\sqrt{n}$.

Remarque. — La démonstration met en évidence que *la convergence des dérivées d'ordre* r *de* I_n et S_n *vers leur limite sera uniforme* (x *variant*) *dans tout intervalle où* ω *tendra uniformément vers* 0 *avec* u; *donc, en particulier, dans tout intervalle intérieur à un autre où la dérivée ordinaire d'ordre* k *de* f(x) *sera continue.*

40. Application aux séries de Fourier. — D'après ce qui a été dit au n° 29, si l'on définit la somme d'une série de Fourier par la limite de la somme S_n correspondante, ce procédé de sommation jouit de la propriété remarquable que voici et qui, pensons-nous, n'a pas été encore signalée même pour d'autres procédés.

Étant donnée la série de Fourier d'une fonction f(x), *si l'on dérive successivement cette série au point* x, *la somme d'une série dérivée d'ordre quelconque, somme déterminée par le procédé* (S_n), *sera égale à la dérivée correspondante de* f(x) *au point* x, *si la dérivée existe en ce point.* — *Plus généralement, la somme de la série dérivée sera égale à la dérivée généralisée de* f(x), *si cette dérivée existe.*

En particulier, si la dérivée d'ordre quelconque d'une série de Fourier converge (dans le sens ordinaire) au point x, elle aura pour somme la dérivée du même ordre de $f(x)$, sous la seule condition que cette dérivée (ordinaire ou généralisée) existe au point x.

La propriété remarquable que nous venons de reconnaître au procédé de sommation (S_n) nous amène naturellement à nous demander si un autre procédé, déjà connu, ne jouirait pas des mêmes propriétés. Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi pour le procédé de sommation de Poisson.

§ 4. — *Digression sur la sommation des dérivées des séries de Fourier par le procédé de Poisson.*

41. Intégrale de Poisson. — Conservons toutes nos hypothèses précédentes (n° 26) sur la fonction $f(x)$ et considérons la *série de Fourier de cette fonction*, c'est-à-dire la série formelle

$$\tfrac{1}{2} a_0 + \Sigma (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

dont les coefficients sont définis au n° 28, laquelle série peut converger ou non au point x.

Pour sommer cette série, Poisson considère la fonction (*)

$$J(r, x) = \tfrac{1}{2} a_0 + \Sigma r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

qui existe pour $0 < r < 1$ dans les hypothèses que nous venons de rappeler; et il convient que la somme de la série de Fourier sera, par définition,

$$\lim_{r=1} J(r, s).$$

Cette limite est d'ailleurs égale à la somme de la série dans le sens ordinaire chaque fois que la série est convergente (Théorème d'Abel, n° 29).

Que la fonction J (r, x) existe sous ces conditions très générales, c'est ce qui résulte immédiatement de ce fait que J (r, x) s'exprime par l'intégrale (bien déterminée dans ce cas), connue sous le nom d'*intégrale de Poisson*,

$$J(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{(1 - r^2)du}{1 - 2r\cos(u - x) + r^2}.$$

(*) *Journal de l'École polytechnique*, 18e cahier.

La transformation se fait par la formule bien connue

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}=1+2\sum_{1}^{\infty} r^n \cos n\theta \quad (*).$$

Donc, pour trouver la somme de la série de Fourier et aussi de ses dérivées d'ordre quelconque par le procédé de Poisson, il faut chercher la limite de J et de ses dérivées par $r=1$.

C'est un résultat bien connu que J tend vers $f(x)$ aux points où $f(x)$ est continue. C'est pourquoi nous allons passer immédiatement à la considération des dérivées. Nos calculs antérieurs nous tracent d'ailleurs la voie à suivre par arriver au résultat.

42. Transformation préalable de la dérivée de l'intégrale de Poisson. — Dans le cas actuel, le facteur de discontinuité, analogue au facteur $\cos 2n\frac{u-x}{2}$ de tout à l'heure, est

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-x)+r^2}.$$

Ce facteur est toujours positif si $0<r<1$; et, si l'on impose à x la condition de rester compris dans l'intervalle

$$(-\pi+\varepsilon, \quad \pi-\varepsilon)$$

quelque petit que soit ε positif, ce facteur tend vers 0 quand r tend vers l'unité, sauf pour la seule valeur $u=x$ qui le rend infini; et toutes les dérivées de ce facteur possèdent la même propriété.

(*) Voir, par exemple, Picard, *Traité d'analyse*, t. I, 1re édit., p. 248.

Nous supposerons donc, dans les démonstrations, que x varie dans cet intervalle. Mais, comme nous l'avons déjà remarqué au n° 30 pour I_n, les conclusions s'appliqueront à toutes les valeurs de x, à cause de la périodicité supposée de la fonction $f(x)$.

Il suit de la remarque que nous venons de faire sur le facteur de discontinuité, que la dérivée d'ordre k quelconque (*)

$$J_x^{(k)}(r,x)=\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, D_x^k \frac{1}{1-2r\cos(u-x)+r^2}\,du$$

aura la même valeur asymptotique (r tendant vers 1) que l'intégrale

$$\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(u)\, D_x^k \frac{1}{1-2r\cos(u-x)+r^2}\,du.$$

Mais on peut remplacer D_x par $-D_u$, puis la variable x

(*) La dérivation sous le signe ne donne pas lieu à difficulté. En remplaçant dans l'intégrale

$$D_x^k \frac{1}{1-2r\cos(u-x)+r^2}$$

par son développement en série *uniformément convergente*

$$2\Sigma D_x^k\, r^n \cos n(u-x),$$

et en intégrant terme à terme, on trouve tous les mêmes termes qu'en dérivant k fois l'expression de $J(r,x)$ en série. Toutes les séries sont *uniformément convergentes*.

par $x + u$, ce qui ramène cette intégrale aux suivantes :

$$(-1)^k \frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+u)\, D_u^k \frac{1}{1-2r\cos u + r^2}\, du$$

$$(-1)^k \frac{1-r^2}{2\pi}\int_{0}^{\varepsilon} [f(x+u) \pm f(x-u)]\, D_u^k \frac{1}{1-2r\cos u + r^2}\, du,$$

le signe ambigu dépendant de la parité de k (+ si k est pair, — si k est impair).

Pour trouver la limite de cette expression, il convient d'abord d'étudier la dérivée qui s'y trouve.

48. Dérivées du facteur de discontinuité. — Nous aurons à utiliser deux propriétés des dérivées par rapport à u du facteur.

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos u + r^2}.$$

1° *Toutes les dérivées d'ordre impair s'annulent pour* $u = 0$.

On s'aperçoit immédiatement de cette propriété en dérivant (ce qui est permis) le développement de ce facteur, à savoir

$$1 + 2\Sigma r^n \cos nu;$$

les dérivées d'ordre impair ne contiennent que des sinus.

2° La dérivée d'ordre k quelconque de

$$\frac{1}{1-2r\cos u + r^2}$$

se décompose (abstraction faite de coefficients numériques finis quand r tend vers *un*) en une somme de termes de la forme générale

$$\frac{\sin^{\alpha} u \cos^{\beta} u}{(1-2r\cos u + r^2)^{\gamma}}$$

où les exposants sont entiers, α et β nuls ou positifs et $\gamma > 1$, avec la condition

$$2\gamma - \alpha \leqslant k + 2.$$

Cette propriété se vérifie immédiatement pour le premier ordre. Pour établir qu'elle est générale, il suffit de la supposer vraie pour le terme général écrit ci-dessus et de montrer qu'elle subsiste (en changeant k en $k+1$) pour les termes qui s'en déduisent par une dérivation.

Or cette dérivation peut donner trois termes (il y en a moins si α ou β est nul), les exposants devenant respectivement (le cas d'un exposant négatif étant à exclure) :

$\alpha - 1$	$\beta + 1$	γ	pour le premier terme,
$\alpha + 1$	$\beta - 1$	γ	pour le second terme,
$\alpha + 1$	β	$\gamma + 1$	pour le troisième terme.

Donc $2\gamma - \alpha$ est remplacé par l'un des nombres

$$(2\gamma - \alpha) + 1 \qquad (2\gamma - \alpha) - 1 \qquad (2\gamma - \alpha) + 1,$$

si ce nombre augmente, il augmente de 1 comme k et l'inégalité $2\gamma - \alpha \leqslant k + 2$ subsiste.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

44. Théorème. — *La dérivée d'ordre* k *quelconque de* J (r, x) *a pour limite, quand* r *tend vers l'unité, la dérivée généralisée de* f(x) *au point* x (n° 18), *sous la seule condition que cette dérivée généralisée existe au point* x.

Supposons, pour fixer les idées, k pair (le raisonnement étant tout pareil pour k impair). Nous avons à chercher la limite de (n° 42)

$$\frac{1-r^2}{\pi}\int_0^\varepsilon \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\,D_u^k\,\frac{1}{1-2r\cos u+r^2}\,du,$$

sachant que l'on a (ω étant infiniment petit avec u ou ε)

$$\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}=a_0+a_2\frac{u^2}{2}+\cdots+(a_k+\omega)\frac{u_k}{k!}.$$

Pour établir le théorème, il y a donc trois choses à prouver :

1° Si i est un nombre pair comme k, mais $< k$, on a

$$\lim\frac{1-r^2}{\pi}\int_0^\varepsilon u^i D^k\,\frac{1}{1-2r\cos u+r^2}\,du=0;$$

2° Si $i=k$, on a

$$\lim\frac{1-r^2}{\pi}\int_0^\varepsilon u^k D^k\,\frac{1}{1-2r\cos u+r^2}\,du=1;$$

3° L'intégrale

$$(1-r^2)\int_0^\varepsilon \omega u^k D^k\,\frac{1}{1-2r\cos u+r^2}\,du$$

est infiniment petite avec ω, quel que soit $r<1$.

La démonstration du 1° est immédiate. Si i n'est pas nul, on fait i intégrations par parties consécutives en observant que les termes aux limites sont nuls pour $u=0$ et infiniment petits pour $u=\varepsilon$ (r tendant vers 1). On obtient l'intégrale

$$\int_0^\varepsilon D^{k-i}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos u+r^2}\,du=\left[D^{k-i-1}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos u+r^2}\right]_0^\varepsilon.$$

Cette dérivée d'*ordre impair* $k-i-1$ s'annule pour $u=0$ (n° 43, 1°) et est infiniment petite à l'autre limite ε quand r tend vers 1. Donc la limite de l'intégrale est nulle.

Pour démontrer le 2°, on fait k intégrations par parties consécutives, ce qui ramène, pour les mêmes raisons, à l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon \frac{1-r^2}{1-2r\cos u+r^2}\,du=\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

qui, comme on le voit directement, a pour limite l'unité quand r tend vers 1.

Reste seulement à démontrer le 3°. A cet effet, remplaçons la dérivée d'ordre k par son développement indiqué au numéro précédent et laissons de côté le facteur fini $1 + r$ compris dans $1 - r^2$. Il faudra prouver que

$$(1-r)\int_0^{\varepsilon} \omega \frac{u^k \sin^\alpha u \cos^\beta u \, du}{(1-2r\cos u + r^2)^\gamma} \quad (2\gamma - \alpha \leqslant k+2)$$

est infiniment petit avec ω.

A cette fin, observons que l'on a

$$1 - 2r\cos u + r^2 = (1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{u}{2}$$

et que le rapport

$$\frac{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{u}{2}}{(1-r)^2 + u^2}$$

a une valeur moyenne entre

$$\left(\frac{1-r}{1-r}\right)^2 \quad \text{et} \quad r\frac{4\sin^2\frac{u}{2}}{u^2}.$$

Ce rapport est donc aussi voisin qu'on veut de 1, pourvu que u soit assez petit et r assez voisin de 1.

Il s'ensuit, sans difficulté, que les deux facteurs positifs

$$\frac{u^k \sin^\alpha u + \cos^\beta u}{(1-2r\cos u + r^2)^\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{u^{k+\alpha}}{[(1-r)^2 + u^2]^\gamma}$$

ont un rapport aussi voisin qu'on veut de 1 avec r, quand u est positif et suffisamment petit (donc quand ε est suffisamment petit). Nous pouvons donc substituer le

second facteur au premier dans la démonstration et considérer l'intégrale

$$(1-r)\int_0^{\varepsilon} \omega \frac{u^{k+\alpha} d\alpha}{[(1-r)^2 + u^2]^\gamma},$$

où

$$k + \alpha \geqslant 2\gamma - 2.$$

Soit

$$k + \alpha = (2\gamma - 2) + \rho \qquad (\rho \geqslant 0);$$

nous pouvons, par le théorème de la moyenne, mettre la quantité $\omega\, u^\rho$ qui est infiniment petite avec ω hors de l'intégrale, et il suffit alors de prouver que l'expression

$$(1-r)\int_0^{\varepsilon} \frac{u^{2\gamma-2} du}{[(1-r)^2 + u^2]^\gamma}$$

est finie, quel que soit $r < 1$. Ceci apparait par le changement de variable $u = (1-r)\,t$, qui montre que cette expression est inférieure à l'intégrale finie

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2\gamma-2} dt}{(1+t^2)^\gamma}.$$

Le théorème est donc démontré. On voit de plus que x variant, *la convergence sera uniforme si ω tend uniformément vers* 0.

Ce théorème peut encore s'énoncer comme il suit :

45. Théorème. — *Étant donnée la série de Fourier d'une fonction* $f(x)$ *convergente ou non, si l'on dérive* k *fois cette série, la série dérivée, sommée par le procédé de Poisson* (*), *aura pour somme la dérivée d'ordre* k *de* f(x) *en tout point où cette dérivée existe et, plus généralement, la dérivée généralisée en tout point où celle-ci existe. — De plus, dans tout intervalle intérieur à un autre où la dérivée ordinaire d'ordre* k *existe et est continue, la convergence sera uniforme quand* r *tend vers* 1.

PAR EXEMPLE, on peut former la série de Fourier pour l'ordonnée $f(x)$ d'une LIGNE POLYGONALE. Si x est un des sommets, les dérivées généralisées d'ordre impair sont toutes nulles, sauf la première qui est égale à la dérivée moyenne. On a, en effet, pour u suffisamment petit (nº 18) :

$$f(x+u) - f(x-u) = 2a_1 u.$$

Donc, en ce point-là, toutes les dérivées d'*ordre impair* de la série de Fourier peuvent être sommées par le procédé de Poisson; la première aura pour somme a_1, toutes les autres pour sommes 0.

Comme les dérivées généralisées d'ordre impair > 1 sont aussi nulles aux autres points, elles sont donc nulles pour toutes les valeurs de x. Mais la convergence de $J(r, x)$ cessera d'être uniforme dans le voisinage des sommets.

(*) On n'oubliera pas que le procédé de Poisson donne le même résultat que le procédé de sommation ordinaire, chaque fois que la série converge.

—

~~*Tellure natif des mines de Balia (Asie Mineure)*; par G. Cesàro, membre de l'Académie, professeur à l'Université de Liége.~~

~~Dans un lot d'échantillons, provenant des mines de Balia, j'ai remarqué un minéral à éclat métallique, blanc d'étain, dendritique, ressemblant assez bien à la sylvanite; l'étude qui suit m'a montré qu'il s'agissait de tellure natif.~~

* * *

~~*Détermination cristallographique.* — Le minéral constitue un cristal dendritique, mais épais, formé par l'assemblage de plusieurs individus sensiblement parallèles, entrecoupés par du quartz qui s'insère sans altérer ce parallélisme (fig. 1). On voit miroiter les clivages prismatiques e^2, dont on peut mesurer l'angle de 60° dans les fragments tirés de l'assemblage. La symétrie rhomboédrique se manifeste nettement à l'observation attentive, chaque face prismatique se terminant d'un côté par une horizontale, de l'autre par l'angle α formé par les intersections de cette face avec deux faces du~~