ÜBER DIE ANALYTISCHE DARSTELLBARKEIT SOGENANNTER WILLKÜRLICHER FUNCTIONEN REELLER ARGUMENTE.

(Aus dem Sitzungsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 9. und 30. Juli 1885.)

1.

Das Hauptergebniss der nachstehenden Untersuchung lässt sich, wenn man sich zunächst auf Functionen einer Veränderlichen beschränkt, folgendermaassen aussprechen:

Es sei x eine reelle Veränderliche, welche jeden dem Intervall $(-\infty \cdots +\infty)$ angehörigen Werth annehmen kann, ferner bedeute $f(x)$ eine reelle und durchweg continuirliche Function von x, so lässt sich stets auf mannigfaltige Weise eine Reihe von ganzen Functionen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ der Art bilden, dass für jeden der betrachteten Werthe von x

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

ist. Dabei ist die Reihe $f_1(x) + f_2(x) + \cdots$ in jedem endlichen Intervalle gleichmässig convergent.

Ist $f(x)$ eine für jeden reellen Werth der Veränderlichen x eindeutig definirte, reelle und stetige Function, deren absoluter Betrag eine endliche obere Grenze hat, so gilt bekanntlich die nachstehende Gleichung, in der u eine zweite reelle Veränderliche bedeutet und unter k eine von x und u unabhängige positive Grösse zu verstehen ist:

$$(1.) \qquad \operatorname*{Lim}_{k=0} \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = f(x).$$

Der in dieser Gleichung ausgesprochene Satz lässt sich leicht verallgemeinern.

Es werde irgend eine Function $\psi(x)$ von derselben Beschaffenheit wie $f(x)$ angenommen, welche ihr Zeichen nicht ändert, der Gleichung $\psi(-x) = \psi(x)$ genügt und überdies der Bedingung entspricht, dass das Integral

$$\int_0^{+\infty} \psi(x)\, dx$$

einen endlichen Werth haben muss, der mit ω bezeichnet werden möge. Setzt man dann

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du, \tag{2.}$$

so ist

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} F(x,k) = f(x). \tag{3.}$$

In Betreff des Beweises der Gleichungen (1.) und (3.) möge Folgendes bemerkt werden. Es seien a_1, a_2, b_1, b_2 positive Grössen, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, so hat man

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\int_{-b_1}^{b_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du - \frac{1}{k}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du \\
&\qquad = \frac{1}{k}\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du + \frac{1}{k}\int_{a_2}^{b_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du \\
&\qquad = f(-b_1 \cdots -a_1) \int_{\frac{a_1+x}{k}}^{\frac{b_1+x}{k}} \psi(u)\, du + f(a_2 \ldots b_2) \int_{\frac{a_2-x}{k}}^{\frac{b_2-x}{k}} \psi(u)\, du.\text{*)}
\end{aligned}$$

In Verbindung mit den in Betreff der Functionen $f(x)$, $\psi(x)$ gemachten Annahmen lehrt diese Gleichung, dass das Integral

$$\frac{1}{k}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

wenn man den Grössen x, k bestimmte Werthe giebt und dann a_1, a_2 unabhängig von einander unendlich gross werden lässt, sich einer bestimmten

---

*) Ich bezeichne mit $f(x_1 \ldots x_2)$ einen Mittelwerth zwischen dem kleinsten und grössten derjenigen Werthe, welche $f(x)$ in dem Intervall von $x = x_1$ bis $x = x_2$ annimmt.

endlichen Grenze nähert, und somit das Integral

$$\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

eine wohldefinirte Grösse ist.

Dies festgestellt, sei nun δ eine beliebig klein anzunehmende positive Grösse, so ist

$$\begin{aligned}
F(x,k) &= \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{x-\delta} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{2k\omega}\int_{x+\delta}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
&\quad + \frac{1}{2k\omega}\int_{x-\delta}^{x} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{2k\omega}\int_{x}^{x+\delta} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
&= \frac{1}{2\omega} f(-\infty\ldots x-\delta)\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega} f(x+\delta\cdots+\infty)\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du \\
&\quad + \frac{1}{2\omega}\int_0^{\frac{\delta}{k}} (f(x-ku)+f(x+ku))\,\psi(u)\,du.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
F(x,k)-f(x) &= \frac{f(-\infty\cdots+\infty)-f(x)}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du \\
&\quad + \frac{1}{2\omega}\int_0^{\frac{\delta}{k}} (f(x-ku)+f(x+ku)-2f(x))\,\psi(u)\,du \\
&= \frac{f(-\infty\cdots+\infty)-f(x)}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du \\
&\quad + \frac{1}{2}\varepsilon_1(f(x-\varepsilon\delta)+f(x+\varepsilon\delta)-2f(x)),
\end{aligned}$$

wo ε, ε_1 positive, zwischen 0 und 1 enthaltene Grössen bedeuten.

Nun seien x_1, x_2 irgend zwei bestimmte Werthe von x, G die obere Grenze für den absoluten Betrag von $f(x)$, und g_1, g_2 zwei positive Grössen, die beliebig klein angenommen werden können. Dann kann man zunächst der Grösse δ einen so kleinen Werth geben, dass der absolute Betrag von

$$\frac{1}{2}(f(x-u)+f(x+u)-2f(x))$$

stets kleiner als g_1 ist, wenn x in dem Intervall $(x_1 \dots x_2)$, und zugleich u in dem Intervall $(0 \dots \delta)$ angenommen wird. Hat man einen solchen Werth von δ fixirt, so kann man ferner eine positive Grösse k' so bestimmen, dass für jeden Werth von k, der $< k'$,

$$\frac{2G}{\omega} \int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty} \psi(u)\, du < g_2,$$

also vermöge der vorstehenden Gleichung die Differenz zwischen $F(x, k)$ und $f(x)$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als $g_1 + g_2$ ist, und zwar für jeden der betrachteten Werthe von x.

Hiermit ist also nicht nur bewiesen, dass $F(x, k)$ für jeden einzelnen Werth von x der Grenze $f(x)$ sich nähert, wenn k unendlich klein wird, sondern auch, dass die Annäherung für alle einem endlichen Intervalle angehörigen Werthe von x eine gleichmässige ist.

Aus der Gleichung (3.) ziehe ich nun eine bemerkenswerthe Folgerung.

Unter den Functionen $\psi(x)$, welche den oben angegebenen Bedingungen entsprechen, giebt es unzählige, welche transcendente ganze Functionen und zugleich so beschaffen sind, dass auch die zugehörigen Functionen $F(x, k)$ für jeden bestimmten Werth der Grösse k in beständig convergirende Potenzreihen von x entwickelt werden können. Nimmt man für $\psi(x)$ eine derartige Function, z. B. $\psi(x) = e^{-xx}$, so ergiebt sich der folgende Satz:

A. »Ist $f(x)$ eine nur für reelle Werthe der Veränderlichen x eindeutig definirte und durchweg stetige Function, so lässt sich auf mannigfaltige Weise eine transcendente g a n z e Function $F(x, k)$ herstellen, welche ausser x noch einen veränderlichen (positiven) Parameter k enthält und so beschaffen ist, dass für jeden reellen Werth von x die Gleichung

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} F(x, k) = f(x)$$

besteht.«

Unter der Bedingung, dass die Veränderliche x auf irgend ein endliches Intervall beschränkt werde, kann man ferner, wie gezeigt worden ist, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g', dem Parameter k einen so kleinen Werth k' geben, dass für jeden Werth von x die Differenz zwischen

$F(x, k')$ und $f(x)$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als g' ist. Stellt man sodann $F(x, k')$ in der Form einer Potenzreihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

dar und bezeichnet die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe mit $G(x)$, so kann man, nach Annahme einer anderen positiven Grösse g'', dem n einen so grossen Werth geben, dass für jeden dem angenommenen Intervall angehörigen Werth von x der absolute Betrag von $F(x, k') - G(x)$ kleiner als g'', mithin der absolute Betrag von $f(x) - G(x)$ kleiner als $g' + g''$ ist.

Damit ist bewiesen:

B. »Ist $f(x)$ eine Function von der angegebenen Beschaffenheit, und wird die Veränderliche x auf irgend ein endliches Intervall beschränkt, so lässt sich, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g, auf mannigfaltige Weise eine ganze rationale Function $G(x)$ bestimmen, welche in dem festgesetzten Intervalle sich der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass die Differenz $f(x) - G(x)$ ihrem absoluten Betrage nach beständig kleiner als g ist.«

Nun nehme man zwei unendliche Reihen positiver Grössen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$
$$g_1, g_2, g_3, \ldots$$

so an, dass $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} a_n = \infty$ ist und $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ einen endlichen Werth hat; dann kann man dem Vorstehenden gemäss eine Reihe von ganzen rationalen Functionen

$$G_1(x),\ G_2(x),\ G_3(x),\ \ldots$$

so bestimmen, dass (für $\nu = 1, 2, \ldots \infty$)

$$|f(x) - G_\nu(x)| < g_\nu$$

ist, wenn x in dem Intervall $(-a_\nu \ldots a_\nu)$ liegt. Setzt man sodann

$$f_0(x) = G_1(x),\quad f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x),$$

so ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) = G_{n+1}(x)$$

und für jeden bestimmten Werth von x

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_{n+1}(x) = f(x);$$

woraus sich

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

ergiebt.

Nun seien x_1, x_2 irgend zwei bestimmte, endliche Werthe von x, so ergiebt sich aus den Ungleichheiten

$$\begin{array}{ll} |f(x) - G_\nu(x) \;| < g_\nu, & (-a_\nu \leqq x \leqq a_\nu) \\ |f(x) - G_{\nu+1}(x)| < g_{\nu+1}, & (-a_{\nu+1} \leqq x \leqq a_{\nu+1}) \end{array}$$

dass für jeden dem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$ angehörigen Werth von x

$$|f_\nu(x)| < g_\nu + g_{\nu+1}$$

ist, sobald ν grösser ist als eine bestimmte Zahl ν', die dadurch definirt wird, dass jedes Intervall $(-a_\nu \ldots a_\nu)$, für welches $\nu > \nu'$, die Werthe x_1, x_2 beide enthalten muss. Man hat also

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} |f_\nu(x)| < \sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} (g_\nu + g_{\nu+1}), \quad \text{wenn } x_1 \leqq x \leqq x_2;$$

und es convergirt demzufolge die Reihe

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} f_\nu(x)$$

und somit auch die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

unbedingt und gleichmässig für die dem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$ angehörigen Werthe von x. Es ist aber die Wahl der Grössen x_1, x_2 keiner andern Beschränkung unterworfen, als dass sie endliche reelle Werthe haben müssen, und die Functionen $f_\nu(x)$ sind unabhängig von denselben; die vorstehende Reihe convergirt also unbedingt für jeden Werth von x und gleichmässig in jedem Intervall

$$x_1 \leqq x \leqq x_2,$$

dessen Grenzen endliche Werthe haben. Es gilt also das Theorem:

C. »Jede Function $f(x)$ von der angegebenen Beschaffenheit lässt sich auf mannigfaltige Weise darstellen in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder ganze rationale Functionen von x sind; diese Reihe convergirt unbedingt für jeden endlichen Werth von x, und gleichmässig in jedem Intervalle $(x_1 \dots x_2)$, dessen Grenzen endliche Grössen sind.«

In Betreff des Satzes B. ist zu bemerken, dass man zur Begründung desselben nur anzunehmen braucht, es sei $\psi(x)$ eine transcendente ganze Function, welche für reelle Werthe von x die im Vorstehenden angegebenen Eigenschaften besitzt, nicht aber, dass auch $F(x, k)$ eine ganze Function von x sei, was keine nothwendige Folge der ersteren Annahme ist.

Setzt man nämlich, unter a, b zwei beliebig anzunehmende reelle Grössen verstehend,

$$F_1(x, k) = \frac{1}{2k\omega} \int_a^b f(u)\, \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

so hat man für reelle Werthe von x

$$F(x, k) = F_1(x, k) + \frac{1}{2\omega} \int_{\frac{x-a}{k}}^{+\infty} f(x-ku)\, \psi(u)\, du + \frac{1}{2\omega} \int_{\frac{b-x}{k}}^{+\infty} f(x+ku)\, \psi(u)\, du$$

und kann also, wenn a, b, x_1, x_2 der Bedingung

$$a < x_1 < x_2 < b$$

gemäss angenommen werden, und eine beliebig kleine positive Grösse g_1 gegeben ist, den Werth von k so fixiren, dass für jeden dem Intervalle $(x_1 \dots x_2)$ angehörigen Werth von x der absolute Betrag der Differenz $f(x) - F_1(x, k)$ kleiner als g_1 ist. Dies vorausgesetzt, kann man ferner, da $F_1(x, k)$ unbedingt eine (transcendente) ganze Function von x ist, nach Annahme irgend einer zweiten positiven Grösse g_2, eine ganze rationale Function $G(x)$ so bestimmen, dass in dem Intervall $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$

$$|\, G(x) - F_1(x, k) \,| < g_2,$$

also

$$|\, f(x) - G(x) \,| < g_1 + g_2$$

ist; was den Satz B. giebt.

Dieser Beweis des in Rede stehenden Satzes ist, wie ich glaube, vollkommen streng und reicht aus, wenn nur gezeigt werden soll, dass ganze rationale Functionen $G(x)$, welche sich einer gegebenen Function $f(x)$ in allen Punkten eines beliebig angenommenen Intervalls $(x_1 \dots x_2)$ so genau anschliessen, wie man will, existiren und auch wirklich bestimmt werden können. Dagegen leidet die im Vorstehenden angegebene Bildungsweise solcher Functionen an einem wesentlichen Mangel. Setzt man

$$F_1(x, k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (k)_\nu x^\nu,$$

wo $(k)_\nu$ eine Function von k ist, für die sich der Ausdruck

$$(k)_\nu = \frac{(-1)^\nu}{2\omega k^\nu \nu!} \int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} f(ku) \frac{d^\nu \psi(u)}{du^\nu} du$$

ergiebt, und

$$G^{(n)}(x, k) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (k)_\nu x^\nu;$$

so existiren zwar, wenn irgend eine positive Grösse δ gegeben ist, Werthe von k und n, für welche in dem Intervall $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$

$$|f(x) - G^{(n)}(x, k)| < \delta$$

ist; es wird aber, wenn δ unendlich klein wird, k ebenfalls unendlich klein, und es tritt der Ubelstand ein, dass aus dem vorstehenden Ausdruck von $(k)_\nu$ nicht zu ersehen ist, ob derselbe, wenn k unendlich klein wird, einer endlichen Grenze sich nähere oder doch wenigstens endlich bleibe, was unbedingt erforderlich ist, wenn auf die in Rede stehende Weise für einen beliebig kleinen Werth δ ein brauchbarer Annäherungsausdruck der Function $f(x)$ sich soll herstellen lassen.

Diesem Übelstande lässt sich aber folgendermaassen abhelfen.

Es bedeute $f(x)$, wie im Vorhergehenden, eine für jeden reellen Werth der Veränderlichen x eindeutig definirte, reelle und stetige Function, deren absoluter Betrag eine endliche obere Grenze (G) hat. Dagegen sei $\psi(x)$ eine transcendente ganze Function, von der zunächst nur angenommen wird, dass sie reell sei für reelle Werthe von x, und der Bedingung $\psi(-x) = \psi(x)$ genüge. Ferner seien u, v reelle, von einander unabhängige Veränderliche, und es werde

$$\sqrt{\psi(u + vi)\,\psi(u - vi)} = \psi(u, v)$$

gesetzt, wo der Quadratwurzel ihr positiver Werth beizulegen ist. Dann ist der absolute Betrag von $\frac{\psi(u+vi)}{\psi(u,v)}$ gleich 1, und man hat daher, wenn a, b reelle Grössen sind,

$$(4.)\quad \int_a^b f(u)\,\psi(u+vi)\,du = \int_a^b f(u)\frac{\psi(u+vi)}{\psi(u,v)}\cdot\psi(u,v)\,du = \varepsilon G\int_a^b \psi(u,v)\,du,$$

wo ε eine complexe Grösse, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, bezeichnet. Angenommen nun, es sei $\psi(x)$ so beschaffen, dass das Integral

$$\int_0^{+\infty}\psi(u,v)\,du$$

für jeden Werth von v einen endlichen Werth hat, so erhalten, wenn a_1, a_2, b_1, b_2 positive Grössen sind, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, die Integrale

$$\int_{a_2}^{b_2}\psi(u,v)\,du,\quad \int_{-b_1}^{-a_1}\psi(u,v)\,du,$$

von denen das zweite (weil $\psi(-u,v) = \psi(u,v)$) gleich

$$\int_{a_1}^{b_1}\psi(u,v)\,du$$

ist, beide unendlich kleine Werthe, wenn a_1, a_2 unendlich gross werden. Dasselbe gilt also, der vorstehenden Gleichung zufolge, für die Integrale

$$\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\,\psi(u+vi)\,du,\quad \int_{a_2}^{b_2} f(u)\,\psi(u+vi)\,du;$$

und es hat demnach das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\,du$$

einen bestimmten endlichen Werth für jeden Werth von v.

Ich will ferner annehmen, es convergire das Integral

$$\int_{a_2}^{+\infty}\psi(u,v)\,du,$$

wenn a_2 unendlich gross wird, für alle Werthe von v, deren absoluter Betrag einen beliebig festgesetzten Grenzwerth nicht übersteigt, g l e i c h m ä s s i g gegen die Grenze Null, so gilt der Gleichung (4.) zufolge dasselbe von dem Integral

$$\int_{a_2}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\,du,$$

und ebenso, wenn a_1 unendlich gross wird, von

$$\int_{-\infty}^{-a_1} f(u)\,\psi(u+vi)\,du.$$

Es lassen sich also, wenn V, g gegebene positive Grössen sind, von denen V beliebig gross und g beliebig klein sein kann, immer zwei positive Grössen a_1, a_2 so bestimmen, dass der absolute Betrag der Differenz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\,du - \int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi(u+vi)\,du$$

für jeden der Bedingung

$$-V \leqq v \leqq V$$

entsprechenden Werth von v kleiner als g ist.

Nun sei $x = \xi + \xi' i$ eine complexe Veränderliche und, wie im Vorangehenden, k eine positive Constante, $\omega = \int_0^{+\infty} \psi(u)\,du$. Dann ist also nach dem Vorstehenden das Integral

$$(5.)\qquad \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi+ku)\,\psi\Big(u-\frac{\xi' i}{k}\Big)\,du = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\Big(\frac{u-x}{k}\Big)\,du$$

eine für jeden endlichen Werth von x eindeutig definirte, endliche Grösse, die oben mit $F(x,k)$ bezeichnet worden ist.

Es muss nun nachgewiesen werden, dass $F(x,k)$ eine (transcendente) ganze Function von x ist.

Man setze für den absoluten Betrag von x eine obere Grenze r fest, so kann man, nach Annahme zweier beliebig kleinen positiven Grössen g', g'', zwei andere a_1, a_2 bestimmen, für welche der absolute Betrag der Summe

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{-\frac{a_1+\xi}{k}} f(\xi+ku)\,\psi\Big(u-\frac{\xi' i}{k}\Big)\,du + \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{a_2-\xi}{k}}^{+\infty} f(\xi+ku)\,\psi\Big(u-\frac{\xi' i}{k}\Big)\,du$$

für alle der Bedingung

$$\xi^2 + \xi'^2 \leqq r^2$$

entsprechenden Werthe von ξ, ξ' kleiner als g' ist. Dann hat man

$$(6.)\qquad F(x,k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \varepsilon' g',$$

wo ε' eine Grösse, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, bedeutet. Das Integral auf der Rechten dieser Gleichung lässt sich aber in eine beständig convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ entwickeln, und man kann, wenn die Summe der n ersten Glieder von $\frac{1}{2k\omega}\mathfrak{P}(x)$ mit $G^{(n)}(x)$ bezeichnet wird, n so gross annehmen, dass für jeden der Bedingung $|x| \leqq r$ entsprechenden Werth von x

$$|F(x,k) - G^{(n)}(x)| < g' + g''$$

ist.

Dies festgestellt, kann man ferner durch das zur Begründung des Satzes C. angewandte Verfahren zeigen, dass $F(x,k)$ sich darstellen lässt in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder ganze rationale Functionen von x sind, und dass diese Reihe für alle in irgend einem endlichen Bereiche enthaltenen Werthe von x gleichmässig convergirt. Man hat zu dem Ende zwei Reihen positiver Grössen

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,$$
$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \ldots$$

so anzunehmen, dass $\operatorname{Lim}_{n=\infty} r_n = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ einen endlichen Werth hat, sodann eine Reihe von ganzen rationalen Functionen $G_1(x), G_2(x), G_3(x), \ldots$ so zu bestimmen, dass für jeden der Bedingung $|x| \leqq r_\nu$ entsprechenden Werth von x

$$(7.)\qquad |F(x,k) - G_\nu(x)| < g_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \infty)$$

ist, und

$$(8.)\qquad f_0(x) = G_1(x),\quad f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x)$$

zu setzen; dann ist

$$(9.)\qquad F(x,k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x).$$

Nach einem Satze aber, den ich früher (Monatsberichte der Akademie aus dem Jahre 1880, S. 723*)) in elementarer Weise bewiesen habe, kann man die Reihe auf der Rechten dieser Gleichung, weil sie in jedem endlichen

*) [Vgl. Bd. II, S. 205 dieser Ausgabe.]

Bereiche gleichmässig convergirt, in eine für jeden endlichen Werth von x convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ verwandeln.

Nimmt man

$$\psi(x) = e^{-x^2},$$

so ist

$$\psi(u, v) = e^{-u^2+v^2},$$

und diese Function $\psi(u, v)$ hat die im Vorstehenden angenommene Beschaffenheit. Dasselbe ist der Fall, wenn man

$$\psi(x) = e^{-(c_1 x^2 + c_2 x^4 + \cdots + c_\varrho x^{2\varrho})}$$

setzt und der Constante c_ϱ einen positiven Werth giebt, während $c_1, \ldots c_{\varrho-1}$ beliebige reelle Werthe haben können.

Es existiren also in der That, wie bei Begründung des Satzes A. angegeben worden ist, unzählige Functionen $\psi(x)$ von der Beschaffenheit, dass die zugehörigen Functionen $F(x, k)$ transcendente ganze Functionen sind.

Jetzt bedeute $F(x, k)$ irgend eine bestimmte von diesen Functionen, so lässt sich die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$, durch welche dieselbe dargestellt werden kann, in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende, ebenfalls für jeden endlichen Werth von x convergirende Reihe verwandeln. Aus dem bekannten Satze des Herrn C. Neumann, betreffend die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen x nach den Kugelfunctionen erster Art, ergiebt sich nämlich unmittelbar, dass jede (transcendente oder rationale) ganze Function $G(x)$ dargestellt werden kann durch eine für jeden endlichen Werth von x convergirende Reihe von der Form

$$G(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \mathrm{P}^{(\nu)}(x).*)$$

*) Dies lässt sich übrigens auch folgendermaassen beweisen. Aus der Definition der Kugelfunctionen ergiebt sich:

$$|\mathrm{P}^{(n)}(x)| \leqq |x + \sqrt{x^2-1}|^n,$$

wenn man $\sqrt{x^2-1}$ so bestimmt, dass $|x+\sqrt{x^2-1}| \geqq 1$ ist. Ferner ist

$$x^n = c_{n,0}\mathrm{P}^{(n)}x + c_{n,1}\mathrm{P}^{(n-2)}(x) + \cdots,$$

und somit, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

Die Coefficienten dieser Reihe sind so beschaffen, dass

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |C_\nu| r^\nu$$

für jeden positiven Werth r einen endlichen Werth hat. Ferner ist die Reihe für alle einem endlichen Bereiche angehörigen Werthe von x gleichmässig convergent. (Vergl. die Abhandlung des Herrn Thomé: »Über die Reihen, welche nach Kugelfunctionen fortschreiten«, Borchardt's Journal, Bd. 66, S. 337.) Auf der letzteren Eigenschaft der Reihe beruht es, dass man

$$\int_{-1}^{+1} G(x')\,\mathrm{P}^{(\mu)}(x')\,dx' = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \int_{-1}^{+1} \mathrm{P}^{(\mu)}(x')\,\mathrm{P}^{(\nu)}(x')\,dx'$$

hat, wo x' eine reelle Veränderliche bezeichnet; woraus sich

$$C_\mu = \frac{2\mu+1}{2}\int_{-1}^{+1} G(x')\,\mathrm{P}^{(\mu)}(x')\,dx' \qquad (\mu = 0, 1, \ldots \infty)$$

ergiebt.

Für die Function $F(x,k)$ hat man also

$$C_\nu = \frac{2\nu+1}{2}\cdot\frac{1}{2k\omega}\int_{-1}^{+1}\mathrm{P}^{(\nu)}(x')\,dx'\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x'}{k}\right)du$$
$$= \frac{2\nu+1}{4\omega}\int_{-1}^{+1}\mathrm{P}^{(\nu)}(x')\,dx'\int_{-\infty}^{+\infty} f(x'+ku)\,\psi(u)\,du;$$

---

eine beständig convergirende Potenzreihe von x ist,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_n \sum_\nu A_n c_{n,\nu}\,\mathrm{P}^{(n-2\nu)}(x).$$

Es sind aber die $c_{n,\nu}$ sämmtlich positive Grössen und $\sum_\nu c_{n,\nu} = 1$; also ist

$$\sum_\nu |c_{n,\nu}\,\mathrm{P}^{(n-2\nu)}(x)| \leqq |x+\sqrt{x^2-1}|^n.$$

Daraus folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_\nu |A_n c_{n,\nu}\,\mathrm{P}^{(n-2\nu)}(x)|$ eine endliche Grösse ist, und daher, wenn (für $\mu = 0, 1, 2, \ldots \infty$)

$$C_\mu = \sum_{n,\nu} c_{n,\nu} A_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\mu+2\nu,\nu} A_{\mu+2\nu}$$
$$(n-2\nu = \mu)$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = C_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} C_\mu\,\mathrm{P}^{(\mu)}(x)$$

besteht.

woraus man, wenn

$$\frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x'+u)\,\mathrm{P}^{(\nu)}(x')\,dx' = f_\nu(u)$$

gesetzt wird,

$$C_\nu = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du$$

erhält.

Die Function $f_\nu(u)$ ist ebenso wie $f(u)$ eine durchweg stetige Function, deren absoluter Betrag höchstens gleich $(2\nu+1)G$ werden kann, da der absolute Betrag von $\mathrm{P}^{(\nu)}(x')$ für die dem Intervalle $(-1\cdots+1)$ angehörigen Werthe von x' nicht grösser als 1 wird. Es ist aber, wenn a eine beliebige positive Grösse ist,

$$C_\nu = \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega}\int_{a}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{-a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du$$

und

$$\left|\int_{a}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du\right| \leqq (2\nu+1)\,G\int_{a}^{+\infty} |\psi(u)|\,du,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{-a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du\right| \leqq (2\nu+1)\,G\int_{-\infty}^{-a} |\psi(u)|\,du;$$

wenn man daher k unendlich klein werden lässt, so bekommt man

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} C_\nu = f_\nu(0)\cdot\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a}\psi(u)\,du + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder auf der Rechten unendlich kleine Werthe erhalten, wenn a unendlich gross wird. Da man nun a beliebig gross annehmen darf, so ergiebt sich

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} C_\nu = f_\nu(0) = \frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{P}^{(\nu)}(x)\,dx.$$

Setzt man

$$C_\nu = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du = \varphi_\nu(k),$$

und versteht unter δ eine reelle Grösse, deren absoluter Betrag kleiner ist als k, so ist

$$\varphi_\nu(k+\delta)-\varphi_\nu(k) = \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a}\left(f_\nu(ku+\delta u)-f_\nu(ku)\right)\psi(u)\,du + \cdots,$$

wo wieder die fortgelassenen Glieder auf der Rechten beliebig kleine Werthe erhalten, wenn a gross genug angenommen wird. Ist daher δ_1 eine gegebene, beliebig kleine positive Grösse, so kann man dem a einen bestimmten Werth beilegen, für welchen

$$\varphi_\nu(k+\delta)-\varphi_\nu(k)-\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a}(f_\nu(ku+\delta u)-f_\nu(ku))\,\psi(u)\,du$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als δ_1 ist, und zwar bei beliebigen Werthen von k und δ. Dann lässt sich ferner, wenn δ_2 eine zweite, beliebig anzunehmende positive Grösse ist, für den absoluten Betrag von δ eine obere Grenze δ' so festsetzen, dass

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{a}(f_\nu(ku+\delta u)-f_\nu(ku))\,\psi(u)\,du$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als δ_2, und somit

$$|\,\varphi_\nu(k+\delta)-\varphi_\nu(k)\,|<\delta_1+\delta_2$$

ist, wenn $|\,\delta\,|<\delta'$. Es ist also $\varphi_\nu(k)$ eine stetige Function von k.

Hiermit ist also bewiesen:

»Ist $\psi(x)$ eine Function von der oben angegebenen Beschaffenheit, und

$$F(x,k)=\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

so hat man für jeden endlichen complexen Werth von x

$$F(x,k)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(k)\,\mathrm{P}^{(\nu)}(x), \tag{10.}$$

wenn

$$\left\{\begin{aligned} f_\nu(u) &= \frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x'+u)\,\mathrm{P}^{(\nu)}(x')\,dx' \\ \varphi_\nu(k) &= \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du \end{aligned}\right. \tag{11.}$$

gesetzt wird; und es sind dann die $\varphi_\nu(k)$ stetige Functionen von k.«

Jetzt werde unter x wieder eine reelle Veränderliche verstanden, so dass

$$f(x)=\operatorname*{Lim}_{k=0}F(x,k)$$

ist. Wird dann x auf das Intervall

$$-a\leqq x\leqq a$$

beschränkt, wo a eine beliebige positive Grösse bedeutet, so kann man, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g', zunächst dem Parameter k einen bestimmten Werth k' beilegen, für welchen

$$|f(x) - F(x, k')| < g'$$

ist. Bezeichnet man ferner mit R den grössten Werth, den der absolute Betrag der Grösse

$$x + \sqrt{x^2 - 1}$$

für die jetzt betrachteten Werthe von x erhalten kann, so hat man

$$R = \begin{cases} 1, & \text{wenn } a \leqq 1, \\ a + \sqrt{a^2 - 1}, & \text{wenn } a > 1, \end{cases}$$

und es folgt daher aus dem oben Bemerkten

$$|P^{(\nu)}(x)| \leqq R^\nu.$$

Da nun die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\varphi_\nu(k')| R^\nu$$

einen endlichen Werth hat, so ist es nach Annahme einer zweiten positiven Grösse g'' immer möglich, eine ganze positive Zahl n zu ermitteln, für welche der absolute Betrag von

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \varphi_\nu(k') \mathrm{P}^{(\nu)}(x)$$

kleiner als g'' ist. Setzt man also

$$G^{(n)}(x, k) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(k) \mathrm{P}^{(\nu)}(x), \tag{12.}$$

so ist

$$|f(x) - G^{(n)}(x, k')| < g' + g''.$$

Hiernach lässt sich der obige Satz B. folgendermaassen aussprechen:

»Es seien a, g positive Grössen, von denen die erste beliebig gross und die andere beliebig klein angenommen werden kann, so ist es immer möglich, in dem durch die Gleichung (12.) definirten Ausdruck $G^{(n)}(x, k)$, der eine ganze rationale Function n^{ten} Grades von x ist, dem Parameter k und der Zahl n solche Werthe zu geben, dass für die dem Intervall $(-a \ldots a)$

angehörigen Werthe von x die Differenz zwischen

$$f(x) \text{ und } G^{(n)}(x,k)$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner als g ist.«

Der im Vorstehenden entwickelte Ausdruck der Function $F(x,k)$ hat vor der Darstellung derselben in Gestalt einer Potenzreihe den wesentlichen Vorzug, dass die Coefficienten des ersteren — die $\varphi_\nu(k)$ — in einer Form sich darstellen, welche erkennen lässt, dass dieselben stetige Functionen der Grösse k sind, und dass es für jeden einzelnen Coefficienten eine Grenze giebt, welche sein absoluter Betrag für keinen Werth von k überschreitet, während zugleich, für jeden bestimmten Werth von k, $\operatorname{Lim}_{\nu=\infty} \varphi_\nu(k) = 0$ ist.

Damit ist der Übelstand beseitigt, welcher sich, wie vorhin hervorgehoben worden ist, herausstellt, wenn man die im Satze B. vorkommende Function $G(x)$ so definirt, wie es bei der Ableitung dieses Satzes zuerst geschehen ist.

Es ist bisher in Betreff der Function $f(x)$ angenommen worden, dass der absolute Betrag derselben eine endliche obere Grenze habe. Diese Annahme kann man fallen lassen, wenn es sich bloss darum handelt, eine ganze rationale Function $G(x)$ zu bestimmen, welche sich in einem gegebenen endlichen Intervall $(x_1 \ldots x_2)$ der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass der absolute Betrag der Differenz $f(x)-G(x)$ für jeden Werth von x unter einer beliebig festgesetzten Grenze g liegt.

In der That, definirt man eine Function $f_1(x)$, indem man festsetzt, es sei

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x_1) && \text{für } x < x_1, \\ f_1(x) &= f(x) && \text{für } x_1 \leqq x \leqq x_2, \\ f_1(x) &= f(x_2) && \text{für } x > x_2, \end{aligned}$$

so ist $f_1(x)$ so beschaffen, wie bisher von der Function $f(x)$ angenommen worden ist, und man kann demnach eine Function $G(x)$ so bestimmen, dass für jeden in dem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$ enthaltenen Werth von x

$$|f_1(x) - G(x)| < g,$$

und somit auch

$$|f(x) - G(x)| < g$$

ist.

Nun ist bei dem Beweise des Satzes C. von der Function $f(x)$ nur vorausgesetzt worden, dass es nach beliebiger Annahme zweier positiven Grössen a_ν, g_ν möglich sei, eine ganze rationale Function $G_\nu(x)$ herzustellen, für welche

$$|f(x)-G_\nu(x)| < g_\nu \text{ ist, wenn } -a_\nu \leqq x \leqq a_\nu;$$

und es gilt also der in Rede stehende Satz in unveränderter Fassung, wenn von der Function $f(x)$ nur angenommen wird, dass sie für jeden endlichen reellen Werth von x einen bestimmten endlichen und mit x stetig sich ändernden Werth habe.

Es bliebe jetzt noch zu untersuchen, welche Modificationen die bisher entwickelten Sätze erleiden, wenn man auch die Annahme, dass $f(x)$ eine durchweg stetige Function sei, fallen lässt. Damit werde ich mich hier jedoch nicht beschäftigen.

Ich will jetzt annehmen, es sei $f(x)$ eine periodische Function, d. h. sie ändere ihren Werth nicht, wenn ihr Argument um eine bestimmte positive Grösse $2c$ vermehrt wird. Dann lässt sich die zugehörige Function $F(x,k)$ auch darstellen in der Form einer für jeden complexen Werth von x convergirenden Fourier'schen Reihe, deren Coefficienten stetige Functionen der Grösse k sind.

Aus der obigen Gleichung (5.) ergiebt sich

$$F(x+2c,k) = F(x,k);$$

setzt man also, unter z eine neue complexe Veränderliche verstehend,

$$\overline{F}(z) = F\left(\frac{c}{\pi i}\log z, k\right),$$

so ist $\overline{F}(z)$ eine eindeutige analytische Function von z, für welche im ganzen Gebiete dieser Grösse nur zwei singuläre Stellen, nämlich 0 und ∞ existiren, und die daher in eine beständig convergirende Reihe von der Form

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu z^\nu$$

entwickelt werden kann. Setzt man $z = e^{\frac{\pi x}{c}i}$, so wird $\overline{F}(z) = F(x, k)$, und es ist demnach

$$F(x, k) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu e^{\frac{\nu\pi x}{c}i}$$

für jeden endlichen Werth von x.

Da diese Entwickelung von $F(x, k)$ in jedem endlichen Bereiche der Veränderlichen x gleichmässig convergirt, so ist, wenn man mit x' wieder eine reelle Veränderliche und mit n eine ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} F(x', k) e^{-\frac{nx'\pi}{c}i} dx' = \frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu \int_{-c}^{c} e^{\frac{(\nu-n)\pi x'}{c}i} dx' = C_n.$$

Man hat also

$$\begin{aligned} 2cC_n &= \frac{1}{2k\omega}\int_{-c}^{c} e^{-\frac{n\pi x'}{c}i} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x'}{k}\right) du \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_{-c}^{c} e^{-\frac{n\pi x'}{c}i} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'+ku)\,\psi(u)\, du \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u)\, e^{\frac{nku\pi}{c}i} du \int_{-c}^{c} f(x'+ku)\, e^{-\frac{n\pi}{c}(x'+ku)i} dx'. \end{aligned}$$

Nun hat man aber, wenn man

$$f_1(x') = f(x') e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}$$

setzt und unter x_0 eine von x' unabhängige Grösse versteht,

$$\begin{aligned} \int_{-c}^{c} f_1(x')dx' &= \int_{-c}^{x_0-c} f_1(x')dx' + \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')dx' = \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')dx' + \int_{-c}^{x_0-c} f_1(x'+2c)dx' \\ &= \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')dx' + \int_{c}^{x_0+c} f_1(x')dx' = \int_{x_0-c}^{x_0+c} f_1(x')dx' = \int_{-c}^{c} f_1(x'+x_0)dx'; \end{aligned}$$

es ist also

$$\int_{-c}^{c} f(x'+ku)\, e^{-\frac{n\pi}{c}(x'+ku)i} dx' = \int_{-c}^{c} f(x')\, e^{-\frac{n\pi x'}{c}i} dx',$$

und somit, wenn man, unter v eine beliebige reelle Grösse verstehend,

$$(13.)\qquad \varphi(v) = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u)\, e^{uvi} du = \frac{1}{\omega}\int_{0}^{\infty} \psi(u)\cos(vu)\, du$$

setzt,

$$(14.)\qquad C_n = \varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)\int_{-c}^{c}\frac{1}{2c}f(x')\,e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}\,dx'.$$

Setzt man

$$(15.)\quad A_n = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\cos\left(\frac{n\pi}{c}x'\right)dx',\quad A'_n = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\sin\left(\frac{n\pi}{c}x'\right)dx',$$

so ist

$$(16.)\qquad C_n = (A_n - iA'_n)\,\varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)$$

und somit

$$(17.)\qquad F(x,k) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)\cdot\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right) + A'_n\sin\left(\frac{n\pi}{c}x\right)\right).$$

Nach der Formel (13.) ist $\varphi(v)$ eine stetige Function von v, die für $v = 0$ den Werth 1 annimmt.

Setzt man in dem Ausdrucke auf der Rechten der vorstehenden Gleichung $k = 0$, so reducirt er sich auf

$$A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right) + A'_n\sin\left(\frac{n\pi}{c}x\right)\right),$$

d. h. er geht in die Reihe über, in welche sich die Function $f(x)$ im Allgemeinen — d. h. wenn man von speciellen, bisher noch nicht hinreichend charakterisirten Functionen absieht — nach dem Fourier'schen Theorem entwickeln lässt. Da aber, wie zuerst Herr P. du Bois-Reymond an einem Beispiele nachgewiesen hat, in der That Functionen $f(x)$ existiren, welche für gewisse Werthe von x, die sogar in jedem noch so kleinen Intervall $(x_1 \ldots x_2)$ in unendlicher Anzahl vorhanden sein können, durch die vorstehende Reihe nicht dargestellt werden, so ist damit dargethan, dass man, um die Grenze zu bestimmen, der sich die Reihe auf der Rechten der Gleichung (17.) nähert, wenn k unendlich klein wird, nicht unbedingt in jedem einzelnen Gliede der Reihe $k = 0$ setzen darf.

Die Reihe $\sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n z^n$ convergirt, wie gezeigt worden ist, für jeden Werth von z, mit Ausnahme der beiden Werthe $0, \infty$. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$$

convergirt also für jeden endlichen Werth von z.

Nimmt man nun z. B.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{2}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{c} x\right),$$

so ist

$$A_n = \frac{1}{n^2}, \quad A'_n = 0$$

und daher

$$C_n = \frac{1}{n^2} \varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right);$$

daraus folgt, dass auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right) z^n$$

für jeden endlichen Werth von z convergirt.

Setzt man also

$$\chi(x; v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \varphi(nv) e^{nxi}, \tag{18.}$$

so ist $\chi(x; v)$ eine für jeden endlichen complexen Werth von x und für jeden von Null verschiedenen reellen Werth von v definirte eindeutige analytische Function, für welche sich auch, da $\varphi(-v) = \varphi(v)$ ist, der Ausdruck

$$\chi(x; v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \varphi(nv) \cos nx = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(nv) \cos nx \tag{19.}$$

ergiebt; und es lässt sich dann die Function $F(x, k)$ folgendermaassen ausdrücken:

$$F(x, k) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \chi\left(\frac{x - x'}{c} \pi; \frac{k\pi}{c}\right) dx'. \tag{20.}$$

Jetzt seien wieder g', g'' gegebene positive Grössen von beliebiger Kleinheit, und k' ein bestimmter Werth von k, der so anzunehmen ist, dass

$$|f(x) - F(x, k')|$$

für jeden reellen Werth von x kleiner als g' ist. Bestimmt man dann eine ganze positive Zahl n so, dass der absolute Betrag von

$$2\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \varphi\left(\frac{\nu k'\pi}{c}\right)\left(A_\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{c} x\right) + A'_\nu \sin\left(\frac{\nu\pi}{c} x\right)\right)$$

für jeden reellen Werth von x kleiner als g'' ist, und setzt

$$(21.)\qquad f(x) = A_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n} \varphi\left(\frac{\nu k'\pi}{c}\right)\left(A_\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{c}x\right) + A'_\nu \sin\left(\frac{\nu\pi}{c}x\right)\right) + R_n,$$

so ist der absolute Betrag von R_n stets kleiner als $g'+g''$.

So ergiebt sich der Satz

D. »Ist $f(x)$ eine für jeden reellen Werth von x eindeutig definirte, durchweg stetige und reell-periodische Function, so lässt sich, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g, auf mannigfaltige Weise eine endliche Fourier'sche Reihe herstellen, welche sich der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass der Unterschied zwischen beiden Functionen für keinen Werth von x mehr als g beträgt.«

Aus diesem Satze lässt sich dann durch das beim Beweise des Satzes C. angewandte Verfahren, wenn man unter den dortigen Functionen $G_1(x)$, $G_2(x)$ $G_3(x)$, ... jetzt endliche Fourier'sche Reihen versteht, welche dieselbe primitive Periode wie $f(x)$ haben, der folgende ableiten:

E. »Jede Function $f(x)$ von der unter D. angegebenen Beschaffenheit lässt sich, wenn $2c$ die primitive Periode derselben ist, darstellen in der Form einer Summe, deren Glieder sämmtlich endliche Fourier'sche Reihen mit der Periode $2c$ sind. Diese Reihe convergirt unbedingt und gleichmässig für alle Werthe von x.«

Um das Vorstehende durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, nehme ich

$$\psi(x) = e^{-x^2}.$$

Dann ist $2\omega = \sqrt{\pi}$ und

$$\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+uvi}du = \frac{e^{-\frac{v^2}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(u-\frac{vi}{2}\right)^2}du = e^{-\frac{v^2}{4}}.$$

Daraus ergiebt sich

$$(22.)\qquad \chi(x;v) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos\nu x,$$

also, wenn man

$$(23.)\qquad q = e^{-\frac{v^2}{4}}$$

setzt,

$$(24.)\qquad \chi(x;v) = \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, q\right),$$

wo $\vartheta_3(x, q)$ die Jacobi'sche Function

$$1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \cdots$$

ist.

Hiernach hat man für $q = e^{-\frac{k^2\pi^2}{4c^2}}$

$$F(x, k) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\,\vartheta_3\!\left(\frac{x - x'}{2c}\pi, q\right)dx'. \tag{25.}$$

Die Formel auf der rechten Seite dieser Gleichung kommt schon bei Fourier vor (Théorie analytique de la chaleur, Chapitre X). Um den Temperaturzustand eines unendlich dünnen homogenen Ringes von der Länge $2c$, der keine Wärme ausstrahlt, für einen beliebigen Zeitpunkt anzugeben, wenn derselbe in irgend einem Momente bekannt ist, hat man eine Function φ von zwei reellen Veränderlichen x, t so zu bestimmen, dass dieselbe der Differentialgleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

genügt, wo μ eine positive Constante bedeutet, als Function von x betrachtet die Periode $2c$ besitzt und für $t = 0$ in dem Intervalle

$$-c \leqq x \leqq c$$

einer gegebenen willkürlichen Function $F(x)$ gleich ist, wobei nur angenommen wird, dass $F(x)$ stetig und $F(-c) = F(c)$ sei.

Fourier findet für die so definirte Function φ den Ausdruck

$$\left\{\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_{-c}^{c} F(x')\,e^{-\frac{\nu^2\mu\pi^2}{c^2}t}\cos\left(\nu\frac{x - x'}{c}\pi\right)dx' \\ &= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} F(x')\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{-\frac{\nu^2\mu\pi^2}{c^2}t}\cos\left(\nu\frac{x - x'}{c}\pi\right)dx',\end{aligned}\right. \tag{26.}$$

also

$$\varphi = F(x, k), \tag{27.}$$

wenn man die Function $f(x)$ so bestimmt, dass sie in dem Intervalle $(-c \leqq x \leqq c)$ mit $F(x)$ übereinstimmt, und

$$k = 2\sqrt{\mu t} \tag{28.}$$

nimmt. Fourier setzt, um zu beweisen, dass φ für $t = 0$ in dem Intervalle

$(-c \leqq x \leqq c)$ gleich $F(x)$ sei, in den einzelnen Gliedern seines Ausdrucks $t = 0$, wodurch derselbe in die Reihe

$$\frac{1}{2c} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \int_{-c}^{c} F(x') \cos\left(\nu \frac{x-x'}{c} \pi\right) dx'$$

übergeht, von der er annahm, dass sie stets in dem angegebenen Intervall die Function $F(x)$ darstelle. Es verdient aber bemerkt zu werden, dass ungeachtet der Einwendungen, die gegen Fourier's Verfahren gemacht werden können, der aufgestellte Ausdruck der Function φ ausnahmslos richtig ist. Denn da derselbe, wie gezeigt worden ist, sich in $F(x, 2\sqrt{\mu t})$ umformen lässt, so ergiebt sich zunächst, ohne dass das Fourier'sche Theorem zu Hülfe genommen wird, dass

$$\operatorname*{Lim}_{t=0} \varphi = F(x)$$

ist. Ferner genügen die einzelnen Glieder der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

woraus folgt, dass auch φ selbst ihr genügt, da die in Rede stehende Reihe eine eindeutige analytische Function von x und t ist, wenn man die Grösse t der Bedingung unterwirft, dass ihr reeller Bestandtheil positiv sein soll, und weil überdies die Reihe in jedem endlichen Bereiche der Grössen x, t gleichmässig convergirt. Endlich ändert die Reihe ihren Werth nicht, wenn $x + 2c$ für x gesetzt wird; es entspricht also die durch sie ausgedrückte Function vollständig den gestellten Bedingungen.

Es ist äusserst merkwürdig, dass bei einem Problem der mathematischen Physik für eine gesuchte, von zwei veränderlichen Grössen, die nach ihrer physikalischen Bedeutung nur reelle Werthe haben können, abhängige Function, welche für einen bestimmten Werth eines ihrer Argumente einer gegebenen willkürlichen Function des anderen gleich sein soll, ein Ausdruck sich ergiebt, der eine analytische Function der Veränderlichen ist und somit auch für complexe Werthe der letzteren eine Bedeutung hat.

Es bedeute jetzt n eine ganze positive Zahl, und es werde gesetzt

$$\chi(x; v)_n = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x,$$

so ist nach Gleichung (22.)

$$\chi(x; v) = \chi(x; v)_n + 2\sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x.$$

Für reelle Werthe von x ist aber der absolute Betrag des zweiten Gliedes auf der Rechten dieser Gleichung, der mit R_n bezeichnet werde, niemals grösser als

$$2\sum_{\nu=n+1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2+2n\nu+\nu^2}{4}v^2},$$

also

$$R_n < e^{-\frac{n^2+2n}{4}v^2} \cdot 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}}.$$

Setzt man nun in der bekannten Gleichung

$$1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu^2 \tau\pi} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2\pi}{\tau}}\right),$$

wo unter τ eine positive Grösse zu verstehen ist, $\tau = \frac{v^2}{4\pi}$, so ergiebt sich, wenn v positiv ist,

$$2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{v} - 1 + \frac{4\sqrt{\pi}}{v}\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{4\nu^2\pi^2}{v^2}};$$

es ist also

$$R_n < \frac{2\sqrt{\pi}}{v} e^{-\frac{(n+1)^2}{4}v^2} \cdot \left\{1 - \frac{v}{2\sqrt{\pi}} + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{4\nu^2\pi^2}{v^2}}\right\} e^{\frac{v^2}{4}}.$$

Setzt man nun, unter m eine positive Grösse verstehend,

$$v = \frac{2\sqrt{m \log (n+1)}}{n+1}, \tag{29.}$$

so ist

$$R_n < \frac{\sqrt{\pi}\,(n+1)^{-m+1}}{\sqrt{m \log (n+1)}} \cdot (1 + [n]),$$

wo $[n]$ eine Grösse bedeutet, die für einen unendlich grossen Werth von n unendlich klein wird. Nimmt man also

$$m \geqq 1,$$

so wird

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0.$$

Es ist aber dann

$$e^{-\frac{v^2}{4}} = e^{-\frac{m\log(n+1)}{(n+1)^2}} = (n+1)^{-\frac{m}{(n+1)^2}},$$

also, wenn man

$$(30.)\qquad (n+1)^{-\frac{m}{(n+1)^2}} = \{n\}$$

und

$$(31.)\qquad \chi(x,n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \{n\}^{\nu\nu}\cos\nu x = 1+2\sum_{\nu=1}^{n}\{n\}^{\nu\nu}\cos\nu x$$

setzt,

$$\chi(x;v)_n = \chi(x,n).$$

Aus der Gleichung

$$F(x,k) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi;\frac{k\pi}{c}\right)dx'$$

ergiebt sich dann

$$F\left(x,\frac{cv}{\pi}\right) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi;v\right)dx' = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi,n\right)dx' + R'_n,$$

wo auch R'_n eine Grösse bedeutet, die für einen unendlich grossen Werth von n unendlich klein wird. Da nun $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} v = 0$ und $\operatorname*{Lim}_{v=0} F\left(x,\frac{cv}{\pi}\right) = f(x)$ ist, so ergiebt sich

$$(32.)\qquad f(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi,n\right)dx'.$$

Das Fourier'sche Theorem, präcise ausgedrückt, besagt, dass

$$(33.)\qquad f(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(x')\bar{\chi}\left(\frac{x-x'}{c}\pi,n\right)dx'$$

sei, wenn

$$(34.)\qquad \bar{\chi}(x,n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n}\cos\nu x$$

gesetzt wird. An die Stelle dieser Gleichung, die nicht unter allen Umständen richtig ist, tritt also die vorhergehende, ausnahmslos geltende, in der die Function $\bar{\chi}(x,n)$ ersetzt ist durch eine andere, $\chi(x,n)$, welche gleich $\bar{\chi}(x,n)$ die Form

$$1+2(n,1)\cos x+2(n,2)\cos 2x+\cdots+2(n,n)\cos nx$$

hat, wo (n,ν) eine von n und ν abhängende positive Grösse bedeutet, die in

$\bar{\chi}(x)$ sich auf die Einheit reducirt. Für jede bestimmte Zahl ν ist

$$\lim_{n=\infty}(n,\nu) = 1;$$

man kann also n so gross nehmen, dass die $(\nu+1)$ ersten Glieder von $\chi(x,n)$ mit den entsprechenden Gliedern von $\bar{\chi}(x,n)$ so nahe übereinstimmen, wie man will.

Functionen $\chi(x,n)$ von derselben Form und Beschaffenheit, wie die hier betrachtete, für welche die Gleichung (32.) ebenfalls unbedingte Gültigkeit hat, lassen sich auch aus der obigen Function $\chi(x;v)$, die aus einer beliebigen Function $\psi(u)$ entspringt, ableiten. Man kann immer eine von n abhängende positive Grösse v_n, welche bei unbegrenzt wachsendem n unendlich klein wird, so bestimmen, dass die Differenz

$$\chi(x;v_n)-\sum_{\nu=-n}^{\nu=+n}\varphi(\nu v_n)\cos\nu x$$

gegen Null convergirt, wenn n ohne Ende wächst, und dann ist

$$\chi(x,n)=\sum_{\nu=-n}^{\nu=+n}\varphi(\nu v_n)\cos\nu x = 1+2\sum_{\nu=1}^{n}\varphi(\nu v_n)\cos\nu x \tag{35.}$$

eine Function von der angegebenen Beschaffenheit.

Selbstverständlich soll damit nicht gesagt sein, dass man auf diese Weise alle Functionen der in Rede stehenden Art erhalte.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass die Gleichung (32.) für die zwischen $-c$ und c liegenden Werthe von x, wie leicht zu beweisen ist, auch dann noch besteht, wenn unter $f(x)$ eine Function verstanden wird, welche in dem Intervalle von $x=-c$ bis $x=c$ eindeutig definirt und stetig ist, ohne dass $f(c)=f(-c)$ zu sein braucht. Für $x=\pm c$ ist dann auf der Linken der Gleichung

$$\frac{1}{2}(f(-c)+f(c))$$

statt $f(\pm c)$ zu setzen.

2.

Die vorstehenden Sätze lassen sich nun zum Theil auch auf Functionen von mehreren reellen Veränderlichen ausdehnen.

Im Gebiete von n unbeschränkt veränderlichen reellen Grössen $x_1, \ldots x_n$ sei irgend ein n-fach ausgedehntes, unabgeschlossenes Continuum S gegeben.

Ferner sei $f(x_1, \dots x_n)$ eine beliebige, in dem Bereiche S überall eindeutig definirte, reelle und stetige Function, von der überdies angenommen wird, dass ihr absoluter Betrag eine endliche obere Grenze G habe. Endlich bedeute $\psi(x)$ eine für jeden reellen Werth der Veränderlichen x eindeutig definirte, reelle und continuirliche Function, welche der Gleichung $\psi(-x) = \psi(x)$ genügt, für jeden von Null verschiedenen Werth von x positiv ist und ausserdem der Bedingung entspricht, dass das Integral

$$\int_0^{+\infty} \psi(x)\,dx$$

einen endlichen Werth hat, der mit ω bezeichnet werde.

Setzt man dann, unter $(x'_1, \dots x'_n)$ eine unbestimmte, dem Bereiche S angehörige Stelle und unter k eine von $x_1, \dots x_n$ und $x'_1, \dots x'_n$ unabhängige positive Veränderliche verstehend,

$$(1.)\quad F(x_1, \dots x_n; k) = \frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S)} \cdots \int f(x'_1, \dots x'_n)\, \psi\left(\frac{x'_1 - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x'_n - x_n}{k}\right) dx'_1 \dots dx'_n,$$

wo die Integration über den ganzen Bereich S zu erstrecken ist, so gelten die folgenden Sätze:

A. Für jedes dem Bereiche S angehörende Werthsystem $(x_1, \dots x_n)$ ist

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} F(x_1, \dots x_n; k) = f(x_1, \dots x_n).$$

B. Dagegen ist

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} F(x_1, \dots x_n; k) = 0,$$

wenn die Stelle $(x_1, \dots x_n)$ weder dem Bereiche S noch dessen Begrenzung angehört.

Das Integral auf der Rechten der Gleichung (1.) hat unter den gemachten Voraussetzungen stets einen bestimmten endlichen Werth. Dies ist unmittelbar klar, wenn der Bereich S ganz im Endlichen liegt. Wenn das Letztere aber nicht der Fall ist, so sei S' irgend ein ganz im Endlichen liegender Theil von S; dann ist, da die Grössen

$$\psi\left(\frac{x'_1 - x_1}{k}\right), \quad \dots \quad \psi\left(\frac{x'_n - x_n}{k}\right)$$

ihr Zeichen nicht ändern, das Integral

$$F' = \frac{1}{2^n k^n \omega^n} \underset{(S')}{\int \cdots \int} f(x_1', \ldots x_n') \, \psi\left(\frac{x_1'-x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n'-x_n}{k}\right) dx_1' \ldots dx_n'$$

seinem absoluten Betrage nach nicht grösser als das Product aus G und dem Integral

$$\frac{1}{2^n k^n \omega^n} \underset{(S')}{\int \cdots \int} \psi\left(\frac{x_1'-x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n'-x_n}{k}\right) dx_1' \ldots dx_n';$$

dieses aber ist kleiner als

$$\frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{x_1'-x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n'-x_n}{k}\right) dx_1' \ldots dx_n'$$

$$= \frac{1}{2^n \omega^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u_1) \ldots \psi(u_n) \, du_1 \ldots du_n = 1.$$

Es ist also

$$|F'| < G,$$

wie man auch den Bereich S' annehmen möge. Dies genügt zu dem Beweise, dass auch in dem Falle, wo der Bereich S von unendlicher Ausdehnung ist, der Ausdruck $F(x_1, \ldots x_n; k)$ für jedes System endlicher Werthe der Grössen $x_1, \ldots x_n$ und jeden positiven Werth von k einen bestimmten endlichen Werth hat.

Man denke sich nun in S eine Stelle $(x_1, \ldots x_n)$ fixirt und verstehe unter δ eine positive Grösse, die so klein anzunehmen ist, dass alle durch die folgenden Formeln:

$$x_1' = x_1 + u_1 \delta, \quad \ldots \quad x_n' = x_n + u_n \delta \qquad (-1 \leqq u_1 \leqq 1, \ldots -1 \leqq u_n < 1)$$

definirten Stellen $(x_1', \ldots x_n')$ in S liegen. Die Gesammtheit dieser Stellen werde mit S_1 bezeichnet und die Gesammtheit aller übrigen Stellen von S mit S_2. Dann hat man, wenn

$$F_1 = \frac{1}{2^n k^n \omega^n} \underset{(S_1)}{\int \cdots \int} f(x_1', \ldots x_n') \, \psi\left(\frac{x_1'-x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n'-x_n}{k}\right) dx_1' \ldots dx_n',$$

$$F_2 = \frac{1}{2^n k^n \omega^n} \underset{(S_2)}{\int \cdots \int} f(x_1', \ldots x_n') \, \psi\left(\frac{x_1'-x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n'-x_n}{k}\right) dx_1' \ldots dx_n'$$

gesetzt wird,

$$F(x_1, \dots x_n; k) = F_1 + F_2.$$

Nun ist F_2 dem absoluten Betrage nach nicht grösser als das Product aus G und

$$\frac{1}{2^n k^n \omega^n} \int \cdots \int_{(S_2)} \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \dots dx_n',$$

also

$$\begin{aligned}
F_2 &= \frac{\varepsilon G}{2^n k^n \omega^n} \int \cdots \int_{(S_2)} \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \dots dx_n' \\
&= \frac{\varepsilon G}{2^n k^n \omega^n} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \dots dx_n' \right. \\
&\qquad \left. - \int_{x_1 - \delta}^{x_1 + \delta} \cdots \int_{x_n - \delta}^{x_n + \delta} \psi\left(\frac{x_1' - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x_n' - x_n}{k}\right) dx_1' \dots dx_n' \right\} \\
&= \varepsilon G \left\{ 1 - \frac{1}{2^n \omega^n} \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_1)\, du_1 \dots \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_n)\, du_n \right\},
\end{aligned}$$

wo ε eine Grösse bedeutet, die dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist. Ferner hat man

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{2^n \omega^n} \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} \cdots \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} f(x_1 + k u_1, \dots x_n + k u_n)\, \psi(u_1) \dots \psi(u_n)\, du_1 \dots du_n \\
&= \frac{1}{2^n \omega^n} f(x_1 + \varepsilon_1 \delta, \dots x_n + \varepsilon_n \delta) \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_1)\, du_1 \dots \int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_n)\, du_n \\
&= f(x_1 + \varepsilon_1 \delta, \dots x_n + \varepsilon_n \delta) \cdot \frac{1}{\omega} \int_0^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_1)\, du_1 \cdots \frac{1}{\omega} \int_0^{\frac{\delta}{k}} \psi(u_n)\, du_n,
\end{aligned}$$

wo $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ Grössen bedeuten, von denen jede zwischen -1 und $+1$ liegt.

Setzt man nun

$$\frac{1}{\omega} \int_u^{+\infty} \psi(u)\, du = \chi(u),$$

so hat man nach dem Vorstehenden

$$F_2 = \varepsilon G\left\{1-\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n\right\},$$

$$F_1 = f(x_1+\varepsilon_1\delta, \dots x_n+\varepsilon_n\delta).\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n$$

$$= f(x_1, \dots x_n).\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n + (f(x_1+\varepsilon_1\delta, \dots x_n+\varepsilon_n\delta)-f(x_1, \dots x_n))\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n$$

$$= f(x_1, \dots x_n) + \left[\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n - 1\right] f(x_1, \dots x_n)$$

$$+ (f(x_1+\varepsilon_1\delta, \dots x_n+\varepsilon_n\delta)-f(x_1, \dots x_n)).\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n.$$

Jetzt nehme man für δ eine stetige Function von k an, die gleichzeitig mit k unendlich klein wird, jedoch so, dass dies auch noch für $\frac{k}{\delta}$ gilt, z. B. man setze $\delta = \sqrt{k}$, so ist

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} F_2 = 0, \quad \operatorname*{Lim}_{k=0} F_1 = f(x_1, \dots x_n).$$

Denn es ist $\frac{d\chi(u)}{du} = -\frac{1}{\omega}\psi(u)$, es nimmt also $\chi(u)$ beständig ab, wenn u zunimmt, und es ist

$$\operatorname*{Lim}_{u=+\infty} \chi(u) = 0.$$

Ferner wird

$$f(x_1+\varepsilon_1\delta, \dots x_n+\varepsilon_n\delta)-f(x_1, \dots x_n)$$

gleichzeitig mit δ unendlich klein. So ergiebt sich

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} F(x_1, \dots x_n; k) = f(x_1, \dots x_n)$$

für jedes dem Bereiche S angehörende Werthsystem $(x_1, \dots x_n)$.

Damit ist der oben ausgesprochene Satz A. erwiesen; und zwar ergiebt sich zugleich, dass die Function $F(x_1, \dots x_n; k)$ sich für alle Werthsysteme $x_1, \dots x_n$, welche einem ganz im Endlichen liegenden, abgeschlossenen Theile des Bereiches S angehören, gleichmässig der Function $f(x_1, \dots x_n)$ nähert, wenn k gegen Null convergirt.

Um nun die Behauptung B. zu erhärten, nehme man die Stelle $(x_1, \dots x_n)$ ausserhalb des Integrationsgebietes S an und wähle um $(x_1, \dots x_n)$ einen Bereich S_1 der Art, dass die in ihm liegenden Stellen $(x_1', \dots x_n')$ durch die Ungleichungen

$$x_\lambda - \delta \leqq x_\lambda' \leqq x_\lambda + \delta \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

definirt werden, und zwar so, dass alle diese Stellen noch ausserhalb des Gebietes S liegen, was sich durch passende Wahl von δ immer erreichen lässt.

Es ist

$$F(x_1, \dots x_n; k) = \frac{\varepsilon G}{2^n k^n \omega^n} \int\limits_{(S)} \cdots \int \psi\left(\frac{x'_1 - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x'_n - x_n}{k}\right) dx'_1 \dots dx'_n.$$

Bezeichnet nun S_3 den nach Ausschluss von S_1 von dem ganzen Gebiete Σ der Veränderlichen $(x'_1, \dots x'_n)$ übrig bleibenden Theil, so ist S ein Theil von S_3, also ist, wenn ε' eine Grösse bezeichnet, die absolut genommen kleiner ist als 1 und als ε,

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots x_n; k) &= \frac{\varepsilon' G}{2^n k^n \omega^n} \int\limits_{(S_3)} \cdots \int \psi\left(\frac{x'_1 - x_1}{k}\right) \cdots \psi\left(\frac{x'_n - x_n}{k}\right) dx'_1 \dots dx'_n \\ &= \varepsilon' G \left\{1 - \left(1 - \chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n\right\}. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man $\delta = \sqrt{k}$ nimmt,

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} F(x_1, \dots x_n; k) = 0,$$

wenn $(x_1, \dots x_n)$ ausserhalb des Gebietes S angenommen wird; zugleich erkennt man, dass die Annäherung an den Werth Null eine gleichmässige ist.

Für Punkte $(x_1, \dots x_n)$, welche auf der Grenze des Integrationsgebietes S liegen, lässt sich die Bestimmung des Grenzwerthes von $F(x_1, \dots x_n; k)$ für $k = 0$ nicht in voller Allgemeinheit durchführen.

Nimmt man nun innerhalb des Bereiches S, der sich auch in's Unendliche erstrecken kann, ein ganz im Endlichen liegendes, abgeschlossenes Continuum S' an, so lässt sich zeigen, dass es, wenn man $(x_1, \dots x_n)$ auf S' beschränkt, stets möglich ist, nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse δ eine ganze rationale Function $G(x_1, \dots x_n)$ herzustellen, welche innerhalb S' von der Function $f(x_1, \dots x_n)$ um weniger als δ abweicht, dass also

$$|f(x_1, \dots x_n) - G(x_1, \dots x_n)| < \delta$$

ist für alle in S' gelegenen Stellen $(x_1, \dots x_n)$.

Zunächst werde S in zwei Theile, S_1 und S_2, zerlegt, von denen der erstere die Gesammtheit aller Stellen $(x_1, \dots x_n)$ von S enthält, welche z. B. vom Coordinatenanfangspunkt (d. h. der Stelle $x_1 = 0, \dots x_n = 0$) um weniger als R entfernt sind, während S_2 den übrigen Theil von S enthalten möge. Offenbar kann durch passende Wahl von R immer erreicht werden, dass S_1 den Bereich S' ganz in sich enthält. Dieser Theilung entsprechend zerlegt sich dann $F(k)$ in zwei Theile $F_1(k)$ und $F_2(k)$, von denen der letztere gleichmässig gegen Null convergirt, wenn k sich dieser Grenze nähert, weil alle Punkte von S_2 ausserhalb S' liegen. Dagegen convergirt für alle Punkte in S_1, also auch in S', $F_1(k)$ gleichmässig gegen $f(x_1, \dots x_n)$; d. h. nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse δ_1 ist es möglich, für k eine obere Grenze k' so festzustellen, dass für alle Werthe von k, welche kleiner als k' sind,

$$|F_1(k) - f(x_1, \dots x_n)| < \delta_1$$

ist, wenn $(x_1, \dots x_n)$ irgendwo in S' liegt.

Nimmt man nun an, dass $\psi(x)$ eine ganze transcendente Function ist, z. B. $\psi(x) = e^{-x^2}$, so können die Grössen $\psi\left(\frac{x'_\lambda - x_\lambda}{k}\right)$ nach ganzen positiven Potenzen von $x_1, \dots x_n$ entwickelt werden, da die x'_λ sowohl als auch die x_λ auf einen endlichen Bereich beschränkt sind, nämlich die ersteren auf S_1, die letzteren auf S'. Das Product der n Functionen ψ ist also ebenfalls in eine Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ zu entwickeln, welche, da sie gleichmässig convergirt, gliedweise integrirt werden kann; es ergiebt sich also auch für $F_1(k)$ eine beständig convergente Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$. Man kann also nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse δ_2 eine ganze rationale Function $G(x_1, \dots x_n)$ derart von $F_1(k)$ abtrennen, dass

$$|F_1(k) - G(x_1, \dots x_n)| < \delta_2$$

ist. Combinirt man diese Ungleichung mit der vorhergehenden und wählt δ_1, δ_2 so, dass ihre Summe gleich der vorgeschriebenen Grösse δ ist, so erhält man

$$|f(x_1, \dots x_n) - G(x_1, \dots x_n)| < \delta,$$

wie verlangt wurde.

Es war bisher von der Function $f(x_1, \dots x_n)$ angenommen worden, dass ihr absoluter Betrag eine endliche obere Grenze besitze. Diese Annahme kann man aber fallen lassen, wenn es sich nur darum handelt, eine ganze rationale Function $G(x_1, \dots x_n)$ herzustellen, welche sich in einem gegebenen endlichen Bereiche S', der sammt seiner Begrenzung ganz im Innern von S enthalten ist, der Function $f(x_1, \dots x_n)$ so genau anschliesst, dass der absolute

Betrag der Differenz $f(x_1, \ldots x_n) - G(x_1, \ldots x_n)$ für jede dem Bereiche S' angehörende Stelle $(x_1, \ldots x_n)$ unter einer beliebig festgesetzten Grenze δ liegt.

Man kann nämlich offenbar innerhalb S einen ganz im Endlichen gelegenen Bereich S_1 annehmen, für welchen die Bedingung, dass für alle Stellen desselben $|f(x_1, \ldots x_n)|$ unterhalb einer bestimmten Grenze liegt, erfüllt ist, und man kann diesen Bereich S_1 so wählen, dass er den gegebenen Bereich S' ganz umschliesst. Zu dem Zwecke nehme man um jeden im Endlichen liegenden Punkt der Begrenzung von S eine Umgebung derartig an, dass kein Punkt irgend einer solchen Umgebung in S' liegt, und schliesse alle Punkte dieser Umgebungen aus sowie alle Punkte, welche z. B. vom Coordinatenanfangspunkte um weiter als R entfernt sind. Durch passende Wahl der Grösse R und der Radien der genannten Umgebungen kann man es dann stets erreichen, dass das entstehende Continuum S_1 allen angegebenen Bedingungen genügt. Ersetzt man dann S durch S_1, so findet man durch Anwendung des obigen Satzes die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung bestätigt.

Nach diesen Vorbereitungen ist man nunmehr im Stande, den Hauptsatz zu beweisen, dass nämlich die Function $f(x_1, \ldots x_n)$ darstellbar ist in Form einer beständig convergenten Reihe, deren einzelne Glieder ganze rationale Functionen von $x_1, \ldots x_n$ sind.

Zu dem Zwecke denke man sich um jeden im Endlichen liegenden Punkt der Grenze von S eine Kugel mit dem Radius ϱ_1 und ferner um den Nullpunkt eine Kugel mit dem Radius R_1 beschrieben. Schliesst man dann alle Punkte aus, welche innerhalb der ersten Kugeln und ausserhalb der letzten Kugel liegen, so bleibt bei geeigneter Wahl der Radien ϱ_1 und R_1 von S noch ein Continuum übrig, welches mit S_1 bezeichnet werde. Ferner seien $\varrho_2, \varrho_3, \ldots$ und $R_2, R_3, \ldots$ Grössen, welche die Bedingungen

$$\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 > \cdots, \quad \operatorname*{Lim}_{m=\infty} \varrho_m = 0,$$
$$R_1 < R_2 < R_3 < \cdots, \quad \operatorname*{Lim}_{m=\infty} R_m = \infty$$

befriedigen, und $S_2, S_3, \ldots$ diejenigen Bereiche, welche aus S genau so entstehen wie S_1, wenn man ϱ_1, R_1 durch ϱ_2, R_2; ϱ_3, R_3; ... ersetzt. Wenn alsdann ein bestimmter Punkt $P = (x_1, \ldots x_n)$ gegeben ist, so giebt es offenbar stets eine Zahl r von der Beschaffenheit, dass alle Bereiche $S_{r+1}, S_{r+2}, \ldots$ den Punkt P enthalten.

Ferner nehme man eine unendliche Reihe beliebig kleiner positiver Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots$ derart an, dass $\operatorname*{Lim}_{m=\infty} \delta_m = 0$ ist und ausserdem

$$\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m$$

einen endlichen bestimmten Werth hat.

Nun kann man den verschiedenen Bereichen S_ν entsprechend eine Reihe von ganzen rationalen Functionen

$$G_1(x_1, \ldots x_n),\ G_2(x_1, \ldots x_n),\ G_3(x_1, \ldots x_n),\ \ldots$$

derart herstellen, dass

$$|f(x_1, \ldots x_n) - G_\nu(x_1, \ldots x_n)| < \delta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \infty)$$

ist, wenn die Stelle $(x_1, \ldots x_n)$ dem Bereich S_ν angehört. Bildet man alsdann die Grössen

$$\begin{aligned} f_0(x_1, \ldots x_n) &= G_1(x_1, \ldots x_n) \\ f_1(x_1, \ldots x_n) &= G_2(x_1, \ldots x_n) - G_1(x_1, \ldots x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, \ldots x_n) &= G_{m+1}(x_1, \ldots x_n) - G_m(x_1, \ldots x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

so sind auch $f_0, f_1, \ldots$ ganze rationale Functionen, und es ist

$$\sum_{\mu=0}^{m} f_\mu(x_1, \ldots x_n) = G_{m+1}(x_1, \ldots x_n).$$

Wählt man nun m hinreichend gross, so wird der Bereich S_m sowie alle folgenden Bereiche den Punkt $(x_1, \ldots x_n)$ enthalten, und daher ist

$$\begin{aligned} |f(x_1, \ldots x_n) - G_m(x_1, \ldots x_n)| &< \delta_m, \\ |f(x_1, \ldots x_n) - G_{m+1}(x_1, \ldots x_n)| &< \delta_{m+1}, \end{aligned}$$

also

$$|G_{m+1}(x_1, \ldots x_n) - G_m(x_1, \ldots x_n)| < \delta_m + \delta_{m+1}$$

oder

$$|f_m(x_1, \ldots x_n)| < \delta_m + \delta_{m+1},$$

sobald m grösser ist als eine bestimmte Zahl r. Daraus folgt also

$$\sum_{\mu=r+1}^{\infty} |f_\mu| < \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \delta_\mu + \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \delta_{\mu+1}.$$

Der Betrag der rechten Seite dieser Ungleichung hat nun aber wegen der Convergenz der Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m$ einen endlichen Werth; es ist also die Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu(x_1, \dots x_n)$$

unbedingt convergent für jeden bestimmten Punkt $(x_1, \dots x_n)$.

Nunmehr kann auch der Werth dieser Reihe bestimmt werden; es ist

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu = \operatorname*{Lim}_{m=\infty} \sum_{\mu=0}^{m} f_\mu = \operatorname*{Lim}_{m=\infty} G_{m+1} = f(x_1, \dots x_n),$$

da der Annahme gemäss $\operatorname*{Lim}_{m=\infty} \delta_m = 0$ ist. Es ist also die Function $f(x_1, \dots x_n)$ als eine für jeden bestimmten Punkt $(x_1, \dots x_n)$ unbedingt convergente Reihe von ganzen rationalen Functionen $f_\mu(x_1, \dots x_n)$ dargestellt.

Ist nun ein ganz im Endlichen liegender Bereich S' gegeben, der sammt seiner Begrenzung ganz im Innern von S enthalten ist, so kann r so gewählt werden, dass alle Bereiche $S_{r+1}, S_{r+2}, \dots$ den Bereich S' ganz umschliessen; dann werden also die obigen Ungleichungen für alle dem Bereich S' angehörigen Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$ gelten, d. h. die Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu(x_1, \dots x_n)$$

ist innerhalb des Bereiches S' auch gleichmässig convergent. Es gilt also das Theorem:

Jede Function $f(x_1, \dots x_n)$ von der angegebenen Beschaffenheit lässt sich auf mannigfaltige Weise in der Form einer unendlichen Reihe darstellen, deren Glieder ganze rationale Functionen von $x_1, \dots x_n$ sind; diese Reihe convergirt unbedingt für jedes endliche, in dem Bereiche S gelegene Werthsystem $(x_1, \dots x_n)$ und gleichmässig für jeden ganz im Endlichen liegenden abgeschlossenen Theil von S.

Hieran knüpfe ich noch einige Bemerkungen, die den oben in Beziehung auf Functionen von einer Veränderlichen gemachten ganz analog sind.

Man kann es so einrichten, dass die Coefficienten der Functionen $f_\mu(x_1, \dots x_n)$ rationale Zahlen werden; ferner braucht man wegen der gleichmässigen Convergenz der Reihen jedes Werthsystem $(x_1, \dots x_n)$, für das der zugehörige Functionswerth berechnet werden soll, nicht absolut genau, sondern nur mit einer gewissen, in jedem besonderen Falle zu bestimmenden Sicherheit zu kennen, um den gesuchten Functionswerth mit einer vorgeschriebenen Genauigkeit zu berechnen, und zwar wird sich derselbe, da man zu dem Zwecke nur eine endliche Anzahl von Gliedern zu summiren hat, stets als eine rationale Zahl ergeben.

Doch ist dies theoretisch von geringerer Wichtigkeit; die Hauptsache liegt in der gewonnenen Erkenntniss, dass für jede Function von der angenommenen Beschaffenheit stets eine arithmetische Darstellung existirt, und zwar in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder sämmtlich ganze rationale Functionen der Argumente der Function sind, wenn auch durch das Bisherige freilich noch nicht festgestellt ist, wie man die Entwickelung der Function in eine solche unendliche Reihe wirklich herstellen könne.

Wird ferner angenommen, dass der Bereich S, innerhalb dessen die Function $f(x_1, \dots x_n)$ definirt ist, nur eine singuläre Stelle, die dann auch im Unendlichen liegen kann, enthalte, so kann man an die Stelle der Veränderlichen $x_1, \dots x_n$ n andere $x'_1, \dots x'_n$ so einführen, dass die letzteren rationale Functionen der ursprünglichen, und umgekehrt diese rationale Functionen von $x_1, \dots x_n$ werden, und zugleich die Function, in welche $f(x_1, \dots x_n)$ durch diese Substitution übergeht, nur eine und zwar im Unendlichen liegende singuläre Stelle besitzt.

Nach dem vorhergehenden Satze kann demnach $f(x_1, \dots x_n)$ in eine Reihe, in welcher jedes einzelne Glied eine ganze rationale Function von $x'_1, \dots x'_n$, also eine rationale Function von $x_1, \dots x_n$ ist, verwandelt werden.

Auf Grund dieses Satzes lassen sich nun leicht zusammengesetztere zur Darstellung von Functionen der betrachteten Art geeignete Reihen bilden; worauf ich jedoch hier nicht näher eingehe.