ПРИЛОЖЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ВОПРОСАМ О ФУНКЦИЯХ, НАИМЕНЕЕ И НАИБОЛЕЕ ОТКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ

Записки С.-Петербургской Академии Наук, XXX, № 5, 1877

После работ Абеля, Якоби и других ученых теорию эллиптических функций можно считать уже законченною в главных чертах.

Дальнейшим исследователям остается только пользоваться этою теориею для решения различных вопросов анализа и математической физики.

Несмотря на уже имеющиеся, в высшей степени замечательные, приложения эллиптических функций к теории чисел, геометрии и механике, я полагаю, что со стороны приложений теория эллиптических функций оставляет желать еще многого.

Поэтому я счел не лишним рассмотреть некоторые вопросы о наименьших величинах, которые решаются при помощи основных формул теории эллиптических функций. Эти вопросы принадлежат к тому классу вопросов о наименьших величинах, приемы для решения которых были даны в первый раз П. Л. Чебышевым.*

1. Согласимся называть *наибольшим отклонением* некоторой функции от нуля в пределах от $x=a$ до $x=b$ наибольшую численную величину функции для всех значений независимой переменной от $x=a$ до $x=b$, со включением пределов.

Точно так же *наименьшим отклонением* какой-нибудь функции от нуля в пределах от $x=a$ до $x=b$ — наименьшую численную величину значений функции для всех значений независимой переменной от $x=a$ до $x=b$, со включением пределов.

* Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes, 1853, и его же: Sur les questions de Minima, etc.

Условившись в этом, мы переходим к решению следующих задач:

Задача I*

2. *В целой функции*

$$F(x) = x^n - \sigma x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n,$$

где σ — некоторый данный коэффициент, найти остальные коэффициенты $p_2, p_3, \ldots p_n$ так, чтобы наибольшее отклонение от нуля функции $F(x)$ в пределах от $x = -1$ до $x = 1$ было, по возможности, меньше.

Для $\sigma = 0$ решение этой задачи известно.

В этом случае $F(x)$ очень просто выражается через тригонометрические функции; она именно равна

$$\frac{1}{2^{n-1}} \cos (n \arccos x),$$

как это легко можно видеть из решения другой задачи.**

Когда σ не равно нулю, мы докажем, что $F(x)$ очень просто выражается через Якобиевы функции

$$H\left(\frac{2Ku}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q} \sin u - 2\sqrt[4]{q^9} \sin 3u + \ldots,$$

$$\Theta\left(\frac{2Ku}{\pi}\right) = 1 - 2q \cos 2u + 2q^4 \cos 4u - \ldots,$$

где K — полный эллиптический аргумент, $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$ и K' — полный эллиптический аргумент для дополнительного модуля.

Легко видеть, что достаточно решить предложенную задачу только для положительных значений σ. Действительно, полагая в выражении

$$F(x) = x^n - \sigma x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + p_3 x^{n-3} + \ldots + p_n$$

$x = -z$ (z также будет заключаться между -1 и $+1$), найдем

$$F(-z) = (-1)^n (z^n + \sigma z^{n-1} + p_2 x^{n-2} - p_3 x^{n-3} + \ldots).$$

Следовательно, если $F(x)$ дает решение нашей задачи при $\sigma > 0$, то $(-1)^n F(-x)$ доставит решение в том случае, когда σ переменит свой знак. Поэтому можно ограничиться положительными значениями σ.

* Десять лет тому назад этот вопрос был мне рекомендован для занятий П. Л. Чебышевым и разобран мною в литографированном рассуждении „Об одном вопросе о наименьших величинах“. Здесь я представляю решение его в совершенно переработанном виде.

** Théorie de mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes. См. также: Bertrand. Traité de calcul différentiel, p. 512 et suiv.

Кроме того, заметим, что если бы требовалось определить функцию

$$F(x) = x^n - \sigma x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots$$

так, чтобы ее наибольшее отклонение в каких-нибудь пределах $x = a$ и $x = b$ было, по возможности, малым, то эта задача также свелась бы к предыдущей.

Действительно, если положить

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} z,$$

то z будет изменяться от -1 до $+1$, когда x изменяется от a до b, и мы будем иметь

$$F(x) = x^n - \sigma x^{n-1} + \ldots = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \left(z^n + \frac{n\left(\frac{a+b}{2}\right) - \sigma}{\frac{b-a}{2}} z^{n-1} + \ldots \right).$$

Вопрос теперь сводится к тому, чтобы определить функцию

$$z^n + \frac{n\left(\frac{a+b}{2}\right) - \sigma}{\frac{1}{2}(b-a)} z^{n-1} + \ldots,$$

наибольшее отклонение которой от $z = -1$ до $z = +1$ было бы самым малым.

3. Переходя теперь к решению задачи, поставленной в предыдущем n°, мы докажем, что $F(x)$ удовлетворяет некоторому неопределенному уравнению 2-й степени, из которого ее и можно найти. Мы будем означать через L — наибольшее отклонение от нуля $F(x)$ в пределах от -1 до $+1$.

Положим, что $F(x)$ обращается в $\pm L$ при следующих значениях x:

$$x_1, x_2, \ldots x_\mu,$$

содержащихся в указанных выше пределах. Эти величины будут, как известно, общими корнями уравнений

$$(1) \qquad F^2(x) - L^2 = 0, \qquad F'(x)(x^2 - 1) = 0,$$

и число их должно быть не меньше n.

Действительно, известно, что уравнения

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&\lambda_2 \frac{dF(x_1)}{dp_2} + \lambda_3 \frac{dF(x_1)}{dp_3} + \ldots + \lambda_n \frac{dF(x_1)}{dp_n} = F(x_1),\\
&\lambda_2 \frac{dF(x_2)}{dp_2} + \lambda_3 \frac{dF(x_2)}{dp_3} + \ldots + \lambda_n \frac{dF(x_2)}{dp_n} = F(x_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_2 \frac{dF(x_\mu)}{dp_2} + \lambda_3 \frac{dF(x_\mu)}{dp_3} + \ldots + \lambda_n \frac{dF(x_\mu)}{dp_n} = F(x_\mu)
\end{aligned}
$$

или, что то же самое, уравнения* (1)

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&x_1^{n-2}\lambda_2 + x_1^{n-3}\lambda_3 + \ldots + \lambda_n = F(x_1),\\
&x_2^{n-2}\lambda_2 + x_2^{n-3}\lambda_3 + \ldots + \lambda_n = F(x_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_\mu^{n-2}\lambda_2 + x_\mu^{n-3}\lambda_3 + \ldots + \lambda_n = F(x_\mu)
\end{aligned}
$$

должны быть несовместными. Число их должно быть поэтому более $n-1$, т. е., другими словами, число μ не меньше n.

Если бы мы предположили, что $\mu = n+1$, то пришли бы к тем же самым уравнениям, которые были получены П. Л. Чебышевым для решения другой задачи, обращающейся в нашу в случае $\sigma = 0$.

Так как мы разбираем случай, когда σ не равно нулю, то должны предположить, что $\mu = n$.

В числе n общих корней уравнений (1)

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n,$$

могут быть или обе крайние величины $x = \pm 1$, или только одна.

В первом предположении, полагая $x_n = +1$ и $x_{n-1} = -1$, получим

$$(4)\qquad F'(x)(x^2-1) = (x^2-1)\,\varphi(x)\cdot\rho,$$

где

$$\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2}),$$

ρ — функция первой степени; кроме того,

$$(5)\qquad F^2(x) - L^2 = \varphi^2(x)(x-\alpha)(x-\beta),$$

где α и β означают неопределенные параметры. В последнем уравнении множитель $\varphi^2(x)$ вошел потому, что

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{n-2}$$

* См. Thebycheff. Sur les questions de Minima.

будут, очевидно, двойными корнями уравнения

$$F^2(x)-L^2=0.$$

Если же между количествами

$$x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n$$

будет только одна из величин ± 1, то, полагая $x_n=\mp 1$, получим

$$(6)\qquad \begin{cases} F^2(x)-L^2=(x-x_1)^2(x-x_2)^2\dots(x-x_{n-1})^2(x\pm 1)(x-\alpha), \\ F'(x)=n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1}), \end{cases}$$

где α — некоторый коэффициент, определяющийся по заданной величине σ.

Итак, искомая функция удовлетворяет или уравнениям (6), или уравнениям

$$(7)\qquad \begin{cases} F^2(x)-L^2=\varphi^2(x)(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta), \\ F'(x)=\varphi(x)\rho. \end{cases}$$

Последняя функция ρ найдется через параметры α, β и σ.

В самом деле, пусть

$$\varphi(x)=x^{n-2}+bx^{n-3}+\dots,$$
$$\rho=Ax+B.$$

Внося эти величины в уравнения (7) и приравнивая коэффициенты в обеих частях при x^{2n-1} в первом уравнении, а также при x^{n-1} и x^{n-2} во втором, получим

$$b=\frac{\alpha+\beta}{2}-\sigma,\qquad A=n,\qquad B=\sigma-n\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\rho=n\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sigma.$$

4. Найдем теперь функцию, удовлетворяющую уравнениям (6). Из этих уравнений выводим

$$\frac{F'(x)}{\sqrt{F(x)^2-L^2}}=\frac{n}{\sqrt{(x-\alpha)(x\pm 1)}}.$$

После умножения обеих частей этого равенства на dx и интегрирования найдем функцию $F(x)$ под следующим видом:

$$(8)\quad F(x)=\frac{\left(x-\frac{\alpha\mp 1}{2}+\sqrt{x^2-(\alpha\mp 1)x\mp\alpha}\right)^n+\left(x-\frac{\alpha\mp 1}{2}-\sqrt{x^2-(\alpha\mp 1)x\mp\alpha}\right)^n}{2^n}.$$

Принимая во внимание, что

$$F(x) = x^n - \sigma x^{n-1} + \ldots,$$

нетрудно заметить, что

$$\alpha = \pm 1 + \frac{2\sigma}{n}. \tag{9}$$

Верхний знак в уравнении (9) соответствует верхнему в (6), нижний — нижнему.

Полагая в выражении $F(x)$ [см. (8)] $x = \alpha$, определим наибольшее отклонение $F(x)$:

$$L = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{\alpha \pm 1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\pm 1 + \frac{\sigma}{n}\right)^n.$$

Так как $F(x)$ в промежутке от -1 до $+1$ должна быть меньше L, то мы заключаем по уравнениям (6), что

$$(x - \alpha)(x \pm 1) < 0,$$

когда x содержится в промежутке от -1 до $+1$.

Поэтому, принимая во внимание, что

$$\alpha = \pm 1 + \frac{2\sigma}{n},$$

мы видим. что в случае $\sigma > 0$ необходимо удержать верхний знак, а при $\sigma < 0$ — нижний.

Относительно решения нашей задачи по формуле (8) мы сделаем следующее замечание. Ограничиваясь случаем $\sigma > 0$, положим

$$x - \frac{\alpha - 1}{2} + \sqrt{(x+1)(x-\alpha)} = P(\cos v + i \sin v), \tag{10}$$

где

$$P = \frac{\alpha + 1}{2}$$

и v изменяется от π до 0 при изменении x от -1 до α.

По внесении выражения (10) в формулу (8), $F(x)$ принимает вид

$$F(x) = \frac{P^n}{2^{n-1}} \cos nv.$$

Из этого выражения видно, что $F(x)$ обращается в $\pm \frac{P^n}{2^{n-1}}$, между пределами -1 и α, n раз. Для того, чтобы эта функция наименее уклонялась от нуля в пределах -1 и $+1$, все величины, при которых $F(x)$ равна $\pm\frac{p^n}{2^{n-1}}$, исключая $x=\alpha$, должны заключаться в пределах -1 и $+1$.

Пусть Θ будет значение v при $x=1$; из уравнения (10) имеем

$$\cos\Theta=\frac{\frac{3-\alpha}{2}}{\frac{\alpha+1}{2}}=\frac{1-\frac{\sigma}{n}}{1+\frac{\sigma}{n}},$$

откуда

$$\frac{\sigma}{n}=\operatorname{tg}^2\frac{\Theta}{2}.$$

При изменении x от -1 до $+1$, v идет от π до Θ; для того, чтобы в этом промежутке $F(x)$ обращалась в $\pm\frac{p^n}{2^{n-1}}$ $n-1$ раз [как этого требует уравнение (6)], нужно, чтобы Θ было меньше $\frac{\pi}{n}$ и, следовательно,

$$\frac{\sigma}{n}<\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n}.$$

При $\sigma>n\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n}$, $F(x)$ не будет уже представлять решения нашей задачи.

5. Переходя теперь к решению уравнений (7), мы различим два случая: в первом — параметры α и β действительные, во втором — мнимые.

Впоследствии мы покажем, что функцию, соответствующую мнимым параметрам, можно совсем исключить.

6. *Параметры α и β — действительные.*

Из первого уравнения (7) видно, что $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ в пределах $-1<x<+1$, потому что $F^2(x)<L^2$. Из этого видно, что оба параметра α и β или меньше -1, или оба больше $+1$.

Предполагая, что эти параметры больше единицы, мы докажем, что корень уравнения

$$\rho=0$$

находится в пределах $+1$ и α, если $\beta>\alpha$.

Из уравнения

$$F^2(x)-L^2=\varphi^2(x)(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta)$$

видно, что численная величина $F(x)$ в пределах от $x=1$ до $x=\alpha$ будет не меньше L; следовательно, в этих пределах она должна иметь maximum, т. е. уравнение

$$F'(x)=0$$

должно иметь корень, больший единицы и меньший α. Этот корень, как видно из уравнений (7), удовлетворяет уравнению

$$\rho = n\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \sigma = 0.$$

Поэтому имеем два неравенства

$$\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\sigma}{n} > 1, \qquad \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\sigma}{n} < \alpha$$

или, что то же самое,

$$\frac{\alpha+\beta}{2} > 1 + \frac{\sigma}{n}, \qquad \frac{\beta-\alpha}{2} < \frac{\sigma}{n};$$

следовательно,

$$\sigma > 0.$$

Подобным же образом убедимся, что, при отрицательных параметрах α и β, σ будет меньше нуля. Мы ограничимся случаем $\sigma > 0$ (п° 2).

7. Выведем в этом предположении некоторые уравнения, которым удовлетворяют α и β.

Из уравнений (7) имеем

$$\frac{F'(x)}{\sqrt{F^2(x) - L^2}} = \frac{n\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \sigma}{\sqrt{(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}. \tag{11}$$

Умножая обе части этого уравнения на dx и интегрируя, получим

$$\left\{\begin{aligned} &\log\left(\frac{F(x) + \sqrt{F^2(x) - L^2}}{\pm L}\right) = \log\left(\frac{F(x) + \varphi(x)\sqrt{(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}{\pm L}\right) = \\ &\qquad = \int\limits_{-1}^{x} \frac{n\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \sigma}{\sqrt{(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta)}} \cdot dx, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

где знак выбирается так, чтобы L, взятое с этим знаком, было равно $F(-1)$.

Принимая во внимание уравнение

$$F^2(x) - L^2 = \varphi^2(x)(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta),$$

нетрудно убедиться в том, что отношение

$$\frac{F(x) + \varphi(x)\sqrt{(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}{\pm L}$$

для всех значений x в пределах от -1 до $+1$ может быть изображено в виде

$$\cos v + i \sin v,$$

где v — некоторая вещественная величина.

При этом

v	равно	0	при	$x = -1,$
v	„	π	„	$x = x_1,$
v	„	2π	„	$x = x_2,$
...	...	...	...	...
v	„	$(n-1)\pi$	„	$x = 1,$

где

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{n-2}$$

суть корни уравнения

$$\varphi(x) = 0,$$

назначенные по порядку величин.

На основании только что сказанного из формулы (12) видно, что интеграл

$$\int_{-1}^{+1} \frac{n\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \sigma}{\sqrt{(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}\, dx = (n-1)\pi i \tag{13}$$

или

$$\int_{-1}^{+1} \frac{n\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - x\right) - \sigma}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}\, dx = (n-1)\pi. \tag{13'}$$

Так как численная величина $F(x)$, в пределах от $x = 1$ до $x = \alpha$, сначала возрастает от L до некоторого предела, а потом снова уменьшается до L, то по формуле (12) мы заключаем, что

$$\int_{1}^{\alpha} \frac{n\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - x\right) - \sigma}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}\, dx = 0. \tag{14}$$

Кроме равенств (13) и (14), мы заметим еще следующие:

$$
(15)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\int_{-1}^{x_1}\frac{n\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)-\sigma}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}\,dx=\pi,\\
&\int_{-1}^{x_2}\frac{n\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)-\sigma}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}\,dx=2\pi,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\int_{-1}^{x_{n-2}}\frac{n\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)-\sigma}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}\,dx=(n-2)\pi.
\end{aligned}\right.
$$

Далее означим через $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}$ корни уравнения $F(x)=0$, лежащие в пределах от -1 до $+1$, по порядку величин.

Легко видеть, что ξ_1 заключается между -1 и x_1, так как $F(x)$ в этих пределах меняет знак; ξ_2 лежит между пределами x_1 и x_2 и т. д.

При этих обозначениях из формулы (12) получаются следующие равенства:

$$
(16)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\int_{-1}^{\xi_1}\frac{n\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)-\sigma}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}\,dx=\frac{\pi}{2},\\
&\int_{-1}^{\xi_2}\frac{n\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)-\sigma}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}\,dx=\frac{3\pi}{2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\int_{-1}^{\xi_{n-2}}\frac{n\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)-\sigma}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}\,dx=\frac{(2n-3)\pi}{2}.
\end{aligned}\right.
$$

8. Прежде чем мы покажем выражение $F(x)$ в эллиптических функциях, заметим, что величины

$$x_1, x_2, \dots x_{n-2},$$
$$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}$$

могут быть найдены делением на равные части некоторой массы, распределенной, по довольно простому закону, по четверти окружности некоторого эллипса.

Предполагая, что параметры α и β определены через коэффициент σ по уравнениям (13) и (14), представим себе эллипс, которого полуоси соответственно равны

$$\rho=\sigma\sqrt{\frac{\beta+1}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\rho^2-b^2}=b\sqrt{\frac{\beta+1}{2}},$$

где b — произвольная положительная величина.

Положим, что этот эллипс пересекается рядом однофокусных с ним гипербол, переменные полуоси которых мы обозначим через ρ_1 и $\sqrt{b^2-\rho_1^2}$.

Мы будем рассматривать только четверть обвода эллипса. Для каждой точки эллипса существует определенное значение ρ_1. Если непрерывно изменять положение точки от конца малой оси до конца большой, то ρ_1 придется изменять от 0 до b.

Представим теперь себе массу, распределенную по этой дуге эллипса.

Пусть плотность массы будет пропорциональна величине

$$\left(2n-\frac{n\frac{\beta+\alpha}{2}+\sigma}{\frac{\beta+1}{2}-\left(\frac{\rho_1}{b}\right)^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha+1}{2}-\left(\frac{\rho_1}{b}\right)^2}},$$

т. е. известной алгебраической функции координаты ρ_1.

Тогда, называя через k коэффициент пропорциональности, мы получим массу дуги, один конец которой соответствует $\rho_1=0$, а другой — какому-нибудь значению ρ_1, в виде определенного интеграла

$$k\int_0^{\rho_1}\frac{2n\left(\frac{\beta+1}{2}-\left(\frac{\rho_1}{b}\right)^2\right)-n\frac{\beta-\alpha}{2}-\sigma}{\sqrt{\frac{\beta+1}{2}-\left(\frac{\rho_1}{b}\right)^2}\sqrt{\frac{\alpha+1}{2}-\left(\frac{\rho_1}{b}\right)^2}}\,\frac{d\left(\frac{\rho_1}{b}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\rho_1}{b}\right)^2}}.$$

Введя здесь новую переменную вместо ρ_1 по формуле

$$\frac{\rho_1}{b}=\sqrt{\frac{1+x}{2}},$$

мы получим ту же массу в виде интеграла

$$k\int_{-1}^{x}\frac{n\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)-\sigma}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}\,dx.$$

Теперь принимая во внимание формулы (15) и (16), мы можем сказать следующее:

Разделим всю массу на $2n-2$ равных частей. Пусть

$$0,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \ldots\ \tau_{2n-3},\ 1$$

будут значения $\frac{\rho_1}{b}$, соответствующие точкам деления.

В таком случае будем иметь

$$\xi_1=2\tau_1^2-1,\quad \xi_2=2\tau_3^2-1,\ \ldots\ \xi_{n-1}=2\tau^2_{2n-3}-1,$$

$$x_1=2\tau_2^2-1,\quad x_2=2\tau_4^2-1,\ \ldots\ x_{n-2}=2\tau^2_{2n-4}-1.$$

9. Для определения $F(x)$ через эллиптические функции приведем интеграл, стоящий в правой части уравнения (12), к каноническому виду.

Полагая

$$\lambda^2=\frac{\beta-1}{\beta+1},\quad x=\frac{z^2+\lambda^2}{z^2-\lambda^2},$$

$$k^2=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\cdot\frac{\beta+1}{\beta-1},$$

будем иметь

$$\int_{-1}^{x}\frac{n\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sigma}{\sqrt{(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}\,dx=$$

$$=M\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}-2N\int_0^z\frac{dz}{(z^2-\lambda^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

где, для сокращения, положено

$$M=\frac{n(1-k^2\lambda^4)-n\left(1+\frac{\sigma}{n}\right)(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}{\lambda\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}},$$

$$N=n\lambda\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}.$$

Положим далее

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = u$$

или $z = \operatorname{sn} u$.

Пусть, кроме того,

$$\lambda = \operatorname{sn} a.$$

Внося вместо λ его величину в вышепоказанные выражения M и N будет иметь

$$M = \frac{n(1-k^2\operatorname{sn}^4 a) - n\left(1+\frac{\sigma}{n}\right)\operatorname{cn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a},$$
$$N = n \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a.$$

Выражая теперь эллиптический интеграл 3-го вида через Якобиевы функции $\Theta(u)$ и $H(u)$, мы придем к такому равенству: [2]

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-1}^{x} \frac{n\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sigma}{\sqrt{(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}\,dx = \\ &= \left(M - 2n\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right)u + n\log\frac{H(a+u)}{H(a-u)}.\end{aligned}\right.$$

Для определения параметра a и модуля k мы воспользуемся равенствами (13) и (14).

Заметим с этою целью, что, на основании зависимости

$$x = \frac{z^2+\lambda^2}{z^2-\lambda^2},$$

где $z = \operatorname{sn} u$ и $\lambda = \operatorname{sn} a$, можно положить, что u изменяется от 0 до $K'i$, когда x идет от -1 до $+1$ [3]; кроме того, полагая $u = K'i + v$, можно принять, чте v изменяется от 0 до K, когда x идет от 1 до α (K и $K'i$ означают здесь полные эллиптические аргументы).

Находя по формуле (17), при помощи известных свойств Якобиевых функций, значения интегралов

$$\int_{-1}^{1} \frac{n\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sigma}{\sqrt{(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}\,dx,$$

$$\int_{1}^{\alpha} \frac{n\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sigma}{\sqrt{(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}\,dx$$

и сличая их с теми, которые даются формулами (13) и (14), мы приходим к следующим равенствам:

$$\left(M-2n\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right)K'i+\frac{ni\pi(K-a)}{K}=(n-1)\,i\pi,\ ^{(4)}$$

$$\left[M-2n\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right]K=0.$$

Откуда находим

(18) $$M-2n\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}=0,\qquad a=\frac{K}{n}.$$

Следовательно, формула (17) принимает вид

$$\int_{-1}^{x}\frac{n\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\sigma}{\sqrt{(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}\,dx=n\log\frac{H\left(\frac{K}{n}+u\right)}{H\left(\frac{K}{n}-u\right)}.$$

Поэтому из формулы (12) получаем

$$\frac{F(x)+\sqrt{F^2(x)-L^2}}{\pm L}=\left[\frac{H\left(\frac{K}{n}+u\right)}{H\left(\frac{K}{n}-u\right)}\right]^n.$$

Следовательно,

(19) $$F(x)=\pm\frac{L}{2}\left[\left(\frac{H\left(\frac{K}{n}+u\right)}{H\left(\frac{K}{n}-u\right)}\right)^n+\left(\frac{H\left(\frac{K}{n}-u\right)}{H\left(\frac{K}{n}+u\right)}\right)^n\right];$$

(20) $$\sqrt{F^2(x)-L^2}=\pm\frac{L}{2}\left[\left(\frac{H\left(\frac{K}{n}+u\right)}{H\left(\frac{K}{n}-u\right)}\right)^n-\left(\frac{H\left(\frac{K}{n}-u\right)}{H\left(\frac{K}{n}+u\right)}\right)^n\right].$$

По вышепоказанным формулам для k^2 и λ^2 мы находим следующие выражения параметров α и β:

$$\alpha=\frac{1+k^2\operatorname{sn}^2\frac{K}{n}}{\operatorname{dn}^2\frac{K}{n}},\qquad \beta=\frac{1+\operatorname{sn}^2\frac{K}{n}}{\operatorname{cn}^2\frac{K}{n}},$$

$$\frac{\beta-\alpha}{2}=\left(\frac{k'\operatorname{sn}\frac{K}{n}}{\operatorname{cn}\frac{K}{n}\operatorname{dn}\frac{K}{n}}\right)^2=\left(\frac{\operatorname{cnc}\frac{K}{n}}{\operatorname{dn}\frac{K}{n}}\right)^{2\ (5)},$$

$$\frac{\beta+\alpha}{2}=\frac{1-k^2\operatorname{sn}^4\frac{K}{n}}{\operatorname{cn}^2\frac{K}{n}\operatorname{dn}^2\frac{K}{n}}=\frac{2\operatorname{sn}\frac{K}{n}}{\operatorname{cn}\frac{K}{n}\operatorname{dn}\frac{K}{n}\operatorname{sn}\frac{2K}{n}}.$$

10. Уравнение (18), по внесении вместо M и a их значений, принимает вид

$$\frac{1-k^2\operatorname{sn}^4\frac{K}{n}-\left(1+\frac{\sigma}{n}\right)\operatorname{cn}^2\frac{K}{n}\operatorname{dn}^2\frac{K}{n}}{\operatorname{sn}\frac{K}{n}\operatorname{cn}\frac{K}{n}\operatorname{dn}\frac{K}{n}}=2\frac{\Theta'\left(\frac{K}{n}\right)}{\Theta\left(\frac{K}{n}\right)}.$$

Из этого уравнения, решив его относительно $1+\frac{\sigma}{n}$, имеем

$$1+\frac{\sigma}{n}=\frac{2\operatorname{sn}\frac{K}{n}}{\operatorname{cn}\frac{K}{n}\operatorname{dn}\frac{K}{n}}\left(\frac{1}{\operatorname{sn}\frac{2K}{n}}-\frac{\Theta'\left(\frac{K}{n}\right)}{\Theta\left(\frac{K}{n}\right)}\right). \tag{21}$$

Таким образом найдена зависимость между коэффициентом σ и модулем k.

Изображая $\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$ через $Z(u)$, возьмем известное уравнение

$$Z(u)+Z(a)-Z(u+a)=k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}a\operatorname{sn}(u+a).$$ [6]

Полагая в этом уравнении $a=\frac{K}{n}$ и вставляя последовательно вместо u: $\frac{K}{n}$, $\frac{2K}{n}$, $\dots$ $\frac{(n-1)K}{n}$, получим следующий ряд равенств:

$$Z\left(\frac{K}{n}\right)+Z\left(\frac{K}{n}\right)-Z\left(\frac{2K}{n}\right)=k^2\operatorname{sn}^2\frac{K}{n}\operatorname{sn}\frac{2K}{n},$$

$$Z\left(\frac{K}{n}\right)+Z\left(\frac{2K}{n}\right)-Z\left(\frac{3K}{n}\right)=k^2\operatorname{sn}\frac{K}{n}\operatorname{sn}\frac{2K}{n}\operatorname{sn}\frac{3K}{n},$$

. . . .

$$Z\left(\frac{K}{n}\right)+Z\left(\frac{(n-1)K}{n}\right)-Z(K)=k^2\operatorname{sn}\frac{K}{n}\operatorname{sn}\frac{(n-1)K}{n}.$$ [7]

Складывая эти равенства и замечая, что $Z(K)=0$,[8] получим

$$nZ\left(\frac{K}{n}\right)=k^2\operatorname{sn}\frac{K}{n}\sum_{\mu=1}^{\mu=n-1}\operatorname{sn}\frac{\mu K}{n}\operatorname{sn}\frac{(\mu+1)K}{n}.$$

Отсюда видно, что, при изменении k от 0 до 1, $Z\left(\frac{K}{n}\right)$ изменяется от 0 до $\frac{n-1}{n}$,[9] а вторая часть уравнения (21) растет в то же время от $\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}$ до ∞;[10] следовательно, уравнение (21) удовлетворяется величиною k^2, меньшею единицы, только в том случае, когда $1+\frac{\sigma}{n}>\sec^2\frac{\pi}{2n}$ или $\sigma>n\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n}$.

11. Выведем теперь выражение L — наибольшего отклонения функции $F(x)$ от нуля в пределах от -1 до $+1$.

Предполагая x очень большим или, что все равно, u близким к $\frac{K}{n}$, разложим выражения x, $H\left(\frac{K}{n}+u\right)$ и $H\left(\frac{K}{n}-u\right)$ в ряд по восходящим степеням величины $\operatorname{sn} u - \operatorname{sn}\frac{K}{n}$ и ограничимся только первыми членами.

При этом имеем

$$x = \frac{\operatorname{sn}\frac{K}{n}}{\operatorname{sn} u - \operatorname{sn}\frac{K}{n}} + \ldots,$$

$$H\left(\frac{K}{n}-u\right) = -\frac{H'(0)}{\operatorname{cn}\frac{K}{n}\operatorname{dn}\frac{K}{n}}\left(\operatorname{sn} u - \operatorname{sn}\frac{K}{n}\right),$$

$$H\left(\frac{K}{n}+u\right) = H\left(\frac{2K}{n}\right) + \ldots$$

Принимая во внимание эти формулы, получаем по выражению (19)

$$F(x) = \mp\frac{(-1)^n L}{2}\left[\frac{H\left(\frac{2K}{n}\right)\operatorname{cn}\frac{K}{n}\operatorname{dn}\frac{K}{n}}{H'(0)\left(\operatorname{sn} u - \operatorname{sn}\frac{K}{n}\right)}\right]^n + \ldots$$

С другой стороны, замечая, что

$$F(x) = x^n - \ldots = \frac{\operatorname{sn}^n\frac{K}{n}}{\left(\operatorname{sn} u - \operatorname{sn}\frac{K}{n}\right)^n} + \ldots,$$

мы заключаем, во-первых, что двойной знак в формуле (19) нужно заменить на $(-1)^n$, и, во-вторых, приходим к следующему выражению L:

$$L = 2\left[\frac{H'(0)\operatorname{sn}\frac{K}{n}}{\operatorname{cn}\frac{K}{n}\operatorname{dn}\frac{K}{n}H\left(\frac{2K}{n}\right)}\right]^n.$$

Замечая далее, что

$$\operatorname{sn}\frac{K}{n} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H\left(\frac{K}{n}\right)}{\Theta\left(\frac{K}{n}\right)}, \qquad \operatorname{cn}\frac{K}{n} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{H_1\left(\frac{K}{n}\right)}{\Theta\left(\frac{K}{n}\right)},$$

$$\mathrm{dn}\,\frac{K}{n}=\sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta_1\left(\frac{K}{n}\right)}{\Theta\left(\frac{K}{n}\right)},\qquad H'(0)=\sqrt{k}\,\Theta(0),$$

$$\frac{\Theta\left(\frac{2K}{n}\right)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4\frac{K}{n}}=\frac{\Theta^4\left(\frac{K}{n}\right)}{\Theta^3(0)},$$

мы можем дать тому же выражению L такой вид:

$$L=\frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{\sqrt{k}\,\Theta_1^2(0)}{H_1\left(\frac{K}{n}\right)\Theta_1\left(\frac{K}{n}\right)}\right]^{2n}. \tag{22}$$

12. *Параметры α и β — мнимые.* Пусть

$$\alpha=\theta+\varepsilon\sqrt{-1},$$

$$\beta=\theta-\varepsilon\sqrt{-1},$$

где θ и ε — вещественные величины. Тогда $F(x)$ будет удовлетворять уравнениям

$$F^2(x)-L^2=(x^2-1)\left((x-\theta)^2+\varepsilon^2\right)\varphi^2(x),\quad F'(x)=\varphi(x)\left[n(x-\theta)+\sigma\right]; \tag{23}$$

здесь $\varphi(x)$ означает многочлен $(n-2)$-й степени, все корни которого

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{n-2}$$

лежат в пределах -1 и $+1$.

Из этих уравнений видно, что при $x=-1$ функция $F(x)$ будет иметь такой же знак, как и при $x=-\infty$, а при $x=+1$ такой же знак, как и при $x=\infty$; следовательно,

$$F(-1)=(-1)^n L,\qquad F(1)=L,$$

где L означает наибольшее отклонение от нуля в пределах от -1 до $+1$.

Нетрудно видеть, что корень уравнения

$$n(x-\theta)+\sigma=0$$

лежит в пределах -1 и $+1$. Действительно, в противном случае $F(x)$, приобретая множитель -1 при переходе x от x_λ к $x_{\lambda+1}$, обратилась бы в $-L$ при $x=+1$, а это противоречит вышенайденному значению $F(1)$.

Отсюда мы выводим два неравенства, которым должна удовлетворять величина θ:

$$\text{I)}\quad \theta > \frac{\sigma}{n} - 1 \quad \text{и} \quad \text{II)}\quad \theta < \frac{\sigma}{n} + 1.$$

Примечание. Когда $\sigma > n$, уравнения (23) не могут иметь места. В самом деле, второе из этих уравнений показывает, что $F'(x)$ имеет $n-1$ действительных корней в пределах -1 и $+1$, а потому $(n-1)$-я производная $F(x)$ должна иметь корень в этом промежутке; этот корень равен $\frac{\sigma}{n}$, и, следовательно, σ абсолютно меньше n.

13. Мы представим здесь выражение $F(x)$ для разбираемого случая через эллиптические функции. Мы не остановимся на доказательстве, так как это выражение может быть легко поверено.

Полагая

$$x = \frac{\operatorname{cn}\frac{2K}{n}\operatorname{cn}2u - 1}{\operatorname{cn}2u - \operatorname{cn}\frac{2K}{n}},$$

где u — новая переменная, изменяющаяся от 0 до $K'i$, когда x идет от -1 до $+1$, будем иметь

$$\Theta = \frac{\operatorname{cn}\frac{2K}{n}}{\operatorname{dn}^2\frac{2K}{n}}, \qquad \varepsilon = \frac{kk'\operatorname{sn}^2\frac{2K}{n}}{\operatorname{dn}^2\frac{2K}{n}},$$

$$(24)\quad F(x) = \frac{(-1)^n L}{2}\left\{\left(\frac{H\left(\frac{K}{n}+u\right)}{H\left(\frac{K}{n}-u\right)}\frac{\Theta_1\left(\frac{K}{n}+u\right)}{\Theta_1\left(\frac{K}{n}-u\right)}\right)^n + \left(\frac{H\left(\frac{K}{n}-u\right)}{H\left(\frac{K}{n}+u\right)}\frac{\Theta_1\left(\frac{K}{n}-u\right)}{\Theta_1\left(\frac{K}{n}+u\right)}\right)^n\right\},$$

$$L = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{\Theta_1(0)}{\Theta_1\left(\frac{2K}{n}\right)}\right]^{2n}.$$

Модуль k определится из уравнения

$$(25)\quad \frac{\sigma}{n} = \frac{\operatorname{sn}\frac{2K}{n}}{\operatorname{dn}\frac{2K}{n}}\left[\frac{k^2\operatorname{sn}\frac{2K}{n}\operatorname{cn}\frac{2K}{n}}{\operatorname{dn}\frac{2K}{n}} - 2\frac{\Theta'\left(\frac{2K}{n}\right)}{\Theta\left(\frac{2K}{n}\right)}\right].$$

14. Из предыдущего следует, что задача, поставленная в n° 2, должна решаться одной из трех вышенайденных функций (8), (19), (24).

Эти функции были определены так, чтобы каждая из них достигала по крайней мере n раз своего наибольшего отклонения от нуля и чтобы каждая имела вид

$$x^n - \sigma x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + p_3 x^{n-3} + \ldots,$$

где σ — некоторый данный коэффициент.

Теперь постараемся определить, будет ли в действительности увеличиваться наибольшее отклонение от нуля этих функций, если коэффициенты

$$p_2, p_3, \ldots$$

получат произвольные бесконечно малые приращения.

Исследуем с этой стороны сначала функцию, найденную в n° 4.

Эта функция $F(x)$ удовлетворяет, как мы видели, следующим уравнениям:

$$F^2(x) - L^2 = \varphi^2(x)(x \pm 1)(x - \alpha),$$

$$F'(x) = n\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ означает полином с $n-1$ действительными и неравными корнями, заключенными в пределах от -1 до $+1$.

Обозначив теперь через $\psi(x)$ функцию

$$\varphi(x)(x \pm 1),$$

положим, что

$$\psi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

где

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

корни $\psi(x)$, расположенные по порядку их величин; так что

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n.$$

Нетрудно видеть, что каждая целая функция $F(x)$ n-й степени, имеющая вид

$$F(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots,$$

может быть выражена формулой

$$F(x) = \psi(x) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{F(x_i)}{\psi'(x_i)} \frac{\psi(x)}{x - x_i}. \tag{26}$$

Действительно, разность

$$F(x) - \psi(x)$$

представляет целую функцию степени не выше $n-1$, обращающуюся в

$$F(x_1),\ F(x_2),\ \ldots\ F(x_n)$$

соответственно при

$$x=x_1,\ x=x_2,\ \ldots\ x=x_n.$$

Так что формула (26) есть известная формула интерполирования, примененная к функции

$$F(x)-\psi(x).$$

Заметим теперь, что все отношения

$$\frac{F(x_i)}{\psi'(x_i)},$$

соответствующие значениям

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n,$$

имеют один и тот же знак.

В самом деле, при переходе x от x_i к x_{i+1} меняется как знак числителя, так и знак знаменателя предыдущего отношения: числитель переходит от $\pm L$ к $\mp L$, а знаменатель $\psi'(x)$ меняет свой знак, потому что $\psi(x)$ имеет по одному корню в каждом промежутке от x_1 до x_2, от x_2 до x_3 и т. д. Теперь положим, что коэффициенты $p_2, p_3, \ldots$ в функции

$$F(x)=x^n-\sigma x^{n-1}+p_2 x^{n-2}+p_3 x^{n-3}+\ldots$$

получили бесконечно малые приращения.

Означая новую функцию (для измененных коэффициентов) через $\Phi(x)$, положим

$$\begin{aligned}\Phi(x_1)&=F(x_1)(1-\omega_1),\\ \Phi(x_2)&=F(x_2)(1-\omega_2),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Phi(x_n)&=F(x_n)(1-\omega_n),\end{aligned}$$

где

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ \omega_n$$

некоторые бесконечно малые величины. Тогда по формуле (26) получаем

$$\Phi(x)-F(x)=-\sum_{i=1}^{i=n}\frac{F(x_i)\,\omega_i}{\psi'(x_i)}\,\frac{\psi(x)}{x-x_i}. \tag{27}$$

Так как разность

$$\Phi(x)-F(x)$$

есть целая функция степени не выше $n-2$, то коэффициент при x^{n-1} в функции, стоящей в правой части уравнения (27), должен сократиться, что дает нам уравнение

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{F(x_i)\,\omega_i}{\psi'(x_i)} = 0. \tag{28}$$

Так как по замеченному выше все количества

$$\frac{F(x_i)}{\psi'(x_i)}$$

имеют один и тот же знак, то нельзя удовлетворить уравнению (28) полагая все ω_i положительными или некоторые положительными, а другие — равными нулю.

Кроме того, нельзя принять, что

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 0,$$

так как при этом получилось бы

$$\Phi(x) = F(x),$$

что противоречит предположению.

Итак, уравнению (28) можно удовлетворить только, считая некоторые ω положительными и некоторые отрицательными.

Положим, например, что

$$\omega_i < 0;$$

тогда из определения величин ω видно, что $\Phi(x_i)$ по численной величине будет превышать $F(x_i)$, т. е. L, и, следовательно, наибольшее отклонение от нуля в пределах от -1 до $+1$ для функции $\Phi(x)$ будет более, чем для $F(x)$, при всяких бесконечно малых приращениях коэффициентов

$$p_2,\ p_3,\ \ldots\ p_n.$$

15. Теперь исследуем совершенно так же функцию, найденную нами в n° 9 и определяющуюся формулой (19).

Эта функция удовлетворяет, как известно, уравнениям

$$F^2(x) - L^2 = \varphi^2(x)(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta),$$

$$F'(x) = \varphi(x)\cdot\rho,$$

где $\varphi(x)$ означает многочлен $(n-2)$-й степени относительно x с действительными и неравными корнями, находящимися в пределах -1 и $+1$, а ρ — функция первой степени, корень которой лежит в пределах 1 и α (коэффициент σ предполагается положительным, следовательно, α больше единицы).

Обозначим в настоящем случае через $\psi(x)$ функцию

$$\varphi(x)(x^2-1)$$

и положим, что

$$\psi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

где

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$$

означают корни $\psi(x)$ по порядку их величин.

Так же, как и в предыдущем случае, мы воспользуемся формулой

$$F(x)=\psi(x)+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{F(x_i)}{\psi'(x_i)}\,\frac{\psi(x)}{x-x_i}.$$

Заметим, что и для рассматриваемой функции $F(x)$ все отношения

$$\frac{F(x_i)}{\psi'(x_i)},$$

соответствующие различным значениям $i=1, 2, 3, \ldots n$, одного знака, потому что у двух дробей

$$\frac{F(x_i)}{\psi'(x_i)},\qquad \frac{F(x_{i+1})}{\psi'(x_{i+1})}$$

числители и знаменатели имеют знаки противоположные.

На основании этого мы докажем так же, как и в предыдущем n°, что при всяких бесконечно малых изменениех коэффициентов

$$p_2,\ p_3,\ \ldots$$

в функции

$$F(x)=x^n-\sigma x^{n-1}+p_2x^{n-2}+p_3x^{n-3}+\ldots$$

наибольшее отклонение функции от нуля в промежутке от -1 до $+1$ возрастает.

16. Наконец, рассмотрим функцию, соответствующую мнимым параметрам α и β.

Эта функция удовлетворяет, как известно, уравнениям

$$F^2(x)-L^2=\varphi^2(x)(x^2-1)[(x-\theta)^2+\varepsilon^2],$$

$$F'(x)=\varphi(x)\rho,$$

где $\varphi(x)$ — полином $(n-2)$-й степени относительно x, все корни которого вещественные и заключаются в пределах от -1 до $+1$; а ρ — функция первой степени, корень которой содержится в пределах от -1 до $+1$ (n° 12).

Пусть опять

$$\psi(x)=\varphi(x)(x^2-1)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

где

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$$

корни уравнения

$$\psi(x)=0,$$

написанные по порядку их величин.

Точно так же, как в предыдущих nn°, мы представим $F(x)$ в виде

$$F(x)=\psi(x)+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{F(x_i)}{\psi'(x_i)}\frac{\psi(x)}{x-x_i}.$$

Рассматривая отношения

$$\frac{F(x_1)}{\psi'(x_1)},\ \frac{F(x_2)}{\psi'(x_2)},\ \ldots\ \frac{F(x_n)}{\psi'(x_n)},$$

мы легко убедимся, что не все они будут иметь один и тот же знак.

Действительно, положим, что корень уравнения

$$\rho=0$$

заключается между пределами* x_λ и $x_{\lambda+1}$. Тогда дроби

$$\frac{F(x_1)}{\psi'(x_1)},\ \frac{F(x_2)}{\psi'(x_2)},\ \ldots\ \frac{F(x_\lambda)}{\psi'(x_\lambda)}$$

будут иметь одинаковые знаки, потому что и числители и знаменатели двух смежных дробей имеют знаки противоположные.

Точно так же и по той же причине дроби

$$\frac{F(x_{\lambda+1})}{\psi'(x_{\lambda+1})},\ \frac{F(x_{\lambda+2})}{\psi'(x_{\lambda+2})},\ \ldots\ \frac{F(x_n)}{\psi'(x_n)}$$

будут иметь одинаковые знаки. Но знак только что написанных дробей будет противоположен знаку предыдущих.

* Весьма легко можно убедиться, что корень уравнения $\rho=0$ не может совпадать ни с одним из корней $x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$.

Действительно, дроби

$$\frac{F(x_\lambda)}{\psi'(x_\lambda)}, \qquad \frac{F(x_{\lambda+1})}{\psi'(x_{\lambda+1})}$$

имеют противоположные знаки, так как числители их равны между собою (n° 12), а знаменатели имеют знаки противоположные.

Дадим теперь коэффициентам

$$p_2, p_3, \ldots p_n$$

в функции

$$F(x) = x^n - \sigma x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + p_3 x^{n-3} + \ldots$$

бесконечно малые приращения и обозначим функцию с измененными коэффициентами через $\Phi(x)$.

Положим, что

$$\begin{aligned} \Phi(x_1) &= F(x_1)(1-\omega_1), \\ \Phi(x_2) &= F(x_2)(1-\omega_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi(x_n) &= F(x_n)(1-\omega_n). \end{aligned}$$

Рассуждая так же, как в n° 14, мы придем к уравнению

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{F(x_i)\,\omega_i}{\psi'(x_i)} = 0. \tag{29}$$

Вместо того, чтобы приписывать коэффициентам

$$p_2, p_3, \ldots p_n$$

произвольные бесконечно малые приращения, мы можем назначить величины

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$$

и потом уже вычислить приращения $p_2, p_3, \ldots p_n$ из формулы

$$\Phi(x) - F(x) = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{F(x_i)\,\omega_i}{\psi'(x_i)} \frac{\psi(x)}{x - x_i}.$$

Для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы величины

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$$

удовлетворяли уравнению (29).

Так как в рассматриваемом случае некоторые из величин

$$\frac{F(x_1)}{\psi'(x_1)},\ \frac{F(x_2)}{\psi'(x_2)},\ \ldots\ \frac{F(x_n)}{\psi'(x_n)}$$

положительные, а другие — отрицательные, то ясно, что уравнение (29) всегда можно удовлетворить положительными значениями

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ \omega_n,$$

лишь бы только численные величины их были надлежащим образом выбраны. Другими словами, изменяя бесконечно малые коэффициенты p_2, p_3, ..., мы можем уменьшить наибольшее отклонение функции $F(x)$ от нуля в пределах от -1 до $+1$, и, следовательно, эта функция не может представлять решения вопроса, поставленного в n° 2.

17. Из предыдущего видно, что решение этого вопроса при $\sigma < n \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}$ получается по формуле (8) n° 4, где α должно быть замещено соответствующею величиною.

Таким образом, если

$$0 < \sigma < n \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n},$$

наша задача решается функцией

$$F(x) = \frac{\left(x - \frac{\sigma}{n} + \sqrt{(x+1)\left(x - 1 - \frac{2\sigma}{n}\right)}\right)^n + \left(x - \frac{\sigma}{n} - \sqrt{(x+1)\left(x - 1 - \frac{2\sigma}{n}\right)}\right)^n}{2^n}.$$

Эта функция принимает вид

$$(-1)^n \frac{\left(1 + \frac{\sigma}{n}\right)^n}{2^{n-1}} \cos n\varphi,$$

если на место x ввести новую переменную φ, где

$$1 + x = 2\left(1 + \frac{\sigma}{n}\right) \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

При $\sigma > n \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}$ вопрос решается формулой (19); модуль же эллиптических функций определяется из уравнения (21).

18. Для приложения предыдущих результатов к алгебре удобнее иметь приближенную величину наибольшего отклонения L, выраженную через σ более просто, нежели само L.

Рассматривая отношение $\frac{L}{\sigma}$, где L заменяется выражением (22), найдем, что это отношение, убывая, стремится к $\frac{1}{2^{n-2}}$ с увеличением σ до бесконечности.

Поэтому мы можем высказать следующую теорему:

Всякая целая функция

$$F(x) = x^n - \sigma x^{n-1} + \ldots$$

в промежутке от -1 *до* $+1$ *непременно превзойдет численно величину* $\frac{\sigma}{2^{n-2}}$.

Предложенная теорема докажется весьма просто при помощи следующего замечания:

Если параметры $p_1, p_2, \ldots p_n$ определены таким образом, что $F(x, p_1, p_2, \ldots p_n)$ заключается в пределах $\pm L$ (т. е. не превосходит по численной величине L), когда x содержится в пределах ± 1, то функции

$$\frac{F(x, p_1, p_2, \ldots p_n) + F(-x, p_1, p_2, \ldots p_n)}{2},$$

$$\frac{F(x, p_1, p_2, \ldots p_n) - F(-x, p_1, p_2, \ldots p_n)}{2}$$

содержатся в тех же пределах.

Допустим теперь, что параметры $p_2, p_3, \ldots p_n$ определены так, что

$$F(x) = x^n - \sigma x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + p_3 x^{n-3} + \ldots$$

наименее отклоняется от нуля в пределах от -1 до $+1$.

Положим, кроме того, что L означает наибольшее отклонение $F(x)$ от нуля в этих пределах. Предыдущее замечание показывает, что функция

$$\frac{F(x) + (-1)^{n-1} F(-x)}{2} = \sigma \left\{ -x^{n-1} + \frac{p_2}{\sigma} x^{n-3} + \ldots \right\}$$

для x-ов, абсолютно меньших единицы, не выходит из пределов $\pm L$.

С другой стороны, эта функция, по теореме Чебышева,* непременно превзойдет $\frac{\sigma}{2^{n-2}}$; следовательно,

$$L > \frac{\sigma}{2^{n-2}}.$$

Пользуясь этим пределом, можно легко доказать теоремы алгебры, аналогичные тем, которые были даны П. Л. Чебышевым.**

* Sur les questions de Minima, p. 25.

** Ibid., p. 26 et suiv.

Задача II

19. *Определить целую функцию $F(x)$ вида*

$$F(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots$$

данной степени n так, чтобы ее наибольшее отклонение от нуля в пределах от $x = -1$ до $x = 1$ было, по возможности, меньше и чтобы, кроме того, при некотором данном значении $x = a$, лежащем вне этих пределов, $F(x)$ обращалась в данную величину A.

Из условий задачи видно, что имеет место одно из неравенств

$$a > 1, \quad a < -1.$$

Можно принять, что удовлетворено первое неравенство. Действительно, если $F(x)$ решает предложенный вопрос в предположении $a > 1$, то $(-1)^n F(-x)$ даст решение того же вопроса, когда вместо a возьмем $-a$ и заменим A через $(-1)^n A$.

Обозначим через L наибольшее отклонение $F(x)$ в пределах от -1 до $+1$ и через

$$x_1, x_2, \dots x_\mu$$

все значения x между пределами -1 и $+1$ (со включением пределов), при которых $F(x)$ обращается в $\pm L$.

В таком случае уравнения

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1^{n-1}\xi_1 + x_1^{n-2}\xi_2 + \dots + \xi_n = F(x_1), \\ x_2^{n-1}\xi_1 + x_2^{n-2}\xi_2 + \dots + \xi_n = F(x_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_\mu^{n-1}\xi_1 + x_\mu^{n-2}\xi_2 + \dots + \xi_n = F(x_\mu), \\ a^{n-1}\xi_1 + a^{n-2}\xi_2 + \dots + \xi_n = 0 \end{cases}$$

не должны удовлетворяться конечными значениями

$$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n,$$

т. е. должны быть несовместными.

Действительно, положим, напротив, что предыдущие уравнения могут быть удовлетворены некоторыми конечными значениями

$$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n.$$

Составим вместо $F(x)$ другую функцию

$$F(x) - (\xi_1 x^{n-1} + \xi_2 x^{n-2} + \dots + \xi_n)\,\omega,$$

где ω означает некоторую произвольно малую положительную величину.

Эта новая функция, при всех величинах x, равных

$$x_1, x_2, \ldots x_\mu,$$

а также и при значениях x, смежных с ними, будет по численной величине меньше L, и, кроме того, она обращается при $x=a$ в A.

Этого же, очевидно, быть не может, если $F(x)$ есть функция, отвечающая на наш вопрос.

Из того, что уравнения (1) должны быть несовместными, выводим что $\mu \geqq n$. С другой стороны, ясно, что все эти величины

$$x_1, x_2, \ldots x_\mu$$

должны быть общими корнями уравнений

$$F^2(x)-L^2=0,$$

$$F'(x)(x^2-1)=0.$$

Из этих уравнений видно, что каждая из величин

$$x_1, x_2, \ldots x_\mu,$$

отличная от ± 1, есть кратный корень уравнения

$$F^2(x)-L^2=0.$$

Из этого следует, что μ не может быть больше $n+1$.

Если бы мы предположили, что $\mu=n+1$, то получили бы вместо $F(x)$ функцию

$$\omega(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x).$$

Эта функция только в том случае может быть решением предложенного вопроса, когда a и A связаны уравнением

$$\omega(a)=A,$$

чего, говоря вообще, не будет.

Следовательно, необходимо положить $\mu=n$; причем, так же, как и в предыдущей задаче, $F(x)$ будет удовлетворять или уравнениям

$$(2) \qquad \begin{cases} F^2(x)-L^2=\varphi^2(x)(x\pm 1)(x-\alpha), \\ F'(x)=n\varphi(x), \end{cases}$$

где $\varphi(x)$ означает полином $(n-1)$-й степени с вещественными и неравными корнями, заключенными в пределах -1 и $+1$, или уравнениям

$$\left\{\begin{aligned} &F^2(x)-L^2=\varphi^2(x)(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta), \\ &F'(x)=\varphi(x)\cdot\rho, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ — полином $(n-2)$-й степени с вещественными и неравными корнями, заключенными в пределах -1 и $+1$, а ρ — целая функция первой степени.

Таким образом, мы снова придем к тем функциям, о которых шла речь в предыдущей задаче.

Функцию, соответствующую мнимым параметрам α и β, можно исключить при помощи рассуждений, подобных тем, которые были приведены в n° 16.

В настоящей задаче параметр α для функции, удовлетворяющей уравнениям (2), и модуль эллиптических функций, через которые выражается $F(x)$, удовлетворяющая уравнениям (3), определятся из уравнения

$$F(a)=A.$$

Задача III

20. *Найти рациональную дробь*

$$y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

у которой степень каждой из функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ не превышает данного числа n, так, чтобы y содержался между пределами -1 и $+1$, когда x содержится между пределами -1 и $+1$, и чтобы наименьшее отклонение y от нуля для x-ов, превышающих по численной величине данную величину $\frac{1}{k}$, где $k<1$, было, по возможности, больше.

Мы сделаем сначала одно замечание для объяснения задачи.

Обозначим через L наименьшее численное значение y (решения задачи) для x-ов, превышающих абсолютно $\frac{1}{k}$. В таком случае эта величина L должна иметь следующее свойство:

Пусть z означает какую-нибудь другую рациональную дробь, удовлетворяющую двум условиям: во-первых, как степень числителя, так и знаменателя не превышает n, и, во-вторых, когда x заключается между пределами -1 и $+1$, z также не превосходит по численной величине единицы.

Тогда неравенству

$$(z)<L,$$

где (z) означает абсолютную величину z, всегда можно удовлетворить некоторым значением x, численная величина которого превосходит $\frac{1}{k}$.

Обратим внимание на то, что если

$$y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

представляет решение нашей задачи, то и функция

$$\pm\frac{\varphi(\pm x)}{\psi(\pm x)}$$

при всякой комбинации знаков (у x в числителе и знаменателе берется один и тот же знак), очевидно, представит также решение нашей задачи.

Кроме того, легко видеть, что функция

$$\pm\frac{1}{\lambda}\frac{\psi\left(\pm\frac{1}{kx}\right)}{\varphi\left(\pm\frac{1}{kx}\right)},$$

где $\frac{1}{\lambda}$ означает наименьшее отклонение дроби $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ от нуля для x-ов, превышающих абсолютно $\frac{1}{k}$, также представляет решение той же задачи.

Действительно, при значениях x, меньших по численной величине единицы, дробь

$$\frac{\psi\left(\pm\frac{1}{kx}\right)}{\varphi\left(\pm\frac{1}{kx}\right)},$$

у которой числитель и знаменатель после приведения будут степеней не выше n, будет по численной величине не больше λ. Это следует из того, что дробь

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

при значениях x, численно превышающих $\frac{1}{k}$, не меньше $\frac{1}{\lambda}$. Следовательно, дробь

$$\pm\frac{1}{\lambda}\frac{\psi\left(\pm\frac{1}{kx}\right)}{\varphi\left(\pm\frac{1}{kx}\right)}$$

не превзойдет в тех же пределах единицы.

Далее, при x, превышающих численно $\frac{1}{k}$, дробь

$$\pm\frac{1}{\lambda}\frac{\psi\left(\pm\frac{1}{kx}\right)}{\varphi\left(\pm\frac{1}{kx}\right)}$$

будет не меньше $\frac{1}{\lambda}$ по численной величине.

Сделаем еще следующее замечание: степень числителя $\varphi(x)$ искомой функции y должна быть равна числу n.

Действительно, предположив обратное, т. е. что степень $\varphi(x)$ меньше n, рассмотрим функцию

$$yx=\frac{\varphi(x)\cdot x}{\psi(x)},$$

у которой и числитель и знаменатель степени не выше n.

Кроме того, очевидно, что при x, заключенном в пределах -1 и $+1$, она, так же, как и функция y, не превосходит по численной величине единицы.

При x, больших по численной величине $\frac{1}{k}$, неравенство

$$\left[\frac{\varphi(x)\cdot x}{\psi(x)}\right]<L$$

не может быть удовлетворено, если L означает наименьшее отклонение дроби $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ от нуля для $[x]\geqq\frac{1}{k}$.

Итак, предположение, что степень $\varphi(x)$ меньше n, приводит к противоречию.

21. Мы увидим ниже, что числитель и знаменатель искомой функции y, которую мы будем еще обозначать через $F(x)$, удовлетворяют некоторым неопределенным уравнениям 2-й степени.

Но прежде чем составить эти уравнения, нам придется доказать некоторые свойства $F(x)$.

Обозначим через

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_\mu$$

значения x, содержащиеся в пределах -1 и $+1$ (со включением пределов), при которых $F(x)$ обращается в ± 1, и через

$$x_1',\ x_2',\ \ldots\ x_\nu'$$

все конечные значения x, численные величины которых не меньше $\frac{1}{k}$

и при которых $F(x)$ имеет численно наименьшее значение. Это наименьшее значение мы обозначили выше через $\frac{1}{\lambda}$.

Допустим сначала, что $F(x)$ не обращается в $\pm\frac{1}{\lambda}$ при $x=\pm\infty$. Полагая теперь

$$F(x)=\frac{x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n}{q_0x^n+q_1x^{n-1}+q_2q^{n-2}+\ldots+q_n},$$

мы докажем, что уравнения

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{dF(x_1)}{dp_1}\xi_1+\frac{dF(x_2)}{dp_1}\xi_2+\ldots+\frac{dF(x_\mu)}{dp_1}\xi_\mu+\frac{dF(x_1')}{dp_1}\xi_{\mu+1}+\ldots+\frac{dF(x_\nu')}{dp_1}\xi_{\mu+\nu}=0,\\
&\frac{dF(x_1)}{dp_2}\xi_1+\frac{dF(x_2)}{dp_2}\xi_2+\ldots+\frac{dF(x_\mu)}{dp_2}\xi_\mu+\frac{dF(x_1')}{dp_2}\xi_{\mu+1}+\ldots+\frac{dF(x_\nu')}{dp_2}\xi_{\mu+\nu}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dF(x_1)}{dq_0}\xi_1+\frac{dF(x_2)}{dq_0}\xi_2+\ldots+\frac{dF(x_\mu)}{dq_0}\xi_\mu+\frac{dF(x_1')}{dq_0}\xi_{\mu+1}+\ldots+\frac{dF(x_\nu')}{dq_0}\xi_{\mu+\nu}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dF(x_1)}{dq_n}\xi_1+\frac{dF(x_2)}{dq_n}\xi_2+\ldots+\frac{dF(x_\mu)}{dq_n}\xi_\mu+\frac{dF(x_1')}{dq_n}\xi_{\mu+1}+\ldots+\frac{dF(x_\nu')}{dq_n}\xi_{\mu+\nu}=0
\end{aligned}\right.$$

должны иметь решения, кроме очевидного

$$\xi_1=0,\quad \xi_2=0,\ \ldots\ \xi_{\mu+\nu}=0.$$

Действительно, предположив обратное, мы заключаем, что уравнениям

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{dF(x_1)}{dp_1}\mu_1+\frac{dF(x_1)}{dp_2}\mu_2+\ldots+\frac{dF(x_1)}{dp_n}\mu_n+\frac{dF(x_1)}{dq_0}\mu_{n+1}+\ldots+\frac{dF(x_1)}{dq_n}\mu_{2n+1}=F(x_1),\\
&\frac{dF(x_2)}{dp_1}\mu_1+\frac{dF(x_2)}{dp_2}\mu_2+\ldots+\frac{dF(x_2)}{dp_n}\mu_n+\frac{dF(x_2)}{dq_0}\mu_{n+1}+\ldots+\frac{dF(x_2)}{dq_n}\mu_{2n+1}=F(x_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dF(x_\mu)}{dp_1}\mu_1+\frac{dF(x_\mu)}{dp_2}\mu_2+\ldots+\frac{dF(x_\mu)}{dp_n}\mu_n+\frac{dF(x_\mu)}{dq_0}\mu_{n+1}+\ldots+\frac{dF(x_\mu)}{dq_n}\mu_{2n+1}=F(x_\mu),\\
&\frac{dF(x_2')}{dp_1}\mu_1+\frac{dF(x_1')}{dp_2}\mu_2+\ldots+\frac{dF(x_1')}{dp_n}\mu_n+\frac{dF(x_1')}{dq_0}\mu_{n+1}+\ldots+\frac{dF(x_1')}{dq_n}\mu_{2n+1}=-F(x_1'),\\
&\frac{dF(x_3')}{dp_1}\mu_1+\frac{dF(x_2')}{dp_2}\mu_2+\ldots+\frac{dF(x_2')}{dp_n}\mu_n+\frac{dF(x_2')}{dq_0}\mu_{n+1}+\ldots+\frac{dF(x_2')}{dq_n}\mu_{2n+1}=-F(x_2'),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dF(x_\nu')}{dp_1}\mu_1+\frac{dF(x_\nu')}{dp_2}\mu_2+\ldots+\frac{dF(x_\nu')}{dp_n}\mu_n+\frac{dF(x_\nu')}{dq_0}\mu_{n+1}+\ldots+\frac{dF(x_\nu')}{dq_n}\mu_{2n+1}=-F(x_\nu')
\end{aligned}\right.$$

можно удовлетворить конечными величинами

$$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{2n+1}.$$

Сообщим теперь коэффициентам

$$p_1, p_2, \ldots p_n, q_0, q_1, \ldots q_n$$

функции $F(x)$ соответственно приращения

$$-\mu_1\omega, -\mu_2\omega, \ldots -\mu_n\omega, \ldots -\mu_{n+1}\omega, \ldots, -\mu_{2n+1}\omega,$$

где ω — бесконечно малое положительное количество.

При этом значения $F(x)$, соответствующие

$$x = x_1, x_2, \ldots x_\mu, x_1', x_2', \ldots x_\nu',$$

получат некоторые приращения, которые мы можем, принимая во внимание уравнение (2), представить в следующем виде:

$$-F(x_1)\omega + \Omega_1, -F(x_2)\omega + \Omega_2, \ldots -F(x_\mu)\omega + \Omega_\mu,$$
$$F(x_1')\omega + \Omega_1', \quad F(x_2')\omega + \Omega_2', \ldots \quad F(x_\nu')\omega + \Omega_\nu',$$

где

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_\mu,$$
$$\Omega_1', \Omega_2', \ldots \Omega_\nu'$$

суть бесконечно малые высших порядков относительно ω.

Из этого следует, что при величинах

$$x_1, x_2, \ldots x_\mu$$

и при значениях, смежных с ними, численные величины $F(x)$ уменьшаются от изменения коэффициентов указанным выше образом; а при величинах

$$x_1', x_2', \ldots x_\nu'$$

и при величинах, смежных с ними, численные величины $F(x)$ увеличиваются от тех же изменений коэффициентов. Это же следствие противоречит тому предположению, что $F(x)$ есть решение вопроса, поставленного в предыдущем n°.

Поэтому уравнения (1) должны удовлетворяться другими величинами, кроме

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \ldots \xi_{\mu+\nu} = 0.$$

Это замечание позволит нам определить, больше чего должно быть число $\mu + \nu$.

Действительно, раскрывая уравнения (1) и замечая, что

$$\frac{dF(x)}{dp_\lambda}=\frac{x^{n-\lambda}}{\psi(x)}, \qquad \frac{dF(x)}{dq_\lambda}=-\frac{\varphi(x)\cdot x^{n-\lambda}}{\psi^2(x)},$$

получим

$$\frac{x_1^{n-1}}{\psi(x_1)}\xi_1+\frac{x_2^{n-1}}{\psi(x_2)}\xi_2+\ldots+\frac{x_\mu^{n-1}}{\psi(x_\mu)}\xi_\mu+\frac{x_1'^{n-1}}{\psi(x_1')}\xi_{\mu+1}+\ldots+\frac{x_\nu'^{n-1}}{\psi(x_\nu')}\xi_{\mu+\nu}=0,$$

$$\frac{x_1^{n-2}}{\psi(x_1)}\xi_1+\frac{x_2^{n-2}}{\psi(x_2)}\xi_2+\ldots+\frac{x_\mu^{n-2}}{\psi(x_\mu)}\xi_\mu+\frac{x_1'^{n-2}}{\psi(x_1')}\xi_{\mu+1}+\ldots+\frac{x_\nu'^{n-2}}{\psi(x_\nu')}\xi_{\mu+\nu}=0,$$

. . . .

$$\frac{\xi_1}{\psi(x_1)}+\frac{\xi_2}{\psi(x_2)}+\ldots+\frac{\xi_\mu}{\psi(x_\mu)}+\frac{\xi_{\mu+1}}{\psi(x_1')}+\ldots+\frac{\xi_{\mu+\nu}}{\psi(x_\nu')}=0,$$

$$-\frac{\varphi(x_1)x_1^n}{\psi^2(x_1)}\xi_1-\frac{\varphi(x_2)x_2^n}{\psi^2(x_2)}\xi_2-\ldots-\frac{\varphi(x_\mu)x_\mu^n}{\psi^2(x_\mu)}\xi_\mu-\frac{\varphi(x_1')x_1'^n}{\psi_2(x_1')}\xi_{\mu+1}-\ldots-\frac{\varphi(x_\nu')x_\nu'^n}{\psi^2(x_\nu')}\xi_{\mu+\nu}=0,$$

. . . .

$$-\frac{\varphi(x_1)}{\psi^2(x_1)}\xi_1-\frac{\varphi(x_2)}{\psi^2(x_2)}\xi_2-\ldots-\frac{\varphi(x_\mu)}{\psi^2(x_\mu)}\xi_\mu-\frac{\varphi(x_1')}{\psi^2(x_1')}\xi_{\mu+1}-\ldots-\frac{\varphi(x_\nu')}{\psi^2(x_\nu')}\xi_{\mu+\nu}=0.$$

Мы сложим теперь первые части этих уравнений, предварительно умножив их соответственно на

$$B_1,\ B_2,\ \ldots\ B_n,\qquad C_0,\ C_1,\ \ldots\ C_n.$$

Положив для сокращения

$$\begin{aligned} M&=B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\ldots+B_n,\\ N&=C_0x^n+C_1x^{n-1}+\ldots C_n,\\ \Phi(x)&=M\psi(x)-N\varphi(x),\end{aligned}$$

будем иметь

$$(3)\qquad \frac{\Phi(x_1)}{\psi^2(x_1)}\xi_1+\frac{\Phi(x_2)}{\psi^2(x_2)}\xi_2+\ldots+\frac{\Phi(x_\mu)}{\psi^2(x_\mu)}\xi_\mu+\frac{\Phi(x_1')}{\psi^2(x_1')}\xi_{\mu+1}+\ldots+\frac{\Phi(x_\nu')}{\psi^2(x_\nu')}\xi_{\mu+\nu}=0.$$

Очевидно, что $\Phi(x)$ есть целая функция степени $2n$. Кроме того, так как функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не имеют общих делителей, M и N можно подобрать так, что $\Phi(x)$ выйдет произвольною целою функциею степени $2n$. Теперь уже нетрудно доказать, что $\mu+\nu>2n+1$.

Действительно, положим, что

$$\mu+\nu\leq 2n+1.$$

В таком случае, из уравнения (3) будет следовать, что все

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_{\mu+\nu}$$

равны нулю.

В самом деле, чтобы доказать, например, что

$$\xi_1 = 0,$$

определим коэффициенты

$$B_1,\ B_2,\ \ldots\ B_n,\ \ldots\ C_0,\ C_1,\ \ldots\ C_n$$

так, чтобы

$$\Phi(x_1) = \psi^{2}(x_1),\ \Phi(x_2) = 0,\ \ldots\ \Phi(x_\mu) = 0,$$
$$\Phi(x_1') = 0,\qquad \Phi(x_2') = 0,\ \ldots\ \Phi(x_\nu') = 0.$$

Такое определение всегда возможно, так как $\Phi(x)$ означает произвольную функцию степени $2n$.

Но при только что сделанных предположениях уравнение (3) обращается в такое:

$$\xi_1 = 0.$$

Таким же образом докажем, что

$$\xi_2 = 0,\ \xi_3 = 0,\ \ldots\ \xi_{\mu+\nu} = 0.$$

В этих же равенствах заключается противоречие с тем, что было доказано раньше, и потому $\mu+\nu$ не может не превышать $2n+1$.

22. В этом n° мы рассмотрим тот случай, когда $F(x)$ обращается в $\mp\frac{1}{\lambda}$ при $x = \mp\infty$. В этом случае числитель и знаменатель $F(x)$ должны быть одинаковой степени; следовательно, тот и другой должны быть целыми функциями n-й степени (n° 20).

Вместо уравнений (1) предыдущего n° мы рассмотрим следующие:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}
\frac{dF(x_1)}{dp_1}\xi_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_1}\xi_2 + \ldots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_1}\xi_\mu + \frac{dF(x_1')}{dp_1}\xi_{\mu+1} + \ldots + \frac{dF(x_\nu')}{dp_1}\xi_{\mu+\nu} = 0,\\
\frac{dF(x_1)}{dp_2}\xi_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_2}\xi_2 + \ldots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_2}\xi_\mu + \frac{dF(x_1')}{dp_2}\xi_{\mu+1} + \ldots + \frac{dF(x_\nu')}{dp_2}\xi_{\mu+\nu} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dF(x_1)}{dp_n}\xi_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_n}\xi_2 + \ldots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_n}\xi_\mu + \frac{dF(x_1')}{dp_n}\xi_{\mu+1} + \ldots + \frac{dF(x_\nu')}{dp_n}\xi_{\mu+\nu} = 0,\\
\frac{dF(x_1)}{dq_1}\xi_1 + \frac{dF(x_2)}{dq_1}\xi_2 + \ldots + \frac{dF(x_\mu)}{dq_1}\xi_\mu + \frac{dF(x_1')}{dq_1}\xi_{\mu+1} + \ldots + \frac{dF(x_\nu')}{dq_1}\xi_{\mu+\nu} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dF(x_1)}{dq_n}\xi_1 + \frac{dF(x_2)}{dq_n}\xi_2 + \ldots + \frac{dF(x_\mu)}{dq_n}\xi_\mu + \frac{dF(x_1')}{dq_n}\xi_{\mu+1} + \ldots + \frac{dF(x_\nu')}{dq_n}\xi_{\mu+\nu} = 0.
\end{array}\right.$$

Эти уравнения отличаются от уравнений (1) предыдущего n° тем, что выпущено одно уравнение, в которое входят производные $F(x)$ по q_0.

Мы теперь докажем, что уравнения (1) должны иметь решение, отличное от очевидного

$$\xi_1=0,\ \xi_2=0,\ \ldots\ \xi_{\mu+\nu}=0.$$

Действительно, предположив обратное, мы заключаем, что уравнениям

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dF(x_1)}{dp_1}\mu_1+\dfrac{dF(x_1)}{dp_2}\mu_2+\ldots+\dfrac{dF(x_1)}{dp_n}\mu_n+\dfrac{dF(x_1)}{dq_1}\mu_{n+1}+\ldots+\dfrac{dF(x_1)}{dq_n}\mu_{2n}=F(x_1),\\ \dfrac{dF(x_2)}{dp_1}\mu_1+\dfrac{dF(x_2)}{dp_2}\mu_2+\ldots+\dfrac{dF(x_2)}{dp_n}\mu_n+\dfrac{dF(x_2)}{dq_1}\mu_{\mu+1}+\ldots+\dfrac{dF(x_2)}{dq_n}\mu_{2n}=F(x_2),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{dF(x_\mu)}{dp_1}\mu_1+\dfrac{dF(x_\mu)}{dp_2}\mu_2+\ldots+\dfrac{dF(x_\mu)}{dp_n}\mu_n+\dfrac{dF(x_\mu)}{dq_1}\mu_{n+1}+\ldots+\dfrac{dF(x_\mu)}{dq_n}\mu_{2n}=F(x_\mu),\\ \dfrac{dF(x_1')}{dp_1}\mu_1+\dfrac{dF(x_1')}{dp_2}\mu_2+\ldots+\dfrac{dF(x_1')}{dp_n}\mu_n+\dfrac{dF(x_1')}{dq_1}\mu_{n+1}+\ldots+\dfrac{dF(x_1')}{dq_n}\mu_{2n}=-F(x_1'),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{dF(x_\nu')}{dp_1}\mu_1+\dfrac{dF(x_\nu')}{dp_2}\mu_2+\ldots+\dfrac{dF(x_\nu')}{dp_n}\mu_n+\dfrac{dF(x_\nu')}{dq_1}\mu_{n+1}+\ldots+\dfrac{dF(x_\nu')}{dq_n}\mu_{2n}=-F(x_\nu') \end{cases}$$

можно удовлетворить конечными величинами

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots\ \mu_{2n}.$$

Сообщим теперь коэффициентам функции $F(x)$

$$p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_n,\ q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_n$$

соответственно приращения

$$-\mu_1\,\omega,\ -\mu_2\,\omega,\ \ldots\ -\mu_n\,\omega,\ -\mu_{n+1}\,\omega_1,\ \ldots\ -\mu_{2n}\,\omega,$$

где ω — бесконечно малое положительное количество.

При этом значения $F(x)$, соответствующие

$$x=x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_\mu,\ x_1',\ x_2',\ \ldots\ x_\nu',$$

получат некоторые приращения, которые, принимая во внимание уравнения (2) этого n°, мы можем представить в виде

$$-F(x_1)\,\omega+\Omega_1,\ -F(x_2)\,\omega+\Omega_2,\ \ldots\ -F(x_\mu)\,\omega+\Omega_\mu,$$
$$F(x_1')\,\omega+\Omega_1',\ F(x_2')\,\omega+\Omega_2',\ \ldots\ F(x_\nu)\,\omega+\Omega_\nu',$$

где

$$\Omega_1,\ \Omega_2,\ \ldots\ \Omega_\mu,$$
$$\Omega_1',\ \Omega_2',\ \ldots\ \Omega'_\nu,$$

означают бесконечно малые высших порядков относительно ω.

Из этого следует, что при величинах

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_\mu$$

и при значениях, смежных с ними, численные значения $F(x)$ уменьшаются от изменения коэффициентов указанным выше способом; а при величинах

$$x_1',\ x_2',\ \ldots\ x_\nu'$$

численные значения $F(x)$ увеличиваются от тех же изменений коэффициентов.

Кроме того, так как коэффициент q_0 остался неизменным, при $x=\pm\infty$ измененная функция, точно так же, как F начальная, обратится в $\mp\frac{1}{\lambda}$.

Пусть $1-\varepsilon$ будет наибольшее отклонение от нуля в пределах ± 1 для измененной функции, которую мы обозначим через $F_1(x)$.

Рассмотрим теперь функцию

$$\frac{F_1(x)}{1-\varepsilon'},$$

где ε' — какая-нибудь бесконечно малая положительная величина, меньшая ε. Наибольшее отклонение от нуля этой функции в пределах ± 1 будет меньше единицы, а минимум ее при значениях x, превышающих по численной величине $\frac{1}{k}$, будет больше, чем у $F(x)$. Это же противоречит тому, что $F(x)$ есть решение вопроса, поставленного в n° 20.

Из этого мы заключаем, что уравнения (1) этого n° должны удовлетворяться другими величинами, кроме

$$\xi_1=0,\ \xi_2=0,\ \ldots\ \xi_{\mu+\nu}=0.$$

Раскрывая эти уравнения, мы докажем, что $\mu+\nu>2n$. Доказательство совершенно одинаково с изложенным в n° 21, а потому мы здесь его не приводим.

23. Обратимся теперь к выводу тех неопределенных уравнений которым удовлетворяют числитель и знаменатель функции

$$y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots}{q_0x^n+q_1x^{n-1}+q_2x^{n-2}+\ldots}.$$

Рассмотрим с этой целью две функции:

$$\psi^2(x)-\varphi^2(x),\qquad \psi^2(x)-\lambda^2\varphi^2(x).$$

Первая из них обращается в нуль при

$$x=x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_\mu.$$

Кроме того, эти величины

$$(\alpha) \qquad x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_\mu$$

[за исключением ∓ 1, если одна из них или обе находятся в ряду величин (α)] должны быть кратными корнями уравнения

$$\psi^2(x) - \varphi^2(x) = 0.$$

Действительно, левая часть этого уравнения, обращаясь в нуль при каждой из этих величин, остается больше нуля при величинах, с ними смежных.

Замечая далее, что разность

$$\psi^2(x) - \varphi^2(x)$$

есть целая функция степени не выше $2n$, мы заключаем, что величин

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_\mu$$

не должно быть больше $n+1$, если даже в число их включить оба предела: $+1$ и -1.

Рассмотрим теперь функцию

$$\psi^2(x) - \lambda^2\varphi^2(x),$$

которая обращается в нуль при следующих значениях x:

$$(\beta) \qquad x = x_1',\ x_2',\ \ldots\ x_\nu'.$$

Кроме того, если выключить из ряда этих величин две величины $\mp\frac{1}{k}$, из которых каждая может находиться между величинами (β), то оставшиеся величины будут кратными корнями уравнения

$$\psi^2(x) - \lambda^2\varphi^2(x) = 0,$$

так как левая часть его, обращаясь в нуль при каждом из рассматриваемых значений x, остается меньше нуля при значениях x, смежных с ними.

Теперь разберем отдельно два случая:

I) Искомая функция y не обращается в $\pm\frac{1}{\lambda}$, когда $x = \pm\infty$. В этом случае разность

$$\psi^2(x) - \lambda^2\varphi^2(x)$$

будет степени $2n$. Поэтому величин

$$x_1',\ x_2',\ \ldots\ x_\nu'$$

не должно быть более $n+1$, если даже в число их включить оба предела $\frac{1}{k}$ и $-\frac{1}{k}$; следовательно, в этом случае сумма $\mu+\nu$ не должна превышать $2n+2$. С другой стороны, нам известно (n° 21), что в томже случае сумма чисел $\mu+\nu$ должна быть не меньше $2n+2$; следовательно, $\mu+\nu=2n+2$.

Это же равенство, по замеченному выше относительно чисел μ и ν влечет за собою два другие:

$$\mu=n+1, \quad \nu=n+1,$$

которые, в свою очередь, могут иметь место только в предположении, что числитель и знаменатель искомой функции y удовлетворяют следующим уравнениям:

$$1) \qquad \begin{cases} \psi^2(x)-\varphi^2(x)=(1-x^2)\,U^2, \\ \psi^2(x)-\lambda^2\varphi^2(x)=(1-k^2x^2)\,V^2, \end{cases}$$

где U означает многочлен $(n-1)$-й степени, обращающийся в нуль при $n-1$ различных значениях x, содержащихся между -1 и $+1$, а V — полином $(n-1)$-й степени с действительными корнями, численные величины которых превосходят $\frac{1}{k}$.

II) Искомая функция y обращается в $\pm\frac{1}{\lambda}$, когда $x=\pm\infty$. В этом случае разность

$$\psi^2(x)-\lambda^2\varphi^2(x)$$

степени не выше $2n-1$; поэтому величин

$$x_1',\ x_2',\ \ldots\ x_\nu'$$

не должно быть более n, если даже в число их включить оба предела $\frac{1}{k}$ и $-\frac{1}{k}$. Отсюда видно, что в этом случае сумма чисел $\mu+\nu$ не должна превышать $2n+1$, так как μ не больше $n+1$.

С другой стороны, нам известно, что $\mu+\nu$ больше $2n$ (n° 22); следовательно,

$$\mu+\nu=2n+1.$$

Это же равенство влечет за собою, по замеченному выше, два другие:

$$\mu=n+1, \qquad \nu=n.$$

В свою очередь, эти равенства могут иметь место только в предположении, что числитель и знаменатель искомой функции удовлетворяют или уравнениям

$$(2)\qquad \begin{cases} \psi^2(x)-\varphi^2(x)=(1-x^2)\,U^2, \\ \psi^2(x)-\lambda^2\varphi^2(x)=(1-k^2x^2)\,V^2, \end{cases}$$

где U означает полином $(n-1)$-й степени с вещественными и не равными корнями, заключающимися в пределах от -1 до $+1$, а V — полином $(n-2)$-й степени также с вещественными и не равными корнями, превышающими по численной величине $\frac{1}{k}$, или уравнениям

$$(3)\qquad \begin{cases} \psi^2(x)-\varphi^2(x)=(1-x^2)\,U^2, \\ \psi^2(x)-\lambda^2\varphi^2(x)=(1\pm kx)\,V^2, \end{cases}$$

где U имеет прежнее значение, а V означает многочлен $(n-1)$-й степени с вещественными и не равными корнями, превосходящими по численной величине $\frac{1}{k}$.

При решении нашего вопроса, уравнения (3) должны быть исключены, так как из них выходит, что отношение $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ будет по численной величине меньше $\frac{1}{\lambda}$ для некоторых значений x, превышающих численно $\frac{1}{k}$.

24. В предыдущем n° было доказано, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$\psi^2(x)-\varphi^2(x)=(1-x^2)\,U^2,$$

$$\psi^2(x)-\lambda^2\varphi^2(x)=(1-k^2x^2)\,V^2,$$

де U и V имеют указанные выше значения.

Из этих уравнений следует, как известно, что

$$y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

есть интеграл дифференциального уравнения

$$(1)\qquad \frac{M\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}=\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

где M — постоянная величина, которую можно считать положительною.

Другими словами, наша задача имеет прямое соотношение с преобразованием эллиптических функций.

Докажем теперь, что функция y будет или вида

$$y=\frac{x\,(x^{2m}+a_1\,x^{2m-2}+\ldots+a_m)}{b_0\,x^{2m}+b_1\,x^{2m-2}+\ldots+b_m}, \tag{2}$$

т. е. нечетною функциею x, или вида

$$y=\frac{x^{2m}+a_1\,x^{2m-2}+\ldots+a_m}{b_0\,x^{2m}+b_1\,x^{2m-2}+\ldots+b_m}, \tag{3}$$

т. е. четною функциею x.

Действительно, положим, что от перемены x на $-x$ y переменяется на z.

При этом, как показывает уравнение (1) этого n°, должно иметь место уравнение

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\lambda^2 z^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}}=0. \tag{4}$$

Полагая

$$y=\operatorname{sn}(v,\lambda),$$

мы заключаем по уравнению (4), что

$$z=\operatorname{sn}(\alpha-v,\lambda),$$

где α — постоянная величина.

Применяя к этому выражению z известную формулу, получаем

$$z=\frac{\operatorname{sn}\alpha\cdot\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}-\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\cdot y}{1-\lambda^2\operatorname{sn}^2\alpha\cdot y^2}.$$

Принимая во внимание, что z есть рациональная функция x, и $\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}$, как показывает уравнение (1), равен рациональной функции x, умноженной на $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$, мы заключаем, что $\operatorname{sn}\alpha$ должен быть равен нулю; следовательно,

$$z=\pm y.$$

Из этого видно, что числитель и знаменатель y должны быть или оба четными функциями x, или один — четною функциею, а другой — нечетною (оба нечетными функциями быть не могут, потому что дробь в таком случае была бы сократима).

Замечая, что при решении нашей задачи в знаменателе не может получиться нечетная функция x, так как дробь с таким знаменателем обращается в бесконечность при $x=0$, что противоречит условию задачи, мы заключаем, что y должен быть или вида (2), или вида (3).

25. Найдем теперь выражение y через эллиптические функции.

По замеченному выше, все $n-1$ корней полинома U (n° 23) — вещественные, не равные и содержатся между -1 и $+1$.

Обозначим через

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_{n-1}$$

эти корни, взятые в возрастающем порядке.

По первому из уравнений

$$\psi^2(x)-\varphi^2(x)=(1-x^2)U^2,$$
$$\psi^2(x)-\lambda^2\varphi^2(x)=(1-k^2x^2)V^2$$

выходит, что y обращается в ± 1, когда

$$x=-1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_{n-1},\ 1.$$

Далее, так как те же уравнения не изменяются от перемены $\varphi(x)$ в $-\varphi(x)$, то всегда можно y выбрать таким, что при $x=-1$ будет $y=-1$.

Условившись в этом, проинтегрируем обе части уравнения

$$\frac{M\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}=\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

в пределах от $x=-1$ до $x=1$.

Принимая радикал

$$\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

с положительным знаком, получим

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=2K,$$

где K обозначает полный эллиптический аргумент.

Легко видеть, что, когда x идет от -1 до α_1, y увеличивается от -1 до $+1$, $\frac{dy}{dx}$ больше нуля, и, следовательно [ур-ние. (1) n° 24],

$$\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}$$

положительный. Когда же x идет от α_1 до α_2, y уменьшается от -1 до $+1$, $\frac{dy}{dx}$ меньше нуля, и, следовательно,

$$\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}$$

[ур-ние (1) n° 24] будет иметь для этих значений x отрицательное значение и т. д.

Поэтому

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}},$$

взятый от $x=-1$ до $x=+1$ (y — функция x), равен

$$2n\Lambda,$$

если через Λ обозначить интеграл

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}}.$$

Напишем теперь уравнение (1) n° 24 еще в таком виде:

$$\frac{M dy}{\sqrt{(y^2-1)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2 x^2)}}.$$

Проинтегрируем теперь обе части этого уравнения в пределах от $x=1$ до $x=\frac{1}{k}$.

Замечая, что между этими пределами для x y не обращается ни в нуль, ни в бесконечность, как показывают уравнения, которым удовлетворяют функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, мы видим из тех же уравнений, что если, при $x=1$, $y=+1$, то, при $x=\frac{1}{k}$, $y=\frac{1}{\lambda}$, если же, при $x=1$, $y=-1$ то, при $x=\frac{1}{k}$, $y=-\frac{1}{\lambda}$.

Принимая радикал

$$\sqrt{(x^2-1)(1-k^2 x^2)}$$

с положительным знаком, получим

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2 x^2)}} = K',$$

где K' означает полный эллиптический аргумент для дополнительного модуля.

Обозначая через Λ' полный аргумент для модуля $\sqrt{1-\lambda^2}$, по замеченному выше относительно пределов для y, имеем

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1-\lambda^2 y^2)}} = \Lambda';$$

следовательно,

$$M\Lambda' = K'.$$

Из уравнений

$$nM\Lambda = K,$$
$$M\Lambda' = K'$$

следует, что y есть то преобразование эллиптических функций, которое соответствует делению первого периода на целое число n.

Основываясь на этом, мы выпишем формулы для выражения y отдельно для нечетного n и для четного.

I случай — n — нечетное число.

При этом

$$y = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2\frac{4K}{n}}\right)\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2\frac{8K}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2\frac{2(n-1)K}{n}}\right)}{M\left(1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{4K}{n}x^2\right)\left(1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{8K}{n}x^2\right)\cdots\left(1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{2(n-1)K}{n}x^2\right)},$$

$$\lambda = k^n\left(\operatorname{snc}\frac{4K}{n}\operatorname{snc}\frac{8K}{n}\cdots\operatorname{snc}\frac{2(n-1)K}{n}\right)^4,$$

$$M = \left(\frac{\operatorname{snc}\frac{4K}{n}\operatorname{snc}\frac{8K}{n}\cdots\operatorname{snc}\frac{2(n-1)K}{n}}{\operatorname{sn}\frac{4K}{n}\operatorname{sn}\frac{8K}{n}\cdots\operatorname{sn}\frac{2(n-1)K}{n}}\right)^2.$$

Основываясь на вышеприведенном выражении λ, мы можем высказать следующее предложение:

Если z означает некоторую рациональную функцию x, числитель и знаменатель которой степеней не выше n, где n — нечетное число, и которая по численной величине не превосходит единицы для значений x, заключенных между -1 и $+1$, то при некоторых значениях x (вообще говоря, при бесчисленном множестве значений), превышающих абсолютно $\frac{1}{k}$, численная величина z будет не больше

$$\frac{1}{k^n\left(\operatorname{snc}\frac{4K}{n}\operatorname{snc}\frac{8K}{n}\cdots\operatorname{snc}\frac{2(n-1)K}{n}\right)^4}.$$

II случай — n — четное число.

В этом предположении имеем

$$y = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2\frac{K}{n}}\right)\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2\frac{3K}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2\frac{(n-1)K}{n}}\right)}{\left(1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{K}{n}x^2\right)\left(1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{3K}{n}x^2\right)\cdots\left(1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{(n-1)K}{n}x^2\right)},$$

$$\lambda = k^n\left(\operatorname{sn}\frac{K}{n}\operatorname{sn}\frac{3K}{n}\cdots\operatorname{sn}\frac{(n-1)K}{n}\right)^4.$$

Для настоящего случая мы имеем следующее предложение:

Если z означает некоторую рациональную функцию x, числитель и знаменатель которой степени не выше n, где n — четное число, и которая по численной величине не превосходит единицы для значений x, заключенных между -1 и $+1$ то при некоторых значениях x (вообще говоря, при бесчисленном множестве значений), превосходящих абсолютно $\frac{1}{k}$, численная величина z будет не больше

$$\frac{1}{k^n\left(\operatorname{sn}\frac{K}{n}\operatorname{sn}\frac{3K}{n}\ldots\operatorname{sn}\frac{(n-1)K}{n}\right)^4}.$$

Примечание. После весьма простых преобразований имеем для нечетного n

$$\frac{1}{k^n\left(\operatorname{snc}\frac{4K}{n}\operatorname{snc}\frac{8K}{n}\ldots\operatorname{snc}\frac{2(n-1)K}{n}\right)^4}=\frac{1}{k^n\left(\operatorname{sn}\frac{K}{n}\operatorname{sn}\frac{3K}{n}\ldots\operatorname{sn}\frac{(n-2)K}{n}\right)^4}.$$

Поэтому обе теоремы этого n° мы можем соединить в одну:

Теорема. *Численная величина всякой рациональной дроби, числитель и знаменатель которой степеней не выше n и которая не превосходит единицы, когда x содержится между -1 и $+1$, не будет превосходить, по крайней мере для некоторых значений x, больших численно $\frac{1}{k}$, предела*

$$\frac{1}{k^n\left(\operatorname{sn}\frac{K}{n}\operatorname{sn}\frac{3K}{n}\ldots\operatorname{sn}\frac{\mu K}{n}\right)^4},$$

где μ равно $n-2$ или $n-1$, смотря по тому, будет ли n нечетным или четным.

Задача IV

26. *Найти несократимую рациональную дробь*

$$y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

у которой одна из целых функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ будет степени n, а другая — степени не выше n, так, чтобы, во-первых, при значениях x, заключающихся между 1 и $\frac{1}{k}$, где k — некоторое данное количество, меньшее единицы, y превосходил единицу, а при значениях, заключенных между -1 и $-\frac{1}{k}$, y был меньше -1, во-вторых, чтобы наибольшее отклонение от нуля этой дроби, когда x содержится в тех же пределах, было, по возможности, меньше.

Положим, что

$$y = F(x) = \frac{p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n}{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + q_2 x^{n-2} + \ldots + q_n}.$$

Пусть

$$x_1, x_2, \ldots x_\mu$$

будут те значания x, заключенные между 1 и $\frac{1}{k}$ или между -1 и $-\frac{1}{k}$ (со включением пределов), при которых $F(x)$ обращается в ± 1, а

$$x_1', x_2', \ldots x_\nu'$$

те значения x, между теми же пределами, при которых $F(x)$ обращается в $\pm\frac{1}{\lambda}$, где $\frac{1}{\lambda}$ означает наибольшее.

Замечание. Из одного решения

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

предложенной задачи легко получить другое.

Действительно, дробь

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

представляет, как мы докажем, другое решение той же задачи. В самом деле, относительно степеней числителя и знаменателя дроби

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

условия задачи, очевидно, удовлетворены.

Кроме того, если численная величина x содержится между пределами 1 и $\frac{1}{k}$, численная величина дроби

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

заключается между 1 и $\frac{1}{\lambda}$ $\left(\frac{1}{\lambda}\text{ — наибольшее отклонение от нуля}\right)$. В тех же пределах содержится и численная величина дроби

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

которая при каждом x имеет тот же знак, как и дробь

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Следовательно, $\frac{1}{\lambda}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ также представляет решение нашей задачи.

Далее, принимая во внимание, что численная величина выражения

$$\frac{1}{kx}$$

содержится между 1 и $\frac{1}{k}$, когда численная величина x заключается между 1 и $\frac{1}{k}$, мы заключаем, что дроби

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{kx}\right)}{\psi\left(\frac{1}{kx}\right)}, \qquad \frac{1}{\lambda}\frac{\psi\left(\frac{1}{kx}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{kx}\right)},$$

у которых после приведения один из членов дроби будет степени n, а другой — степени не выше n, также дают решения нашей задачи.

27. Рассмотрим сначала тот случай, когда коэффициент p_0 в выражении y отличается от нуля. В этом предположении, очевидно, можно принять $p_0 = 1$.

При этом легко доказать, что уравнения (1) n° 21 и в настоящем случае должны иметь решение, отличное от

$$\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0,\ \ldots\ \xi_{\mu+\nu} = 0.$$

Разница в доказательстве будет заключаться только в том, что вместо приращений

$$-\mu_1\omega,\ -\mu_2\omega,\ \ldots\ -\mu_n\omega,\ -\mu_{n+1}\omega,\ \ldots\ \mu_{2n+1}\omega$$

коэффициентов

$$p_1, p_2, \ldots p_n, q_0, q_1, \ldots q_n$$

придется взять такие:

$$\mu_1\omega,\ \mu_2\omega,\ \ldots\ \mu_n\omega,\ \mu_{n+1}\omega,\ \ldots\ \mu_{2n+1}\omega.$$

На основании этого, мы снова убедимся, что сумма $\mu+\nu$ больше $2n+1$.

Далее, положим, что $p_0 = 0$. В этом предположении q_0 должен отличаться от нуля, так как один из членов дроби должен быть, по предположению, степени n; поэтому можно положить

$$q_0 = 1.$$

Так как, по замеченному выше (n° 26, прим.), из одного решения нашей задачи всегда можно вывести другое, числитель которого равен знаменателю прежнего решения, то рассматриваемый случай сводится к предыдущему, и, следовательно, сумма $\mu + \nu$ должна опять превосходить $2n + 1$.

28. Теперь мы переходим к составлению неопределенных уравнений, которым удовлетворяют числитель и знаменатель рациональной дроби $F(x)$.

С этою целью рассмотрим опять две целые функции

$$\psi^2(x) - \varphi^2(x), \qquad \psi^2(x) - \lambda^2 \varphi^2(x).$$

Первая из этих функций обращается в нуль при

$$x = x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_\mu.$$

Кроме того, все эти величины, за исключением пределов 1, -1, $\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$, которые могут находиться между величинами

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_\mu,$$

суть кратные корни уравнения

$$\psi^2(x) - \varphi^2(x) = 0,$$

так как левая часть равенства не изменяет своего знака при переходе x от величин, меньших каждого из означенных корней и смежных с ним, к величинам большим.

Отсюда следует, что все величины

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_\mu$$

должны быть корнями функции

$$\theta U,$$

где θ есть делитель

$$(1 - x^2)(1 - k^2 x^2),$$

а U — целая функция; причем разность

$$\psi^2(x) - \varphi^2(x)$$

делится на θU^2.

Обозначая через h степень θ и через f степень U, получим

$$h+2f\leq 2n, \qquad h+f=\mu.$$

Первое из этих неравенств имеет место, потому что степень функции

$$\psi^2(x)-\varphi^2(x)$$

не превышает $2n$.

Переходя теперь ко второй функции

$$\psi^2(x)-\lambda^2\varphi^2(x),$$

мы замечаем, что она обращается в нуль при всех значениях

$$x=x_1', \ x_2', \ \ldots \ x_\nu',$$

которые, кроме того, должны быть кратными корнями уравнения

$$\psi^2(x)-\lambda^2\varphi^2(x)=0.$$

Исключение может быть только для каждого из пределов

$$1, \ -1, \ \frac{1}{k}, \ -\frac{1}{k},$$

если он находится между величинами

$$x_1', \ x_2', \ \ldots \ x_\nu'.$$

На основании этого, мы заключаем, что все величины

$$x_1', \ x_2', \ \ldots \ x_\nu$$

будут корнями уравнения

$$\theta_1 V=0,$$

где θ_1 — некоторый делитель функции

$$(1-x^2)(1-k^2x^2)$$

(заметим, кстати, что θ и θ_1 не имеют, очевидно, общих множителей), а V означает некоторую целую функцию.

При этом функция

$$\psi^2(x)-\lambda^2\varphi^2(x)$$

будет делиться на

$$\theta_1 V^2.$$

Обозначая через h' — степень θ_1 и через f' — степень V, получим

$$h' + f' = \nu, \qquad h' + 2f' \leqq 2n.$$

Полагая теперь

$$(1) \qquad \begin{cases} h + 2f = 2n - i, \\ h' + 2f' = 2n - i', \end{cases}$$

где целые числа i и i', на основании предыдущего, не могут быть отрицательными, мы примем во внимание еще следующие неравенства:

$$(2) \qquad \begin{cases} h + h' \leqq 4, \\ \mu + \nu > 2n + 1. \end{cases}$$

Внося в последнее из них вместо чисел μ и ν их выражения, мы представим его в таком виде:

$$h + f + h' + f' > 2n + 1.$$

Откуда, принимая во внимание уравнения (1), имеем

$$h + h' > 2 + i + i'.$$

Сличая это неравенство с (2), находим

$$i + i' < 2.$$

Докажем теперь, что оба числа i и i' должны быть нули.

Действительно, из неравенства

$$i + i' < 2$$

следует, что если оба числа i и i' не будут нулями, то одно должно быть равно единице, а другое — нулю.

Кроме того, неравенства

$$h + h' > 2 + i + i'$$

и

$$h + h' \leqq 4$$

показывают, что, когда $i + i'$ равно единице, $h + h'$ равно 4.

Далее, из уравнений (1) следует, что в рассматриваемом случае одно из чисел h и h' должно быть четным, другое — нечетным, а это противоречит уравнению

$$h + h' = 4.$$

Следовательно, оба числа i и i' равны нулю; поэтому уравнения (1) обращаются в такие:

$$\left\{\begin{array}{l} h+2f=2n, \\ h'+2f'=2n. \end{array}\right. \tag{3}$$

Так как функции

$$\psi^2(x)-\varphi^2(x) \text{ и } \theta U^2$$

одинаковых степеней и первая делится на вторую, то можно принять

$$\psi^2(x)-\varphi^2(x)=\theta U^2,$$

если подобрать соответственно постоянный множитель в функции U и взять θ с тем или другим знаком.

Точно так же можно положить

$$\psi^2(x)-\lambda^2\varphi^2(x)=\theta_1 V^2.$$

Наконец заметим, что уравнению

$$h+h'=4,$$

где оба числа h и h' должны быть четными [ур-ние (3)], можно удовлетворить только полагая

$$\begin{array}{ll} h=2, & h'=2, \\ h=0, & h'=4, \\ h=4, & h'=0. \end{array}$$

Обращая внимание на то, что по условию задачи функция

$$\psi^2(x)-\varphi^2(x)$$

не может быть больше нуля ни при одном значении x, содержащемся между 1 и $\frac{1}{k}$ или между -1 и $-\frac{1}{k}$, а функция

$$\psi^2(x)-\lambda^2\varphi^2(x)$$

быть меньше нуля в тех же пределах, мы заключаем, что при выборе функций θ и θ_1 могут встретиться только четыре различные комбинации:

$$\begin{array}{ll} 1) & \theta=1-x^2, \quad \theta_1=1-k^2x^2, \\ 2) & \theta=k^2x^2-1, \quad \theta_1=x^2-1, \\ 3) & \theta=(1-x^2)(1-k^2x^2), \quad \theta_1=1, \\ 4) & \theta=1, \quad \theta_1=(1-x^2)(1-k^2x^2). \end{array}$$

Поэтому числитель и знаменатель искомой дроби должны удовлетворять одной из следующих систем неопределенных уравнений:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \psi^2(x) - \varphi^2(x) = (1 - x^2)\, U^2, \\ \psi^2(x) - \lambda^2\varphi^2(x) = (1 - k^2x^2)\, V^2; \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \psi^2(x) - \varphi^2(x) = (k^2x^2 - 1)\, U^2, \\ \psi^2(x) - \lambda^2\varphi^2(x) = (x^2 - 1)\, V^2; \end{cases}$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \psi^2(x) - \varphi^2(x) = (1 - x^2)(1 - k^2x^2)\, U^2, \\ \psi^2(x) - \lambda^2\varphi^2(x) = V^2; \end{cases}$$

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \psi^2(x) - \varphi^2(x) = - U^2, \\ \psi^2(x) - \lambda^2\varphi^2(x) = -(1 - x^2)(1 - k^2x^2)\, V^2. \end{cases}$$

Замечание, сделанное в конце n° 26, позволяет свести решение уравнений (II) к (I) и (IV) к (III).

Действительно, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют уравнениям (II), то, как легко видеть, функции

$$(4) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x) = x^n\, \varphi\left(\frac{1}{kx}\right), \\ \psi_1(x) = x^n\, \psi\left(\frac{1}{kx}\right) \end{cases}$$

удовлетворяют уравнениям (I).

Сличая это с упомянутым замечанием, мы видим, что каждому решению нашего вопроса, найденному из уравнений (II), соответствует решение с тем же наименьшим отклонением $\frac{1}{\lambda}$, определяемое уравнениями (I).

Далее, если две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют уравнениям (IV), то функции

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\lambda}\, \psi(x),$$

$$\psi_1(x) = \varphi(x)$$

удовлетворяют уравнениям (III), и опять одно решение нашего вопроса сводится на другое.

29. Из предыдущего следует, что достаточно для решения нашей задачи найти только решение уравнений

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \psi^2(x) - \varphi^2(x) = (1 - x^2)\, U^2, \\ \psi^2(x) = \lambda^2\varphi^2(x) = (1 - k^2x^2)\, V^2; \end{cases}$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \psi^2(x) - \varphi^2(x) = (1 - x^2)(1 - k^2x^2)\, U^2, \\ \psi^2(x) - \lambda^2\varphi^2(x) = V^2, \end{cases}$$

где в (I) U и V суть целые функции $(n-1)$-й степени, а в (III) U $(n-2)$-й степени и V — n-й степени.

Из этих уравнений [(I) и (III)] следует, как известно, что отношение

$$y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

в обоих случаях есть интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{Mdy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}}=\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}, \tag{5}$$

где M означает постоянное количество, которое, в виду двойного знака у радикала

$$\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)},$$

можно считать положительным.

Из этого выводится, так же, как и в n° 24, что y — функция четная или нечетная.

Докажем теперь, что уравнения (I) имеют место только для нечетных значений n, а уравнения (III) — только для четных n.

В самом деле, по замеченному выше, обе функции $\varphi^2(x)$ и $\psi^2(x)$ — четные; следовательно, каждая из функций U и V также четная или нечетная. С другой стороны, нечетной ни одна из них быть не может, ибо каждая нечетная целая функция обращается в нуль при $x=0$, а все корни функций U и V заключаются по численной величине между 1 и $\frac{1}{k}$.

Поэтому обе функции U и V как в уравнениях (I), так и в уравнениях (III), — четных степеней. Иначе, в уравнениях (I) $n-1$ — четное число, т. е. n — нечетное; а в уравнениях (III) n — четное.

30. Переходим теперь к выражению отношения

$$y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

в эллиптических функциях.

Было уже замечено, что y удовлетворяет дифференциальному уравнению (5) или, что тоже самое, уравнению

$$\frac{Mdy}{\sqrt{(y^2-1)(1-\lambda^2 y^2)}}=\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2 x^2)}}. \tag{6}$$

Предположим, сначала, что числитель и знаменатель дроби

$$y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

удовлетворяют уравнениям

$$\psi^2(x)-\varphi^2(x)=(1-x^2)\,U^2,$$
$$\psi^2(x)-\lambda^2\varphi^2(x)=(1-k^2x^2)\,V^2,$$

что, как мы видели выше, имеет место для n — нечетного.

Четные функции U и V имеют вид

$$U=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-3}+\ldots+a_{\frac{n+1}{2}},$$
$$V=b_1x^{n-1}+b_2x^{n-3}+\ldots+b_{\frac{n+1}{2}}.$$

Каждая из них, как видно из предыдущего, обращается в нуль при $\frac{n-1}{2}$ положительных значениях x, заключенных между 1 и $\frac{1}{k}$, и при $\frac{n-1}{2}$ отрицательных значениях x, равных предыдущим с перемененным знаком.

Пусть

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{\frac{n-1}{2}}$$

будут положительные корни уравнения

$$U=0,$$

взятые в возрастающем порядке, и

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_{\frac{n-1}{2}}$$

положительные корни уравнения

$$V=0,$$

написанные также по порядку их величин.

Между каждыми двумя смежными членами ряда

$$1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{\frac{n-1}{2}} \tag{7}$$

заключается одно из чисел

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_{\frac{n-1}{2}},$$

ибо y, обращаясь в единицу, при каждом из значений

$$1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{\frac{n-1}{2}}$$

должен иметь maximum в промежутке между каждыми двумя смежными членами ряда (7). Этот maximum не может отличаться от $\frac{1}{\lambda}$, как это видно из выражения производной

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{M}\frac{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}.$$

Проинтегрируем теперь обе части уравнения

$$\frac{M dy}{\sqrt{(y^2-1)(1-\lambda^2 y^2)}}=\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2 x^2)}}$$

в пределах от 1 до $\frac{1}{k}$.

Интеграл

$$\int\limits_1^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2 x^2)}}$$

равен, как известно, K' — эллиптическому аргументу для дополнительного модуля k'.

При изменении x от 1 до $\frac{1}{k}$, y изменяется в следующем порядке: когда x изменяется от 1 до β_1, y идет от 1 до $\frac{1}{\lambda}$, и радикал

$$\sqrt{(y^2-1)(1-\lambda^2 y^2)}$$

имеет положительное значение.

Далее, когда x изменяется от β_1 до α_1, y идет от $\frac{1}{\lambda}$ до 1, и радикал

$$\sqrt{(y^2-1)(1-\lambda^2 y^2)}$$

имеет отрицательное значение, так как $\frac{dy}{dx}$ имеет в этом промежутке знак, противоположный прежнему.

Потом, когда x изменяется от α_1 до β_2, y идет от 1 до $\frac{1}{\lambda}$ и

$$\sqrt{(y^2-1)(1-\lambda^2 y^2)}$$

положительный и т. д.

Замечая, наконец, что интеграл

$$\int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1-\lambda^2 y^2)}}$$

равен Λ' — полному аргументу для дополнительного модуля $\sqrt{1-\lambda^2}$, мы получаем уравнение

$$nM\Lambda' = K'.$$

Проинтегрировав же обе части равенства

$$\frac{Mdy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

в пределах от $x=-1$ до $x=+1$, получим

$$M\Lambda = K,$$

где Λ и K — полные эллиптические аргументы для модулей λ и k. Действительно, когда x идет от -1 до $+1$, y также изменяется от -1 до $+1$.

Теперь видно, что y есть то преобразование эллиптических функций, которое соответствует делению 2-го периода на нечетное число (Transformatio realis secunda).

Поэтому y выражается следующим образом:

$$y = \frac{x}{M} \frac{\left(1+\frac{x^2}{\operatorname{tn}^2\left(\frac{2K'}{n'}, k'\right)}\right)\left(1+\frac{x^2}{\operatorname{tn}^2\left(\frac{4K'}{n}, k'\right)}\right)\cdots\left(1+\frac{x^2}{\operatorname{tn}^2\left(\frac{(n-1)K'}{n}, k'\right)}\right)}{\left(1+\frac{x^2}{\operatorname{tn}^2\left(\frac{K'}{n}, k'\right)}\right)\left(1+\frac{x^2}{\operatorname{tn}^2\left(\frac{3K'}{n}, k'\right)}\right)\cdots\left(1+\frac{x^2}{\operatorname{tn}^2\left(\frac{(n-2)K'}{n}, k'\right)}\right)},$$

где

$$M = \left\{\frac{\operatorname{snc}\left(\frac{2K'}{n}, k'\right)\operatorname{snc}\left(\frac{4K'}{n}, k'\right)\ldots\operatorname{snc}\left(\frac{(n-1)K'}{n}, k'\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{2K'}{n}, k'\right)\operatorname{sn}\left(\frac{4K'}{n}, k'\right)\ldots\operatorname{sn}\left(\frac{(n-1)K'}{n}, k'\right)}\right\}^2,$$

$$\lambda = \frac{k^n}{\left(\operatorname{dn}\left(\frac{2K'}{n}, k'\right)\operatorname{dn}\left(\frac{4K'}{n}, k'\right)\ldots\operatorname{dn}\left(\frac{(n-1)K'}{n}, k'\right)\right)^4}.$$

Таким образом мы приходим к такой теореме:

Теорема. *Всякая несократимая рациональная дробь, у которой один из членов нечетной степени n, а степень другого не превосходит n и которая не* *меньше единицы, когда x содержится между пределами 1 и $\frac{1}{k}$, и не больше — 1 для x, заключенных между — 1 и $-\frac{1}{k}$, превзойдет в тех же пределах величину*

$$\frac{1}{k^n}\left(\operatorname{dn}\left(\frac{2K'}{n}, k'\right)\operatorname{dn}\left(\frac{4K'}{n}, k'\right)\ldots\operatorname{dn}\left(\frac{(n-1)K'}{n}, k'\right)\right)^4$$

или будет ее достигать.

Примечание. Величину

$$\frac{1}{k^n}\left(\operatorname{dn}\left(\frac{2K'}{n}, k'\right)\operatorname{dn}\left(\frac{4K'}{n}, k'\right)\ldots\operatorname{dn}\left(\frac{(n-1)K'}{n}, k'\right)\right)^4$$

можно изобразить еще так:

$$\prod_{p=1}^{p=n}\frac{\Theta^2\left(\frac{2p-1}{n}K', k'\right)}{\Theta^2\left(\frac{2pK'}{n}, k'\right)},$$

где Π — известный знак для обозначения произведения.

31. Займемся теперь решением уравнений

$$\psi^2(x)-\varphi^2(x)=(1-x^2)(1-k^2x^2)U^2,$$
$$\psi^2(x)-\lambda^2\varphi^2(x)=V^2,$$

где U и V означают четные функции x вида

$$U=a_1x^{n-2}+a_2x^{n-4}+\ldots+a_{\frac{n}{2}}$$

$$V=b_1x^n+b_2x^{n-2}+\ldots+b_{\frac{n}{2}+1}.$$

Пусть

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{\frac{n}{2}-1}$$

будут положительные корни уравнения $U=0$, взятые в порядке возрастающих величин.

Точно так же пусть

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_{\frac{n}{2}}$$

будут положительные корни уравнения $V=0$, расположенные в том же порядке.

Совершенно так же, как и в предыдущем n°, убедимся, что β_1 заключается между 1 и α_1, β_2 — между α_1 и α_2, и т. д.; наконец, $\beta_{\frac{n}{2}}$ — между $\alpha_{\frac{n}{2}-1}$ и $\frac{1}{k}$.

Интегрируя в пределах от $x=1$ до $x=\frac{1}{k}$ обе части уравнения

$$\frac{M\,dy}{\sqrt{(y^2-1)(1-\lambda^2 y^2)}}=\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}},$$

которое, как мы видели, имеет место и для настоящего случая, мы получим опять уравнение

$$nM\Lambda'=K';$$

а интегрируя между пределами -1 и $+1$, — уравнение

$$M\Lambda=K,$$

и, следовательно, y есть то преобразование, которое соответствует делению 2-го периода на четное число n.

Поэтому y выражается следующим образом:

$$y=\frac{x\prod\limits_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\left(1+\dfrac{x^2}{\operatorname{tn}^2\left(\frac{2pK'}{n},\ k'\right)}\right)}{M\prod\limits_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\left(1+k^2\operatorname{tn}^2\left(\frac{(2p-1)K'}{n},\ k'\right)\cdot x^2\right)}, \tag{8}$$

$$M=\frac{\prod\limits_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\operatorname{snc}^2\left(\frac{(2p-1)K'}{n},\ k'\right)}{\prod\limits_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\operatorname{sn}^2\left(\frac{2pK'}{n},\ k'\right)}.$$

Полагая в формуле (8)

$$x=\operatorname{sn}\left(K+\frac{K'i}{n},\ k\right),$$

находим, после некоторых преобразований,

$$\sqrt{\lambda}=\prod_{p=1}^{p=n}\frac{\Theta\left(\frac{2pK'}{n},\ k'\right)}{\Theta\left(\frac{(2p-1)K'}{n},\ k'\right)}.$$

Теорема. *Всякая несократимая рациональная дробь, у которой один из членов четной степени n, а степень другого не превосходит n, и которая не меньше единицы, когда x содержится между 1 и $\frac{1}{k}$, и не больше -1 для значений x, содержащихся между -1 и $-\frac{1}{k}$, превзойдет численно или будет достигать в тех же пределах величины*

$$\prod_{p=1}^{p=n} \frac{\Theta^2\left(\frac{(2p-1)K'}{n}, k'\right)}{\Theta^2\left(\frac{2pK'}{n}, k'\right)}.$$

Примечание. Пользуясь известною формулой

$$\log\frac{1}{k'} = \frac{8q}{1-q^2} + \frac{8q^3}{3(1-q^6)} + \frac{8q^5}{5(1-q^{10})} + \ldots,^*$$

где

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

и замечая, что

$$\sqrt[n]{q} = e^{-\frac{\pi K'}{nK}} = e^{-\pi\frac{\Lambda'}{\Lambda}},$$

найдем

$$\log\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{8\sqrt[n]{q}}{1-\sqrt[n]{q^2}} + \frac{8\sqrt[n]{q^3}}{3(1-\sqrt[n]{q^6})} + \ldots$$

Отсюда видно, что, с возрастанием n, $\frac{1}{\lambda}$ убывает.

Принимая это во внимание и сличая выражения $\frac{1}{\lambda}$, данные в nn° 30 и 31, мы можем высказать следующую теорему, которая заключает в себе теоремы nn° 30 и 31.

Теорема. *Всякая рациональная дробь, у которой числитель и знаменатель степеней не выше n и которая не меньше единицы, когда x содержится между 1 и $\frac{1}{k}$, и не больше -1 для значений x, содержащихся между -1 и $-\frac{1}{k}$, превзойдет численно или будет достигать в тех же пределах величины*

$$\prod_{p=1}^{p=n} \frac{\Theta^2\left(\frac{(2p-1)K'}{n}, k'\right)}{\Theta^2\left(\frac{2pK'}{n}, k'\right)},$$

Данный здесь предел — *точный* в том смысле, что теорема не будет уже иметь места, как бы мало ни был увеличен этот предел.

---

* Jacobi. Fundamenta, p. 103.